

文章编号:1004-4213(2011)10-1566-5

# 基于强度传输方程的相位检索

程鸿,章权兵,韦穗,沈川

(安徽大学 计算智能与信号处理教育部重点实验室,合肥 230039)

**摘 要:**为了从直接测量的强度图像中计算出相位信息,研究了基于强度传输方程的相位检索技术.设计了一个实用的相位检索系统,包含经典傅里叶相位检索和基于整体变分的相位检索算法.通过测量聚焦平面和前后散焦平面光波场的空间强度,求解二阶微分方程得到相位.与迭代相位检索技术相比克服了其迭代不确定性、收敛速度慢等缺点.实验表明,利用强度传输方程检索相位的方法可以有效快速地从强度图像中计算出相位;整体变分算法相比傅里叶算法,在恢复相位的同时可以保持良好的边缘.

**关键词:**强度传输方程;迭代相位检索;傅里叶;整体变分

**中图分类号:**O439

**文献标识码:**A

**doi:**10.3788/gzxb20114010.1566

## 0 引言

振幅、波长和相位是光波三个重要特性,其中相位特性中包含了物体的深度和形状等信息.但在进行强度(振幅的平方)测量时,有关相位的信息被丢失了,也就是说目前通过 CCD 摄像机、胶卷等检测器只能直接测量光波场的强度,但不能直接测量波场的相位,为了得到深度信息需要对数据进行复杂的转换和处理.诺贝尔奖得主 Gabor 提出可以用干涉法从强度测量中恢复波阵面,并且已经应用在显微、天文、数字水印等领域中<sup>[1-2]</sup>.但是干涉法要求光源的空间和时间连续,由此会造成一系列分辨率、敏感性等问题.除了干涉测量法以外,还存在迭代算法和基于强度传输方程(Transport-of-Intensity Equation, TIE)的非干涉求解方法.

迭代算法中的经典是 Gerchberg 和 Saxton 提出的在目标域和频域交替迭代的计算方法(Gerchberg-Saxton, GS)<sup>[3]</sup>.随后, Fienup 提出了错误减少算法(Error Reduction algorithm, ER)<sup>[4]</sup>,主要思想是在每一次迭代图像的像素或数据的当前估计值被设置为符合先验的约束.如果当前的估计是负的或在支撑域外,那么对应的像素值被设置为零,其它的值保留,傅里叶幅度设置为它们的测量值.迭代算法在全息显示<sup>[5]</sup>、相关器的鉴别等领域有着广泛的应用<sup>[6]</sup>.不过,该类算法具有迭代不确定性、抗噪性能差、收敛速度慢等缺点<sup>[7-8]</sup>.与迭代算法不同

的是基于强度传输方程的相位检索方法,最初由 Teague 在 1983 年提出<sup>[9]</sup>.目前在 X 射线相位重构,电子显微镜和光学显微镜成像等领域有着广泛的应用<sup>[10-12]</sup>.

本文设计了一个实用的基于强度传输方程的相位检索系统,该系统包含了经典的傅里叶相位检索算法<sup>[13]</sup>和基于整体变分的相位检索算法<sup>[14]</sup>.文中给出了利用强度传输方程求解相位的详细推导过程和系统的相关实验结果.

## 1 基本原理

### 1.1 强度传输方程

当平面波通过试片,与试片作用后,波的前进方向会有所改变,最后在成像平面上形成强度的分布变化,即强度或增强或减弱.而在这些影像波强度分布变化中,包括了相位变化以及振幅变化的信息.考虑一束沿 Z 轴传播的单色波

$$E(x, y, z) = \sqrt{I(x, y, z)} \exp \{ ikz + i\varphi(x, y, z) \} \quad (1)$$

式中  $I(x, y, z)$  和  $\varphi(x, y, z)$  分别表示波的强度和相位,  $k$  是波数,与波长  $\lambda$  之间满足  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $z$  是传播距离.将式(1)代入亥姆霍兹方程得到其标量形式

