

文章编号:1004-4213(2011)03-0327-5

# 灰度调整与数字全息图像质的关系

高志强, 李勇

(浙江师范大学 信息光学研究所, 浙江 金华 321004)

**摘 要:**如何在有限的灰度级别下输出高质量全息图是人们关注的问题之一. 文章从数字全息图(计算机制全息图)的灰度直方图出发, 研究灰度调整对全息图再现像质的影响. 首先通过理论推导研究了压缩计算机制全息图中占比例少的灰度, 展宽占比例多的灰度后全息图衍射效率的变化, 发现处理后的计算机制全息图经灰度压缩的阈值越大, 衍射效率越高. 然后研究了灰度压缩的阈值对计算机制全息图再现像噪音的影响, 发现全息图再现像的噪音随着阈值的增大, 先减少再增大. 实验表明, 通过取合适的阈值对全息图进行灰度调整, 可以在保证全息图再现像的信噪比的同时, 提高全息图的衍射效率. 计算机仿真和全息图光学再现实验证明了理论分析是正确的, 为制作高质量的计算机制全息图提供了参考依据.

**关键词:**全息三维显示; 灰度直方图; 全息图量化; 像质

**中图分类号:** O438.1

**文献标识码:** A

**doi:** 10.3788/gzxb20114003.0327

## 0 引言

自从罗曼第一次展示了计算机制全息图<sup>[1-2]</sup>, 这种数字化的全息图已经在很多方面得到了应用. 例如: 光学互连<sup>[3]</sup>, 光学检测<sup>[4]</sup>, 光学信息处理<sup>[5]</sup>, 立体显示<sup>[6-8]</sup>等等. 常见设备可以表现的灰度级别有限, 量化是计算机制全息图中必不可少的步骤. 量化级别越少, 全息图的量化噪音越大. 在有限的量化级别下输出高质量的计算机制全息图是人们关注的问题之一. 常见的是对全息图进行二值量化, 但是它在提高全息图衍射效率的同时增加了噪音, 造成全息图再现像信噪比下降. 本文从计算机制全息图的灰度直方图出发, 研究灰度变换对全息图的衍射效率和再现像信噪比的影响. 研究表明, 适当压缩和扩展计算机制全息图(Computer Generated Hologram)中的灰度分布, 既提高了衍射效率, 又保证了再现像的高信噪比. 给出了理论分析和计算机仿真结果, 表明该方法是可行的.

## 1 原理

### 1.1 计算机制全息图原理

计算机制作全息图通常采用如图 1 所示的模型. 设待记录的物光波复振幅为  $O(x, y)$ , 参考光波为  $R(x, y)$ , 即

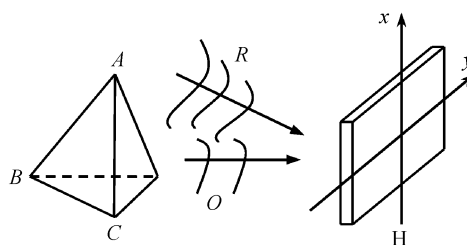


图 1 计算机制全息图制作模型  
Fig. 1 Computational model of CGH

$$O(x, y) = O(x, y) \exp [j\varphi(x, y)] \quad (1)$$

$$R(x, y) = R(x, y) \exp [j\varphi(x, y)] \quad (2)$$

在线性记录的条件下, 并忽略一些不重要的常量因子, 全息图的透过率函数为

$$t(x, y) = t_0 + \beta' [ |R(x, y)|^2 + |O(x, y)|^2 ] + 2\beta' |R(x, y)| |O(x, y)| \cos [\varphi(x, y) - \varphi(x, y)] = t_b + \beta' |O(x, y)|^2 + 2\beta' |R(x, y)| |O(x, y)| \cdot \cos [\varphi(x, y) - \varphi(x, y)] \quad (3)$$

