

文章编号:1004-4213(2011)11-1662-5

# 在变值测量模拟中的条件概率统计分布

郑智捷

(云南大学 软件学院信息安全系,昆明 650091)

**摘要:**针对常见的两类量子交互干涉实验,Young 氏双缝干涉和超低强度长时间曝光量子交互结果显示出的明显波动统计分布特性,本文基于另一种经典概率测量模型 Bayes 统计依据的条件概率方法,提出条件概率变值测量模型,建立了测量模拟方法,给出了不同参量的测量公式,并对相关的重要条件进行描述.通过 2 个具体例子按每个函数形成四组 16 个直方图统计分布进行比较,对给定例子中的重要特性进行了分析.分析表明,在同步/异步、对称/反对称的作用下,条件概率测量模拟系统能针对左路、右路、双路粒子和双路波动交互作条件形成两类 8 种不同的统计分布.从不同的侧面显现了双路粒子同左/右路异步加算符信号之间的直接耦合关系,以及左/右路同步加算符信号与双路波动之间的干涉输出关系.在条件概率模型条件下,单路/双路、粒子和波动的区别非常明晰,可以从中看到 Feynman 提炼的经典和量子统计之间的区别,统计判据直接从直方图分布中即可区分.这类特性从基础层面显示了波/粒二重性的怪异特性,可以通过粒子性的模型完整描述.

**关键词:**条件概率;统计分布;波动特性;干涉实验

**中图分类号:**O431;O41

**文献标识码:**A

**doi:**10.3788/gzxb20114011.1662

## 0 引言

在经典的量子交互实验测量中,有两类实验结果特别引人注目:一类是 Young 氏的双缝干涉实验,利用相干光源显现在不同条件下的干涉效应<sup>[1-5]</sup>;而另一类则是在超低量子发射强度下经过长时间地曝光之后形成的单量子交互作用检测实验<sup>[6-10]</sup>.通常第一类实验从原理上区分相干量子源通过交互作用之后,在单双缝条件下显现出特有的经典和量子干涉作用.而第二类实验的结果显示,即使在非常低的量子发射强度作用条件下,通过长时间曝光之后最终形成的交互作用结果,所形成的合成分布图谱仍然显现出强烈地空间和强度的波动性分布特性<sup>[7,10]</sup>.

文献<sup>[11-12]</sup>利用双路干涉模型以及变值模拟测量系统在不同的量子测量四元数系统的作用下,基于多元概率方法,展现了利用统一的粒子概率统计模型在不同条件下形成单路/双路干涉效果的分布结果.由于多元变量统计长期以来是经典统计的核心部分<sup>[13-15]</sup>,而条件概率方法在经典的 Bayes 统计模型中起到基础支撑作用<sup>[13-15]</sup>.

本文利用另一种经典概率测量模型——条件概率测量模型,对相关的量子交互作用模式进行研究.

文中显示的统计分布结果对理解和解析第一类和第二类经典干涉实验结果有基础性的帮助.在条件概率模型条件下,不同的直方图统计分布通常都会具有强烈的内蕴空间波动特性.

## 1 条件概率变值模拟系统

### 1.1 测量模型

相关的基本测量原理和模型参见文献<sup>[11-12]</sup>,针对条件概率测量模型,模拟系统由图 1 描述.

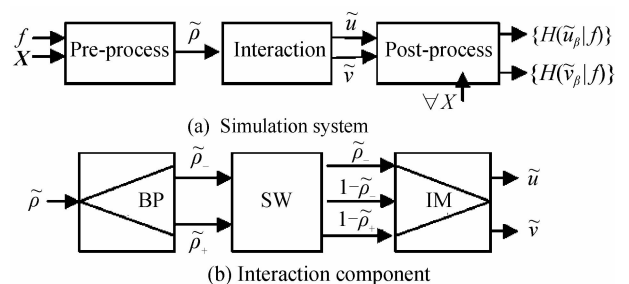


图 1 条件概率变值测量模拟系统  
Fig. 1 Conditional variant simulation system model

对  $N$  元 0-1 向量  $\mathbf{X}$  和给定函数  $f$ ,通过  $2^N$  遍迭代处理后,条件概率变值测量形成 2 组直方图,模拟系统在图 1 中给出.