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0 \quad (2)$$

因为

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1}{2} I^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial I}{\partial x} \exp \{ ikz + i\varphi \} +$$

$$I^{\frac{1}{2}} \exp \{ ikz + i\varphi \} i \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

(3)

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -$$

**基金项目:**国家自然科学基金(No. 60872106, 41001244)、安徽省高校省级自然科学基金项目(No. KJ2011B131)和安徽大学青年科学研究基金资助

**第一作者:**程鸿(1981-),女,讲师,博士研究生,主要研究方向为计算信号处理. Email: chenghong@ahu.edu.cn

**导师(通讯作者):**韦穗(1946-),女,教授,主要研究方向为计算视觉. Email: swei@ahu.edu.cn

**收稿日期:**2011-04-13; **修回日期:**2011-06-03

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} I^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \omega + \frac{1}{2} I^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \omega + \\ & \frac{1}{2} I^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \omega i + \frac{1}{2} I^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \omega i + \\ & I^{\frac{1}{2}} \left( i \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \omega i + I^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \omega i \end{aligned} \quad (4)$$

式中,  $\omega = \exp \{ ikz + i\varphi \}$ .

同理可得,  $\frac{\partial E}{\partial y}, \frac{\partial E}{\partial z}, \frac{\partial^2 E}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}$  的类似形式. 式

(2) 展开式可以写成

$$\begin{aligned} & i I^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i I^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial I}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i I^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial I}{\partial z} \left( k + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \\ & i I^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)两边同乘  $I^{\frac{1}{2}}$  并忽略  $\frac{\partial I}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$  与  $I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$  得

$$\begin{aligned} \nabla I \cdot \nabla \varphi + I \nabla^2 \varphi = -k \frac{\partial I}{\partial z} & \Leftrightarrow \nabla \cdot (I \nabla \varphi) = \\ -k \partial_z I \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)即为强度传输方程, 该方程将光源的强度和相位与以 Fresnel 衍射描述的强度的纵向变化联系在一起. 一方面, 当光学元件导致相位变化时, TIE 可以预知光源的强度调制. 另一方面, TIE 可以用来进行波振面重构. 该方法的优点是只需要测量两个临近空间平面上光波的空间强度, 通过解二阶微分方程也就是用非迭代的确定性算法来重构波的空间相位, 这个平面垂直于波传播的方向. 由于干涉要求光源的空间和时间连续或者是敏感性和分辨率的问题使得在干涉技术效果不好的实验情况下, 基于 TIE 的相位重构特别能引起兴趣<sup>[15]</sup>.

## 1.2 强度微分的求解

使用 TIE 方程时, 其中一个难点问题是如何精确估计对应  $z$  值的强度微分  $\partial_z I$ . 图 1 给出了光强

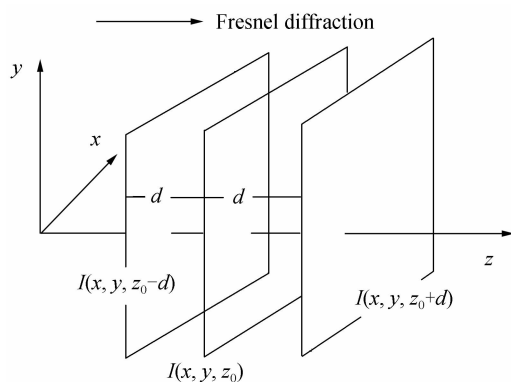


图 1 光强变化图

Fig. 1 Image of intensity changes

变化图, 其中需要测量的三个平面间距都是  $d$ .