式中  $t_0$  和  $\beta'$  为与感光材料性质及拍摄条件有关的常量,  $t_b = t_0 + \beta' |R(x, y)|^2$ , 表示均匀偏置透射率,  $\phi(x, y)$  为物光的相位分布,  $\varphi(x, y)$  为参考光的相位分布. 全息图再现过程可以表示为

$$U(x, y) = C(x, y)t(x, y) = t_b C(x, y) + \beta' C(x, y) \cdot |O(x, y)|^2 + 2\beta' |R(x, y)| |O(x, y)| \cos [\varphi(x, y) - \varphi(x, y)] = U_1(x, y) + \beta' C'(x, y) \exp [j\varphi(x, y) - j\varphi(x, y)] + \beta' C'(x, y) \exp [-j\varphi(x, y) + j\varphi(x, y)] \quad (4)$$

基金项目: 国家自然科学基金(No. 60702078、No. 60877002)和浙江省自然科学基金(No. Z1080030)资助

第一作者: 高志强(1984-), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为压缩计算机制全息图与三维显示. Email: gzq20123@yahoo.com.cn

通讯作者: 李勇(1972-), 男, 教授, 主要研究方向为光信息处理, 光学三维传感与三维显示. Email: liyong@zjnu.cn

收稿日期: 2010-09-09; 修回日期: 2010-10-19

式(4)中  $U_1$  是全息图衍射场中的直透部分和晕轮光,右边第二项和第三项各为全息图衍射场中的±1级波.在全息显示中,需要的是+1或-1级衍射像.在实际的制作中,为了充分利用计算全息图的空间带宽积,全息在线性记录的条件下,一般采用双极强度计算方法<sup>[9]</sup>,全息面上干涉光强分布可表示为

$$I(x,y) = A + \sum_{i=1}^N a_i \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} r_i(x,y) + \varphi_i - \psi(x) \right\} \quad (5)$$

式中  $A$  为直流偏置,使强度非负,  $N$  为场景中的总物点数,  $a_i$  为振幅;  $r_i$  为物点与全息面上某一点  $(x, y)$  之间的距离;  $\varphi_i$  为初始位相,通常取随机值;  $\psi(x)$  是参考光在全息图上的相位分布.

### 1.2 灰度调整对 CGH 衍射效率的影响

通过对大量采用双极强度计算方法制作的全息图进行分析,发现这种全息图的灰度直方图为高斯型.因此,考虑对直方图中占比例较小的部分灰度进行压缩,而对其他的灰度进行扩展,以充分利用输出设备的灰度表现能力.这种方法可以表述为:将原图像中灰度值  $I$  高于阈值  $T_1$  的那些像素的灰度值都归为  $T_1$ ,将原图像中灰度值低于阈值  $T_2$  的那些像素的灰度值都归为  $T_2$ ,然后将图像的所有灰度值按式(6)进行相应的变换.

$$I_1 = (I - T_2) / (T_1 - T_2) \quad (6)$$

式中  $I_1$  为变换后的灰度值.由于全息图灰度直方图的高斯分布特性,在归一化情况下,设  $T_1 = 1 - T_2$ .

首先讨论进行灰度变换后全息图衍射效率的变化情况.由式(5)可知,全息图的透过率为一系列余弦函数的线性叠加,因此以余弦型透过率分布的全息图为例进行分析.考虑一维情况,透过率表示为

$$f(x) = 0.5(1 + \cos(x)) \quad (7)$$

由式(7)可知,如果阈值  $T_1$  对应的相位  $x_1$  为  $\pm\tau/2$ ,则  $T_2$  对应的相位  $x_2$  为  $\pi - \tau/2$  和  $-\pi + \tau/2$ .

图2为透过率曲线的一个周期及参量示意图.

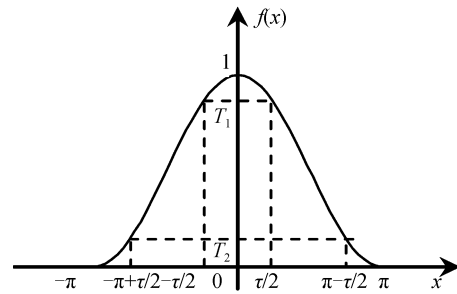


图2 透过率曲线

Fig. 2 Curve of transmittance

对  $f(x)$  进行灰度调整后可表示为

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < -\pi + \tau/2) \\ (f(x) - f(-\pi + \tau/2)) / (f(-\tau/2) - f(-\pi + \tau/2)) & (-\pi + \tau/2 \leq x < -\tau/2) \\ 1 & (-\tau/2 \leq x \leq \tau/2) \\ (f(x) - f(\pi - \tau/2)) / (f(\tau/2) - f(\pi - \tau/2)) & (\tau/2 < x \leq \pi - \tau/2) \\ 0 & (\pi - \tau/2 < x \leq \pi) \end{cases} \quad (8)$$

将式(8)展开成傅里叶级数,得到

$$f_1(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_1) \quad (9)$$

式中  $a_0$  为直流项;  $n$  为展开的谐波的阶数;  $a_n$  为  $n$  倍频处的振幅.