在图 1(a)中,条件概率模拟系统由三个核心模块组成:预处理、交互处理和后处理.  $N$  元向量  $\mathbf{X}$  和

函数  $f$  作为预处理模块的输入,形成条件概率复合信号  $\tilde{\rho}$ . 流经交互处理模块,输出两组信号  $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$ ,  $\tilde{u}$  为对称信号组,  $\tilde{v}$  为反对称信号组. 所有的  $N$  元向量的穷举状态通过  $2^N$  次迭代之后,测量数据在后处理模块中一共形成 8 个直方图:4 个由对称信号生成,其余的 4 个由反对称信号生成.

在图 1(b)中,交互作用模块包含三个子功能模块:BP,SW,IM 进行信号处理. 条件概率复合信号  $\tilde{\rho}$  通过 BP 作用后,输出成对条件概率信号  $\{\tilde{\rho}_-, \tilde{\rho}_+\}$ ; SW 模块转换成对信号为四元组  $\{\tilde{\rho}_-, 1-\tilde{\rho}_-, 1+\tilde{\rho}_+, \tilde{\rho}_+\}$ , 然后通过 IM 模块作用形成具有对称/反对称特性的两组输出信号  $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$ .

1.2 测量公式

对给定  $N$  元 0-1 向量  $\mathbf{X}$  和函数  $f$ ,在  $\Delta$  算符作用的测量下

$$\Delta f(\mathbf{X}) = \langle N_{\perp}, N_+, N_-, N_T \rangle \tag{1}$$

$$N_0 = N_{\perp} + N_+, N_1 = N_- + N_T, N = N_0 + N_1$$

利用该类四元组分量,条件概率复合信号可通过下列公式得出

$$\tilde{\rho} = \langle \tilde{\rho}_{\perp}, \tilde{\rho}_+, \tilde{\rho}_-, \tilde{\rho}_T \rangle \tag{2}$$

$$\tilde{\rho}_{\perp} = \frac{N_{\perp}}{N_0}, \tilde{\rho}_+ = \frac{N_+}{N_0}, \tilde{\rho}_- = \frac{N_-}{N_1}, \tilde{\rho}_T = \frac{N_T}{N_1}$$

$$0 \leq \tilde{\rho}_{\alpha} \leq 1, \alpha \in \{\perp, +, -, T\}$$

选择信号对  $\{\tilde{\rho}_-, \tilde{\rho}_+\}$ , 输出信号  $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$  及其分

量由下列公式确定

$$\tilde{u} = \langle \tilde{u}_0, \tilde{u}_+, \tilde{u}_-, \tilde{u}_1 \rangle = \langle \tilde{u}_{\beta} \rangle \beta \in \{0, +, -, 1\} \tag{3}$$

$$\tilde{v} = \langle \tilde{v}_0, \tilde{v}_+, \tilde{v}_-, \tilde{v}_1 \rangle = \langle \tilde{v}_{\beta} \rangle; \tag{4}$$

$$\tilde{u}_0 = \tilde{\rho}_- \oplus \tilde{\rho}_+, \tilde{v}_0 = (1-\tilde{\rho}_-)/2 \oplus (1+\tilde{\rho}_+)/2;$$

$$\tilde{u}_+ = \tilde{\rho}_+, \tilde{v}_+ = (1+\tilde{\rho}_+)/2;$$

$$\tilde{u}_- = \tilde{\rho}_-, \tilde{v}_- = (1-\tilde{\rho}_-)/2;$$

$$\tilde{u}_1 = (\tilde{\rho}_- + \tilde{\rho}_+)/2, \tilde{v}_1 = (1-\tilde{\rho}_- + \tilde{\rho}_+)/2$$

在公式中  $0 \leq \tilde{u}_{\beta}, \tilde{v}_{\beta} \leq 1, \beta \in \{0, +, -, 1\}$ ,  $\oplus$  为异步加算符,  $+$  为同步加算符.