首先写出强度  $I(x, y, z_0 + d)$  的泰勒展开式

$$I(x, y, z_0 + d) = I(x, y, z_0) + \frac{\partial I}{\partial z} d + \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} \frac{d^2}{2!} +$$

$$O(d^3) \quad (7)$$

如果简单的用  $I(x, y, z_0 + d) - I(x, y, z_0)$  来近似  $\frac{\partial I}{\partial z} I(x, y, z)$  的值, 误差会达到距离的一阶  $O(d)$ , 值较大. 接着对  $I(x, y, z_0 - d)$  进行泰勒展开, 得到相似的形式

$$\begin{aligned} I(x, y, z_0 - d) = I(x, y, z_0) + \frac{\partial I}{\partial z} (-d) + \\ \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} \frac{(-d)^2}{2!} + O((-d)^3) \end{aligned} \quad (8)$$

最后用式(7)~(8)得

$$\begin{aligned} I(x, y, z_0 + d) - I(x, y, z_0 - d) = \frac{\partial I}{\partial z} (2d) + \\ O(d^2) \end{aligned} \quad (9)$$

即光强变化  $\partial_z I$  可以利用两个临近平面(沿着纵向传播轴的位置  $z_0 + d$  和  $z_0 - d$ ) 上的散焦图像的强度的有限差分近似替代, 同时误差降到了距离的二阶  $O(d^2)$ <sup>[16]</sup>, 即

$$\partial_z I = \frac{I(x, y, z_0 + dz) - I(x, y, z_0 - dz)}{2dz} \quad (10)$$

这种近似要求两幅散焦图像离中心聚焦图像的距离相等. 如果距离不相等, 可以利用式(11)进行计算.

$$\begin{aligned} \frac{\{I(x, y, z_0) - I(x, y, z_0 - d_1)\} (d_2)^2}{d_2 d_1 (d_1 + d_2)} + \\ \frac{\{I(x, y, z_0 + d_2) - I(x, y, z_0)\} (d_1)^2}{d_2 d_1 (d_1 + d_2)} = \\ \partial_z I + O(d_1 d_2) \end{aligned} \quad (11)$$

实验系统选取两幅与聚焦图像距离相等的散焦图像并利用式(10)计算光强变化.

## 2 强度传输方程的求解算法

目前存在多种 TIE 的求解算法, 本系统选取了其中的两种, 经典的傅里叶相位检索算法和本作者提出的基于整体变分的相位检索算法.

### 2.1 傅里叶相位检索算法

Allen 和 Oxley 在文献[13]中提出了傅里叶相位检索算法. 首先设

$$\nabla^2 \phi = -k \partial_z I \quad (12)$$

根据傅里叶理论从式(12)中求得

$$\phi(x, y, z) = F^{-1} q_{\perp}^{-2} F[k \partial_z I(x, y, z)] \quad (13)$$

式中  $F, F^{-1}$  分别表示傅里叶正变换和逆变换,  $q^2 = q_x^2 + q_y^2$ . 由此推出相位值

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = -F^{-1} q_{\perp}^{-2} F\{ \nabla [I^{-1}(x, y, z) \cdot \\ \nabla \phi(x, y, z)] \} \end{aligned} \quad (14)$$

式中等式右边可以再次利用傅里叶理论求解, 即

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) = i \hat{x} F^{-1} q_x F[f(x, y)] + \\ i \hat{y} F^{-1} q_y F[f(x, y)] \end{aligned} \quad (15)$$

算法: 傅里叶相位检索算法.

给定: 一幅聚焦平面强度图像, 两幅与聚焦平面相同距离的散焦图像(一幅欠焦图像和一幅过焦图像), 波长  $\lambda$ , 图像距离  $d$ .

- 1) 利用式(10)计算强度微分  $\partial_z I$ ;
- 2) 式(13)求  $\phi(r_\perp, z)$ ;
- 3) 求解  $\nabla \phi(r_\perp, z)$ ;
- 4) 求解  $\nabla [I^{-1}(r_\perp, z) \nabla \Psi(r_\perp, z)]$ ;
- 5) 由式(14)计算相位.

输出: 相位图像.