则±1级衍射像的系数为

$$a_1 = \frac{F}{\pi} \int_{-\pi + \tau/2}^{-\tau/2} \left\{ \frac{1}{2} [1 + \cos(x)] - \frac{1}{2} [1 + \cos(-\pi + \tau/2)] \right\} \cos(x) dx + \frac{F}{\pi} \int_{\tau/2}^{\pi - \tau/2} \left\{ \frac{1}{2} [1 + \cos(x)] - \frac{1}{2} [1 + \cos(\pi - \tau/2)] \right\} \cos(x) dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos(x) dx \quad (10)$$

式(10)中  $F = 1 / [f(-\tau/2) - f(-\pi + \tau/2)]$  即灰度扩展倍率,可表示为

$$F = \frac{1}{\frac{1}{[1 + \cos(-\tau/2)]/2 - [1 + \cos(-\pi + \tau/2)]} - \frac{1}{\cos(\tau/2)}} \quad (11)$$

将  $F$  代入式(10)经过积分得

$$a_1 = \frac{[-\sin(\tau)/2 - \tau/2 + \pi/2]}{\pi \cos(\tau/2)} + \frac{2\sin(\tau/2)}{\pi} \quad (12)$$

在归一化条件下,全息图的衍射效率  $\eta$  可表示为

$$\eta = a_1^2 = \left[ \frac{[-\sin(\tau)/2 - \tau/2 + \pi/2]}{\pi \cos(\tau/2)} + \frac{2\sin(\tau/2)}{\pi} \right]^2 \quad (13)$$

在灰度调整中的  $T_2$  最大值为 0.5.由余弦函数特点可知,在阈值  $T_2$  区间  $[0, 0.5]$  内  $\tau$  随着  $T_2$  的增大而增大.由式(13)可知,衍射效率  $\eta$  随着阈值  $T_2$  的增大而增大.当  $T_2 = 0.5$  即  $\tau = \pi$  时  $\eta$  达到最大值.此时灰度调整后的透过率为矩形函数,与文献<sup>[10]</sup>所述结果一致.

### 1.3 灰度调整对 CGH 再现像噪音的影响

计算机全息图再现像的噪音与全息图的量化噪音成正比,可以用方差表示.方差的计算利用了数字信号处理的量化误差的理论<sup>[11]</sup>.由计算公式可知,量化噪音及信噪比的计算是个统计过程<sup>[12]</sup>.因为利用双极强度公式计算得到的全息图的灰度直方

图为高斯型,所以任意区间的高斯积分无法得到直接解析表达式,但采用舍入误差的计算方法可以进行量化噪音及信噪比的数值统计计算,给出信噪比与阈值之间的积分关系式.经过灰度调整后的全息图误差由三部分组成.第一部分为灰度高于阈值  $T_1$  部分压缩造成的误差,其方差可表示为

$$\sigma_1^2 = \int_{1-T_1}^1 (1-I)^2 p(I) dI \quad (14)$$

式中  $P(I)$  表示灰度为  $I$  的概率密度函数.第二部分为灰度低于阈值  $T_2$  部分压缩造成的误差,其方差可表示为

$$\sigma_2^2 = \int_0^{T_2} I^2 p(I) dI \quad (15)$$

第二部分为灰之度  $T_1, T_2$  之间部分量化造成的误差,可表示为

$$\sigma_3^2 = \frac{(T_1 - T_2)^2}{12(M-1)^2} = \frac{(1-2T_2)^2}{12(M-1)^2} \quad (16)$$

式中  $M$  为量化级别.总方差为这三部分之和

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \quad (17)$$

由式(14)~(17)可知,随着阈值  $T_2$  的增加,灰度压缩造成的噪音  $\sigma_1^2$  和  $\sigma_2^2$  增加,而量化噪音  $\sigma_3^2$  减少.因为全息图灰度的分布概率为高斯形式,所以总的噪音随阈值  $T_2$  的增加先下降再上升.