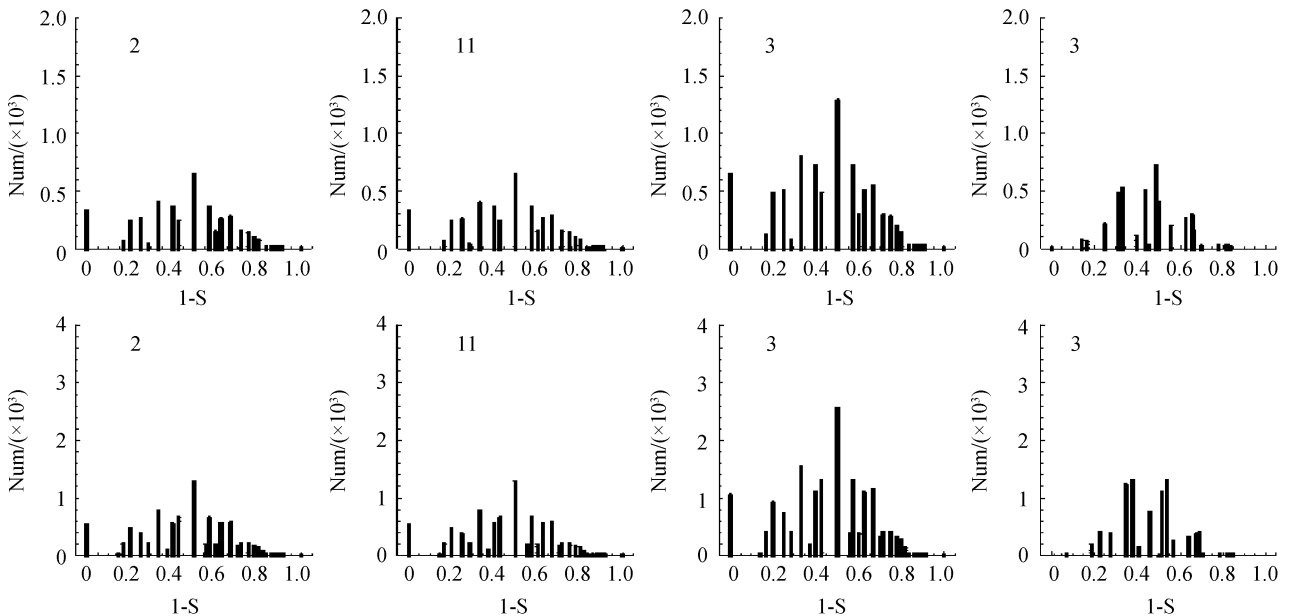
利用  $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$  信号, 每个  $\tilde{u}_{\beta}(\tilde{v}_{\beta})$  确定直方图上的一个点, 在完成了  $2^N$  组数据测量之后, 生成  $\{H(\tilde{u}_{\beta}|f)\}, \{H(\tilde{v}_{\beta}|f)\}, \beta \in \{0, +, -, 1\}$ , 输出对应的四个对称/反对称直方图分布.