## 2.2 基于整体变分的相位检索算法

文献[14]提出了基于整体变分的相位检索算法. 首先利用卷积运算将 TIE 的右边简化成  $\varphi(x, y, z_0) * h(x, y) + \nabla I(x, y, z_0)$  的形式, 其中  $*$  表示

卷积运算,  $h(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  是一个  $3 \times 3$  的卷

积模板. 然后结合式(10)将 TIE 转化成

$$\frac{\pi((I(x, y, z_0 + d) - I(x, y, z_0 - d)))}{\lambda d} - \nabla I(x, y, z_0) = \varphi_h \quad (16)$$

式中记  $\varphi_h = \varphi(x, y, z_0) * h(x, y)$ . 基于整体变分的相位恢复即最小化如下形式的能量泛函(已利用 Lagrange 乘子转为无约束形式)为

$$\min_{\Omega_h} \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega_h} |h * \varphi - \varphi_h|^2 dx dy + \beta \int_{\Omega_h} |\nabla \varphi|^2 dx dy \right) \quad (17)$$

待处理的区域设置为矩形  $\Omega_h$ . 最后使用有限差分牛顿法求出相位的最优解. 该算法最大的特点是在恢复的同时可保持图像良好的边缘信息.

算法: 基于整体变分的相位检索算法.

给定: 一幅聚焦平面强度图像, 两幅与聚焦平面相同距离的散焦图像(一幅欠焦图像和一幅过焦图像), 波长  $\lambda$ , 图像距离  $d$ , 矩形区域的长和宽( $l$  和  $h$ ).

- 1) 利用式(10)计算强度微分  $\partial_z I$ ;
- 2) 由(16)式计算  $\varphi_h$ ;
- 3.) 构建相位的迭代方程寻找相位的最优解, 初始化  $\varphi^{(0)} = I(x, y, z_0)$ ;
- 4) 判断迭代终止条件是否满足, 满足  $\varphi^{(n)}$  为最终解, 不满足  $n = n + 1$  并跳到 3).

输出: 相位图像.

## 3 相位检索系统

本文所设计的相位检索系统包括了‘original images’、‘focus and defocus’和‘phase retrieval algorithm’菜单. 其中‘original images’菜单的功能是生成物体的强度和相位图像或者直接读入实际强度图像, ‘focus and defocus’菜单的功能是模拟 Fresnel 衍射过程获得一幅聚焦图像和两幅与聚焦图像距离相等的散焦图像, ‘phase retrieval algorithm’菜单包括了第 3 节所介绍的两种算法.

### 3.1 使用系统设定的强度和相位图像

步骤 1: 用‘original images’下拉菜单中的‘simulated images of system’子菜单生成强度和相位图像, 见图 2. 其中强度图像设为

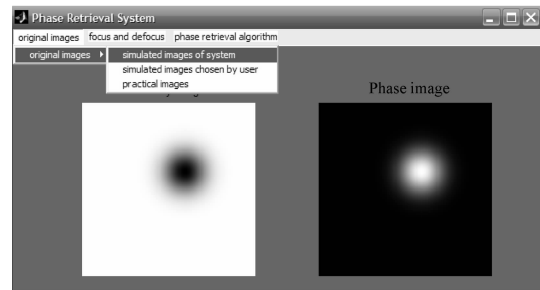


图 2 模拟的强度图像和相位图像

Fig. 2 Simulated intensity and phase images

$$I(x, y) = 1.0 - 0.9(\exp(-b^2((x-x_1)^2 + (y-y_1)^2))) - 0.9(\exp(-b^2((x-x_2)^2 + (y-y_2)^2)))$$

式中图像分辨率设为  $M \times N$ , 中心点  $x_1 = x_2 = M/3, y_1 = y_2 = N/2$ , 相位图像与强度图像之间满足关系  $\varphi(x, y) = 0.95(2\pi(1.0 - I(x, y))/0.9 - \pi)$ . 实验中系数  $b = 0.043$ , 分辨率  $193 \times 193$ , 波长  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ .

步骤 2: 用‘focus and defocus’下拉菜单中的‘simulated images of system’子菜单生成聚焦图像、过焦图像和欠焦图像, 距离  $d = 1.0 \text{ mm}$ , 见图 3.