## 2 计算机仿真结果及分析

为验证理论分析的正确性,设计了如图 3(a)所示的灰阶图片.图中上两行灰度分别为  $1 \sim 0.7$  和

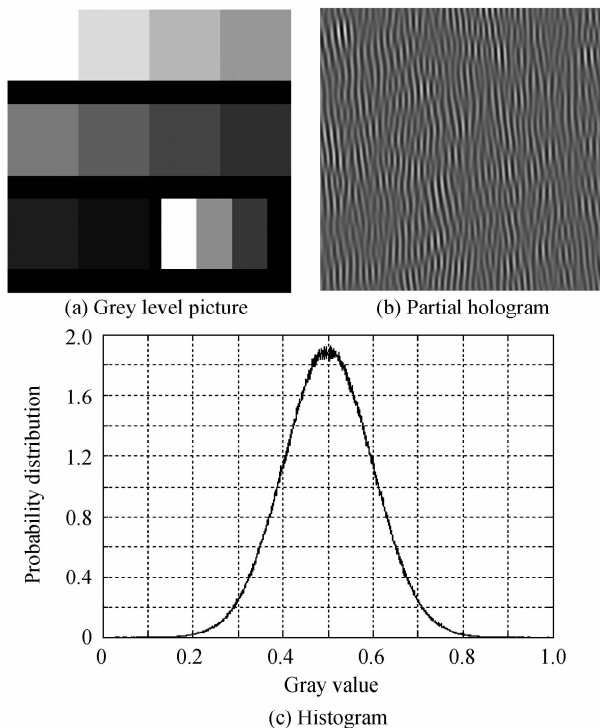


图 3 计算机仿真图片  
Fig. 3 Pictures for simulation

$0.6 \sim 0.3$ ,最后一行左边两块为  $0.2$  和  $0.1$ ;右边三块分别为  $1, 2/3$  和  $1/3$ .以点光源作参考光,计算出全息图.图 3(b)为全息图片段,图 3(c)为其灰度分布图.采用步长  $dT=0.02$ ,从  $T_2=0$  到  $0.5$  对全息图数据进行灰度调整.为避免全息图输出过程中其他因素对结果的影响,采用数值再现的方法再现全息图并计算全息图的衍射效率和信噪比.

全息图再现像的信噪比由式(18)计算

$$\text{SNR} = \frac{\iint |I_c(x, y)|^2 dx dy}{\iint |\Delta I_c(x, y)|^2 dx dy} \quad (18)$$

式中  $I_c(x, y)$  为再现像对应灰阶的平均值,  $\Delta I_c(x, y)$  为对应灰阶的标准差.

式(13)曲线如图 4(a),由图 3(b)所示计算全息图的衍射效率如图 4(b).由图中可见,两者的变化趋势是相同的.利用数值积分方法计算出调整后全息图的信噪比曲线如图 5(a),图 3(b)所示计算全息图的信噪比如图 5(b).二者有相同的变化趋势.但两曲线不完全相同,主要原因是构成全息图的各余弦函数振幅不同,灰度调整后产生的结果也不同.前者是一维余弦型的全息图,后者是对图 3(a)所示物体,参考光为点光源获得的计算全息图,因此总的效果与单一余弦灰度调整后有所差异.最后制作了一张实际物体的计算机全息图并输出进行光学再现.