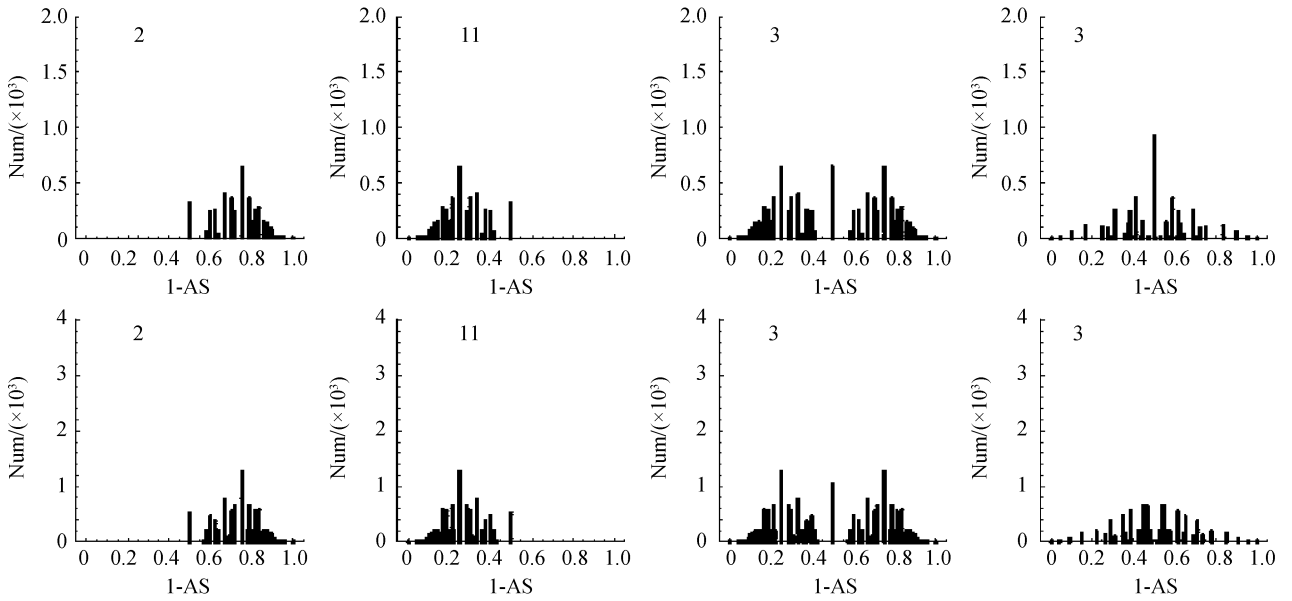
2 模拟结果

利用条件概率变值模拟系统, 可以获得一系列输出结果. 在本文中, 选择参量  $N = \{12, 13\}, n = 2, j = 0, \{f = 3, f_+ = 11, f_- = 2\}$  和  $\{f = 6, f_+ = 14, f_- = 2\}$  所输出的结果, 分布对应左路, 右路, 双路粒子和双路波动及其对称和非对称基元输入条件下形成的系列结果. 为方便比较, 分别在图 2 和图 3 中给出两族输出结果.

N	Left path	Rght path	Double-particle	Double-wave	Conditions
12	$H(\tilde{u}_+   f)$	$H(\tilde{u}_-   f)$	$H(\tilde{u}_0   f)$	$H(\tilde{u}_1   f)$	Symmetric meta distributions
13	$H(\tilde{u}_+   f)$	$H(\tilde{u}_-   f)$	$H(\tilde{u}_0   f)$	$H(\tilde{u}_1   f)$	$H(u_+   f) = H(u_-   f)$
12	$H(\tilde{v}_+   f)$	$H(\tilde{v}_-   f)$	$H(\tilde{v}_0   f)$	$H(\tilde{v}_1   f)$	Anti-symmetric meta distributions
13	$H(\tilde{v}_+   f)$	$H(\tilde{v}_-   f)$	$H(\tilde{v}_0   f)$	$H(\tilde{v}_1   f)$	$H(v_+   f) = H(1-v_-   f)$