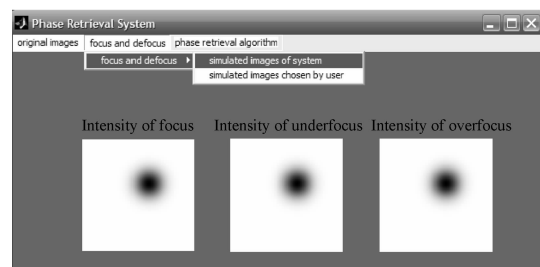


图 3 计算得到的聚焦图像和散焦图像

Fig. 3 Calculated focus and defocus images

步骤 3: 用‘phase retrieval algorithm’下拉菜单

中的‘Fourier’和‘TV’实验结果分别如图 4,图 5. 系统会自动将结果保存到指定文件夹中.

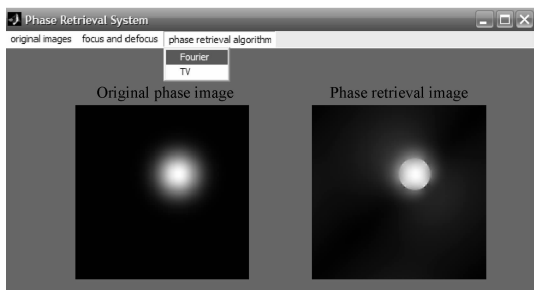


图 4 傅里叶相位检索算法实验结果  
Fig. 4 Result of Fourier phase retrieval algorithm

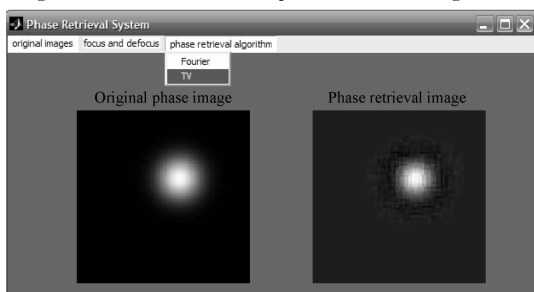


图 5 基于整体变分的相位检索算法实验结果  
Fig. 5 Result of phase retrieval algorithm based on total variation

### 3.2 读入物体的原始强度和相位图像

步骤 1: 用 ‘original images’ 下拉菜单中的 ‘simulated images chosen by user’ 读入物体的强度和相位图像, 见图 6.

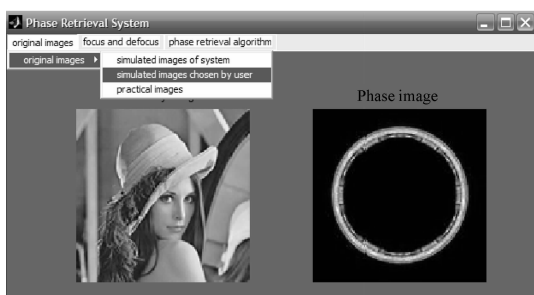


图 6 原物体的强度图像和相位图像  
Fig. 6 Image and phase images of original object

步骤 2: 用 ‘focus and defocus’ 下拉菜单中的 ‘simulated images chosen by user’ 子菜单生成一幅聚焦图像和两幅散焦图像, 见图 7.

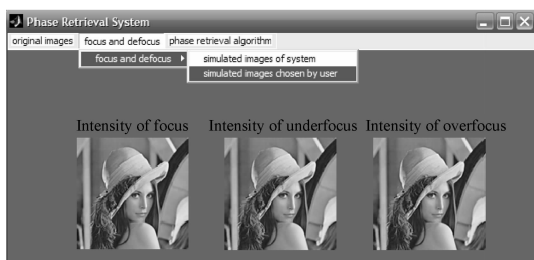


图 7 计算得到的聚焦图像和散焦图像  
Fig. 7 Calculated focus and defocus images

步骤 3: 用 ‘phase retrieval algorithm’ 下拉菜单中的 ‘Fourier’ 和 ‘TV’ 菜单分别计算相位信息. 实验结果分别如图 8 和图 9.