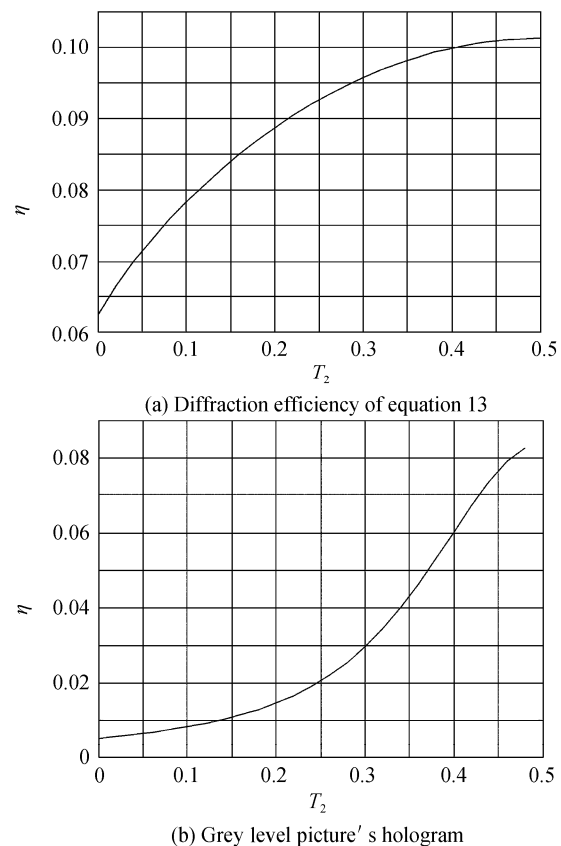


图 4 调整阈值与衍射效率的关系  
Fig. 4 Relationship of diffraction efficiency and threshold

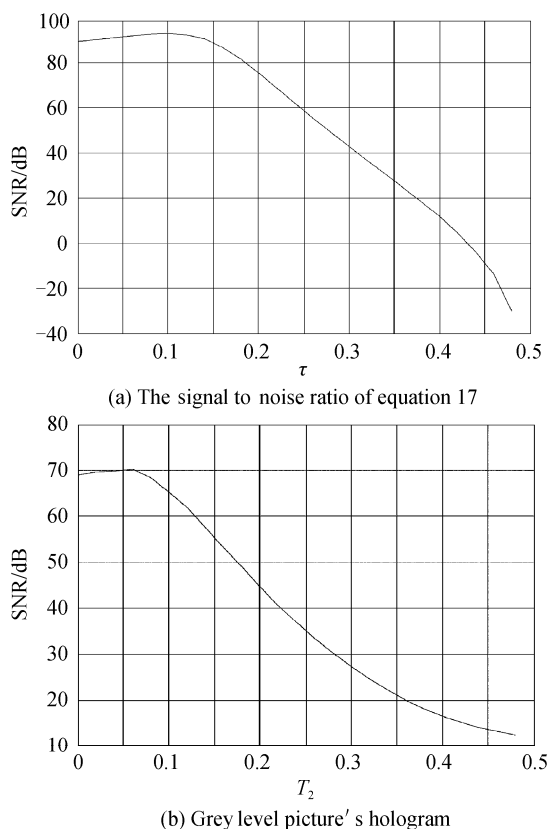


图 5 调整阈值与再现像信噪比的关系

Fig. 5 Relationship of the signal to noise ratio and threshold

图 6 为该计算机制全息图灰度调整后光学再现像的比较(由于全息图光学再现像不易拍摄,实际观察效果比照片好),经过灰度调整后全息图的再现像质得到了提高.由理论及实验结果可以看出,存在一个阈值  $T_2$  使灰度调整后全息图再现像有最高信噪比,同时又提高了计算全息图的衍射效率.另外,我们还可以根据再现像信噪比的要求,选择  $T_2$  的值进行调整,获得尽可能高的衍射效率.

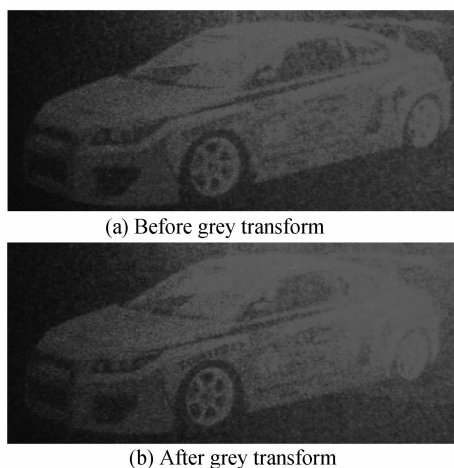


图 6 灰度调整前后全息图光学再现像质比较

Fig. 6 Optical reconstructed image before and after grey transform

### 3 结论

经过对大量计算机制全息图的灰度直方图进行分析,发现它们的灰度分布具有高斯函数的形式.以余弦型透过率全息图为例,理论上推导了全息图衍射效率与调整阈值之间关系的函数表达式.得出对全息图进行灰度调整能够提高全息图的衍射效率.同时研究了经过灰度调整后全息图再现像信噪比的变化,得出全息图信噪比随阈值增加先升后降的结论.经过计算机仿真和光学再现实验验证了理论分析的正确性.