(a) Statistical histogram patterns





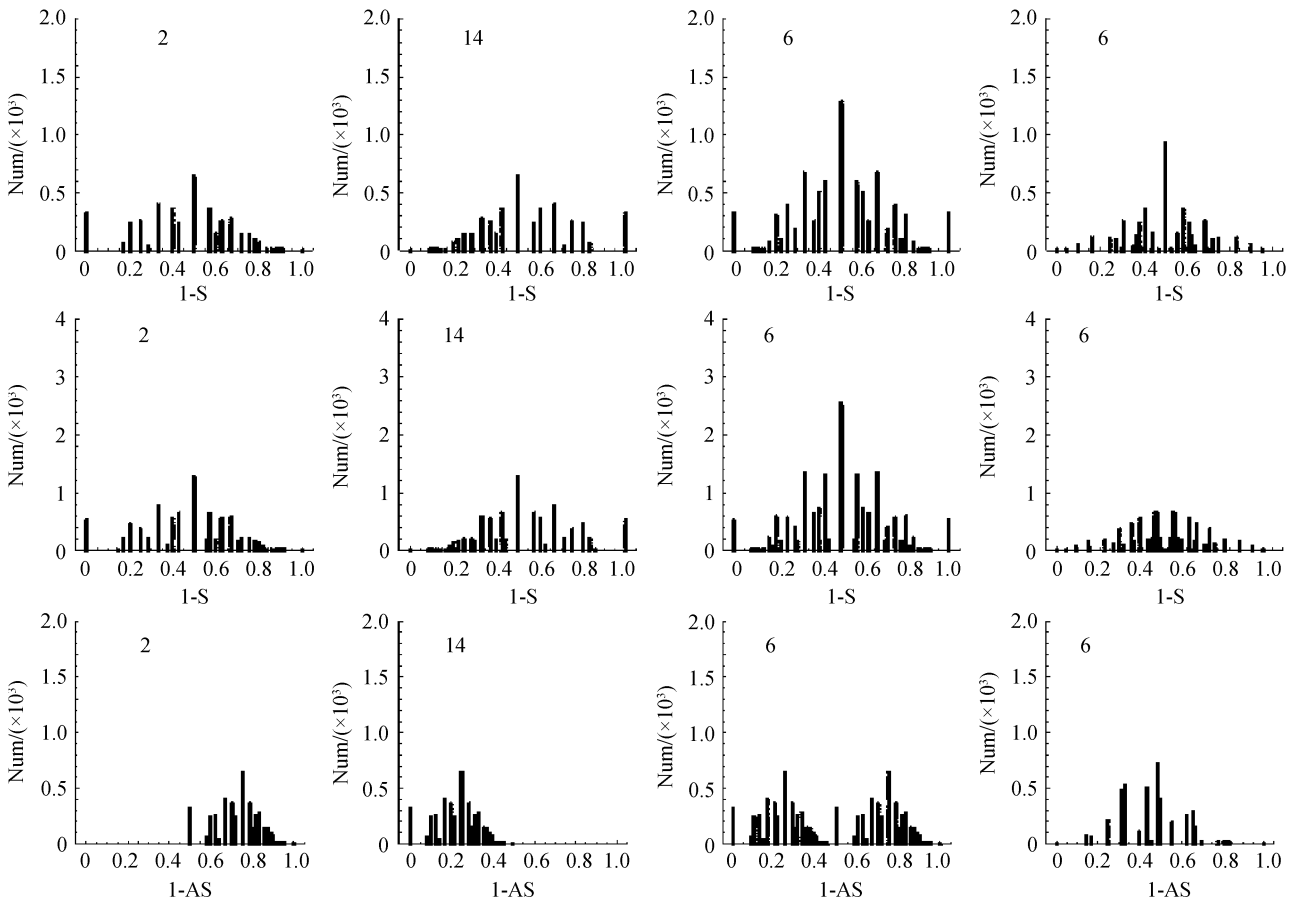
(b)  $N=\{12,13\}, f=3$ , histograms of symmetric meta distributions