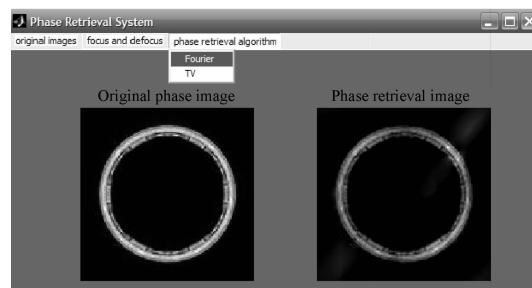


图 8 傅里叶相位检索算法实验结果  
Fig. 8 Result of Fourier phase retrieval algorithm

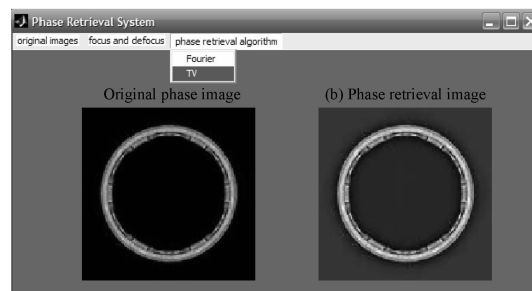


图 9 基于整体变分的相位检索算法实验结果  
Fig. 9 Result of phase retrieval algorithm based on total variation

模拟实验显示, 利用强度传输方程检索相位的方法可以有效快速地从强度图像中计算出相位. 另一方面, 基于整体变分的算法相比傅里叶算法, 在恢复相位的同时可以保持良好的边缘.

### 3.3 实际图像测试

步骤 1: 用 ‘original images’ 下拉菜单中的 ‘practical images’ 读入实际物体硅藻的欠焦图像、聚焦图像和过焦图像. 对应的波长  $\lambda = 10 \text{ nm}$ , 距离  $d = 2000 \mu\text{m}$ . 图像来自网站 <http://www.iatia.com.au/>, 如图 10.

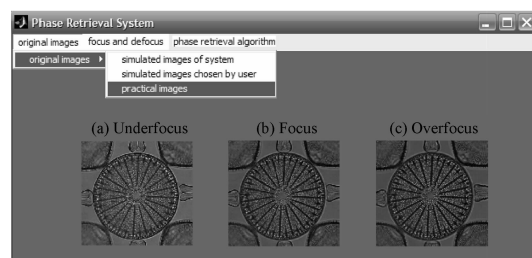


图 10 实际硅藻的聚焦图像和散焦图像  
Fig. 10 Practical focus and defocus images of diatom

步骤 2: 用 ‘phase retrieval algorithm’ 下拉菜单中的 ‘Fourier’ 和 ‘TV’ 菜单分别计算相位信息. 实验结果分别如图 11(a)和(b).

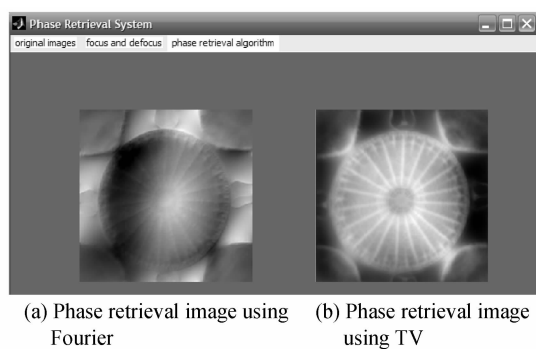


图 11 相位检索算法实验结果

Fig. 11 Result of retrieval algorithm

## 4 结论

本文用 Matlab 设计了一个包含了傅里叶相位检索算法和论文作者提出的基于整体变分的相位检索算法的相位检索系统. 用户既可以使用系统设定的强度和相位图像模式, 也可以自由选择适合的图像模式. 文中分别给出了相应的实验结果.