#### 参考文献

- [1] LOHMANN A W, PARIS D P. Binary fraunhofer holograms generated by computer[J]. *Applied Optics*, 1967, **6**(10): 1739-1748.
- [2] BROWN B R, LOHMANN A W. Computer-generated binary holograms[J]. *IBM Journal of Research and Development*, 1969, **13**(2): 160-168.
- [3] LÜ Qie-ni, ZHANG Yi-mo, WANG Ying-zong, *et al.* Implementation 2-D free-space optical interconnection networks using holographic grating with multi-order diffraction[J]. *Acta Optica Sinica*, 2001, **30**(9): 1088-1091.  
吕且妮,张以谟,王应宗,等.用多级衍射全息光栅实现 2-D 自由空间光学互连网络[J]. *光子学报*, 2001, **30**(9): 1088-1091.
- [4] LU Zhen-wu, LIU Hua, LI Feng-you. Aspheric surface testing with CGH on curved surface[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2004, **12**(6): 555-559.  
卢振武,刘华,李凤有.利用曲面计算全息图进行非球面检测[J]. *光学精密工程*, 2004, **12**(6): 555-559.
- [5] KIM C S, PARK Y H, LEE H J. Optical information security system using an interference-based computer-generated hologram and BaTiO<sub>3</sub> [J]. *Optical Engineering*, 2006, **45**(4): 045801.
- [6] KIM SEUNG CHEOL, HWANG DONG CHOON, LEE DONG HWI, *et al.* Computer-generated holograms of a real three-dimensional object based on stereoscopic video images[J]. *Applied Optics*, 2006, **45**(22): 5669-5676.
- [7] WANG Yuan-yuan, WANG Hui, REN Zhi-jun, *et al.* Research of the computer-generated dynamic rainbow hologram[J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **35**(7): 1018-1021.  
王媛媛,王辉,任志军,等.动态数字彩虹全息显示的研究[J]. *光子学报*, 2006, **35**(7): 1018-1021.
- [8] WANG Hui, LI Yong, JIN Hong-zhen, *et al.* Visualization using computer-generated hologram (CGH) based on three-dimensional shape measurement data of object [J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(3): 284-288.  
王辉,李勇,金洪震,等.三维形测量数据的计算全息可视化[J]. *光学学报*, 2003, **23**(3): 284-288.
- [9] LUCENTE M E. Interactive computation of holograms using a look-up table[J]. *Journal of Electronic Imaging*, 1993, **2**(1): 28-34.
- [10] 于美文.光全息学及其应用[M].北京理工大学出版,1996, 140-141.
- [11] 虞祖良,金国藩.计算机制全息图[M].北京:清华大学出版社,1984,85-88.
- [12] 吴镇扬.数字信号处理[M].北京:高等教育出版社,2004: 187-195.

## Relationship of Image Quality of Digital Hologram and Grey Level Adjustment

GAO Zhi-qiang, LI Yong

*(Institute of Information Optics, Zhejiang Normal University, Jinhua, Zhejiang 321004, China)*

**Abstract:** It is an interesting thing to output high quality digital hologram (Computer Generated Hologram) under limited grey level. The reconstructed image quality of digital hologram was studied with adjusting the grey level of hologram, according to its histogram. The grey levels whose ratios were relatively small were cut down, and the grey levels whose ratios were relatively large were expanded. Firstly, the change of diffraction efficiency of digital hologram after grey level adjusting was studied in theory. The diffraction efficiency would be increased while the threshold for grey level adjustment increased. Then the change of Signal to Noise Ratio (SNR) of reconstructed image was analyzed. It is found that the SNR will increase at first and then decrease with the increase of the threshold. The hologram with high diffraction efficiency and high SNR can be obtained if the special threshold for grey level adjustment is selected. The computer simulation and optical reconstruction of digital hologram prove the analysis.

**Key words:** Holography 3D display; Grey histogram; Quantization of hologram; Image quality