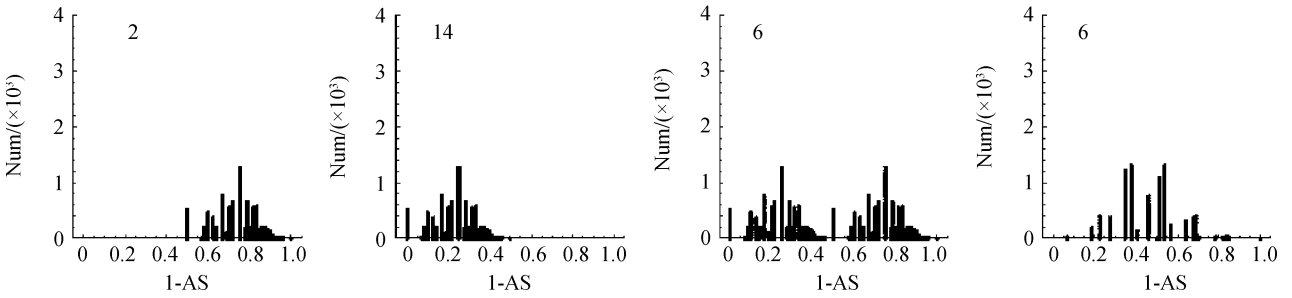
图 2 对称基元分布统计结果

Fig. 2 Results of symmetric meta distributions

$N$	Left path	Rght path	Double-particle	Double-wave	Conditions
12	$H(\tilde{u}_+   f)$	$H(\tilde{u}_-   f)$	$H(\tilde{u}_0   f)$	$H(\tilde{u}_1   f)$	Non-symmetric meta distributions
13	$H(\tilde{u}_+   f)$	$H(\tilde{u}_-   f)$	$H(\tilde{u}_0   f)$	$H(\tilde{u}_1   f)$	$H(u_+   f) \neq H(u_-   f)$
12	$H(\tilde{v}_+   f)$	$H(\tilde{v}_-   f)$	$H(\tilde{v}_0   f)$	$H(\tilde{v}_1   f)$	Non-anti-symmetric meta distributions
13	$H(\tilde{v}_+   f)$	$H(\tilde{v}_-   f)$	$H(\tilde{v}_0   f)$	$H(\tilde{v}_1   f)$	$H(v_+   f) \neq H(1-v_-   f)$

(a) Statistical histogram patterns





(b)  $N=\{12,13\}, f=6$ , histograms of non-symmetric meta distributions

图 3 非对称基元分布统计结果  
Fig. 3 Results of non-symmetric meta distributions

图 2(a)在对称基元  $H(\tilde{u}_+ | f) = H(\tilde{u}_- | f)$  分布条件下,给出输出结果.图 2(b)中,显示由 16 个直方图组成的四组结果.

图 3(a)在非对称基元  $H(\tilde{u}_+ | f) \neq H(\tilde{u}_- | f)$  分布条件下,给出对应的结果排列模式,在图 3(b)中,给出由 16 个直方图组成的四组结果.

### 3 结果分析

#### 3.1 可视化分布

在  $H(\tilde{u}_+ | f) = H(\tilde{u}_- | f)$  条件下,  $\{H(\tilde{u}_1 | f), H(\tilde{v}_1 | f)\}$  都显示出明显的干涉效应,从对称性的角度,  $H(\tilde{v}_1 | f)$  在奇和偶时显现出不同的对称特性.

对于  $H(\tilde{u}_+ | f) \neq H(\tilde{u}_- | f)$  的情况,所显现的合成谱具有  $H(\tilde{u}_+ | f) = H(1 - \tilde{u}_- | f)$  的特点,这样的反射不变特征使得所形成的合成谱中  $H(\tilde{u}_1 | f)$  显现的对称特性明显优于  $H(\tilde{v}_1 | f)$  的情形.

#### 3.2 单双峰效应

在  $f=3$  的情况下,当  $N$  为偶数时,  $H(\tilde{v}_1 | f)$  显现出单峰,而在奇数时有双峰.所对应的  $H(\tilde{u}_1 | f)$ ,当  $N$  为偶数时,中间单峰较明显.

在  $f=6$  的情形中,  $N$  为偶数,  $H(\tilde{u}_1 | f)$  显现单峰,为奇数时有双峰.相对  $H(\tilde{v}_1 | f)$ ,其峰的分布特性不像  $H(\tilde{u}_1 | f)$  那样明显.

#### 3.3 双路粒子统计分布

对所有对称和非对称情况,在异步加算符  $\oplus$  的作用下,信号满足  $0 \leq \tilde{u}_0, \tilde{v}_0, \tilde{u}_-, \tilde{v}_-, \tilde{u}_+, \tilde{v}_+ \leq 1$ ,检查不同条件下  $\{H(\tilde{u}_0 | f), H(\tilde{v}_0 | f)\}$  系列分布都有

$$H(\tilde{u}_0 | f) = H(\tilde{u}_- | f) + H(\tilde{u}_+ | f) \quad (5)$$

$$H(\tilde{v}_0 | f) = H(\tilde{v}_- | f) + H(\tilde{v}_+ | f) \quad (6)$$

式(5)和(6)对给定的  $N, n$  取值都成立.

#### 3.4 双路波动干涉模式

由于  $f=3$  和  $f=6$  在条件概率测量的条件下具有反射对称的特点,可以从  $H(\tilde{u}_1 | f=3) = H(\tilde{v}_1 | f=6)$  看到.对于  $N = \{12, 13\}$  的不同情况,形成四

种不同输出序列.不同信号满足  $0 \leq \tilde{u}_0, \tilde{v}_0, \tilde{u}_-, \tilde{v}_-, \tilde{u}_+, \tilde{v}_+ \leq 1$ ,从相关直方图分布比较的角度,可以观察到式(7)和(8)不等关系成立

$$H(\tilde{u}_1 | f) \neq H(\tilde{u}_- | f) + H(\tilde{u}_+ | f) = H(\tilde{u}_0 | f) \quad (7)$$

$$H(\tilde{v}_1 | f) \neq H(\tilde{v}_- | f) + H(\tilde{v}_+ | f) = H(\tilde{v}_0 | f) \quad (8)$$

#### 3.5 条件概率波动分布模式

同大多数多变量概率函数典型分布展现的钟形分布特性完全不同.所有  $\{\tilde{u}_0, \tilde{v}_0, \tilde{u}_-, \tilde{v}_-, \tilde{u}_+, \tilde{v}_+, \tilde{u}_1, \tilde{v}_1\}$  相关的  $\{H(\tilde{u}_\beta | f), H(\tilde{v}_\beta | f)\}, \beta \in \{0, +, -, 1\}$ ,形成的分布都是波动的,在任何一个指定的统计分布中都能看到明显的波动特性.无论是基本的条件概率信号,还是相关的对称/反对称信号,以及依据对称/反对称信号组合最终形成的 16 个不同的分布,条件概率统计具有波动分布特性对于任意的  $n$  和  $N$  数值都成立.

这类分布特性从一个侧面显现了在离散统计的条件概率量子相互作用分布中,存在着内蕴的波动分布特征.这样的分布模式值得注意,特别是在对解释低强度,长时间单量子相互作用分布图像模态进行解析时,需要考虑由于条件概率量子交互作用形成的内蕴波动分布特性<sup>[8,11]</sup>.

### 4 结论

变值测量结构,在不同的概率测度条件下会形成分布特性完全不同的统计分布结构.从本文给出的对称和非对称两类例子中,可以看到在同步/异步、对称/反对称的作用下,条件概率测量模拟系统能针对左路、右路、双路粒子和双路波动交互作用条件形成两类 8 种不同的统计分布.该类交互模式,从不同的侧面显现了双路粒子同左/右路异步加算符信号之间的直接耦合关系,以及左/右路同步加算符信号与双路波动之间的干涉输出关系.

由于在条件概率测量信号的作用下,不同的分布所形成的统计分布都没有典型 Gauss 分布和 Poisson 分布趋于中间大,两边小的经典钟形统计分

布特性. 尽管在不同的作用序列下, 相关的分布显现出对称状态, 但是其内蕴分布的波动性显现了条件概率测量体系同经典的多元概率测量体系有本质的区别. 这类内蕴的波动统计分布特性需要在不同的粒子及波动相互作用条件下充分地考虑.

尽管不同的基本测量信号统计和合成测量信号统计, 都具有内蕴的波动分布特性. 但是在条件概率测量体系下, 单路/双路、粒子和波动的区别非常明晰, 可以从中看到 Feynman 提炼的经典和量子统计之间的区别, 统计判据直接从直方图分布中即可区分. 这类特性从基础层面显示了波/粒二重性的怪异特性, 可以通过粒子性的模型完整描述. 进一步地深入探讨在什么条件下, 所选择的具体作用量子交互作用需要满足的特定条件将会成为下一阶段研究的中心议题.

#### 参考文献

- [1] ROSTRON R J, HOMER A, ROBERTS G. Wave-particle duality of broadband light[J]. *Journal of Modern Optics*, 2006, **53**(11): 1647-1661.
- [2] ZHAO H, UJIHARA K. Interference effects in the spontaneous emission from two initially excited atoms[J]. *Journal of Modern Optics*, 2006, **53**(5-6): 835-855.
- [3] KRYUKOV A A. On the measurement problem for a two-level quantum system[J/OL]. *Foundation of Physics*, 2007, **37**(3): 0704, 1934.
- [4] LUNDEEN J S, MITCHELL M W, STEINBERG A M, *et al.* A double-slit 'which-way' experiment on the complementarity - uncertainty debate[J]. *New Journal of Physics*, 2007, **9**: 287.
- [5] CARTLIDGE E. A quantum take on certainty[J]. *Nature News*, 2011, 344, doi:10.1038.
- [6] ZHOU Wang, CHEN Lin-sen, YE Yan. Confocal optical sensor for detecting weak light of ir up-conversion ink[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(7): 814-817. 周望, 陈林森, 叶燕. 共焦光学传感头用于红外上转换油墨的微弱光检测[J]. *光子学报*, 2004, **33**(7): 814-817.
- [7] CHEN Yong-Fan, TSAI Zen-hsiang, LIU Yu-chen, *et al.* Low-light-level photon switching by quantum interference[J]. *Optics Letters*, 2005, **30**(23): 3207-3209. doi:10.1364/OL.30.003207.
- [8] MA Yun-zen, LIU Hong-jun, ZHAO Wei. Parametric amplification characteristics of weak image[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2008, **37**(9): 1769-1773. 马云振, 刘红军, 赵卫. 微弱光学图像的光参量放大特性的研究[J/OL]. *光子学报*, 2008, **37**(9): 1769-1773.
- [9] DAWES A M C. Using transverse optical patterns for ultra-low-light all-optical switching [D]. Duke University, 2008. <http://www.phy.duke.edu/research/photon/qelectron/pubs/ADawesThesis.pdf>
- [10] LO Hsiang-yu, SU Po-ching, CHEN Yong-fan. Low-light-level cross-phase modulation by quantum interference[J]. *Physics Review*, 2010, **A81**: 053829.
- [11] ZHENG Z J (Jeffrey), ZHENG H H (Chris). Variant measures and visualized statistical distributions [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2011, **40**(9): 1397-1404. 郑智捷, 郑昊航. 变值测量结构及其可视化统计分布[J]. *光子学报*, 2011, **40**(9): 1397-1404.
- [12] ZHENG Jeffrey. Synchronous properties in quantum interferences[J]. *Journal of Computations & Modelling*, 2011, **1**(1): 73-90.
- [13] 徐传胜. 从博弈问题到方法论学科研究 [M]. 北京: 科学出版社, 2010.
- [14] 陈希孺. 数理统计学简史[M]. 长沙: 湖南教育出版社, 2000.
- [15] ASH R B, DOLEANS-DADE C A. Probability & measure theory[M]. Elsevier, 2000.

## Conditional Probability Statistical Distributions in Variant Measurement Simulations

ZHENG Jeffrey

(School of Software, Yunnan University, Kunming 650091, China)

**Abstract:** Two quantum interactive experiments are shown in strong wave-like interference properties, ie Young double slit experiment and very lower intensive and very long time explosin experiment for quanta. This paper is based on a classical statistic scheme: Bayes statistics on Conditional Probability to propose conditional probability measurements and relevant statistical models to visualized complex properties of their interactions. Variant measurement simulation model is established and corresponding measuring equations and parameters are formulated. Two typical cases are selected and each time has corresponding to four groups of results in 16 histograms. Under this construction, it is feasible to understand the intrinsic wave-like properties of quantum interactions. Under the conditional probability model, intrinsic wave-like statistical distributions are observed on both normal conditions and interferenced conditions in their spatial statistical distributions respectively.

**Key words:** Conditional probability; Statistical distribution; Wave-like; Interference