### 参考文献

- [1] DING Ling-yan, WU Yu-lie, LI Sheng-yi. Surface measurement for long focal length mirror with phase retrieval [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2010, **39**(8): 1431-1437.  
丁凌艳, 吴宇列, 李圣怡. 相位恢复测量长焦距镜面[J]. *光子学报*, 2010, **39**(8): 1431-1437.
- [2] CHEN Da-qing, GU Ji-hua, TAO Zhi. Audio watermarking based on phase retrieval algorithm and digital holography[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2009, **38**(12): 3333-3338.  
陈大庆, 顾济华, 陶智. 基于相位恢复和数字全息的音频水印[J]. *光子学报*, 2009, **38**(12): 3333-3338.
- [3] GERCHBERG R W, SAXTON W O. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures[J]. *Optik*, 1972, **35**(2): 237-246.
- [4] FIENUP J R. Phase retrieval algorithms: A comparison[J]. *Applied Optics*, 1982, **21**(15): 2758-2769.
- [5] CHEN Xiu-shan, LI En-pu, ZHAO Jian-lin, et al. Measurement and reconstruction of 3D acoustic standing wave field using digital holographic interferometry [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2010, **39**(1): 95-99.
- [6] LIU Hong-li, WANG Zhao-qi, GUO Zhan-cheng, et al. Phase-shifting technique and iterative technique applied to SDF joint transform correlator[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2005, **34**(8): 1153-1155.  
刘宏利, 王肇圻, 郭占城, 等. 应用相移技术和迭代算法的综合鉴别联合变换相关器[J]. *光子学报*, 2005, **34**(8): 1153-1155.
- [7] GUREYEV T E, POGANY A, PAGANIN D M, et al. Linear algorithms for phase retrieval in the Fresnel region[J]. *Optics Communications*, 2004, **231**(1-6): 53-70.
- [8] ZENG Fa, TAN Qiao-feng, WEI Xiao-feng, et al. A phase retrieval algorithm for complex optical field [J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2006, **33**(3): 339-342.  
曾发, 谭峭峰, 魏晓峰, 等. 一种可对复杂光场进行相位恢复的算法[J]. *中国激光*, 2006, **33**(3): 339-342.
- [9] TEAGUE M R. Deterministic phase retrieval: A Green's function solution[J]. *Optical Society of America*, 1983, **73**(11): 1434-1441.
- [10] FU Jian, LI Jian, ZHU Jian, et al. X-Ray phase-contrast imaging methods for biological structures [C]. The 2nd International Conference on BMEI '09, 2009: 1-3.
- [11] BAJT S, BARTY A, NUGENT K A, et al. Quantitative phase-sensitive imaging in a transmission electron microscope [J]. *Ultramicroscopy*, 2000, **83**(1-2): 67-73.
- [12] CHENG Hong, LIU Hong, ZHANG Quanbing, et al. Phase retrieval using the transport-of-intensity equation[C]. Fifth International Conference on Image and Graphics, 2010: 417-421.
- [13] ALLEN L J, OXLEY M P. Phase retrieval from series of images obtained by defocus variation [J]. *Optics Communications*, 2001, **199**(1-4): 65-75.
- [14] CHENG Hong, ZHANG Quan-bing, WEI Sui. Phase retrieval based on total variation[J]. *Journal of Image and Graphics*, 2010, **15**(10): 1425-1429.  
程鸿, 章权兵, 韦穗. 基于整体变分的相位恢复[J]. *中国图象图形学报*, 2010, **15**(10): 1425-1429.
- [15] DORRER C, ZUEGEL J D. Optical testing using the transport-of-intensity equation[J]. *Optics Express*, 2007, **15**(12): 7165-7175.
- [16] ISHIZUKA K, ALLMAN B. Phase measurement in electron microscopy using the transport of intensity equation [J]. *Microscopy Today*, 2005, **13**: 22-24.

## Phase Retrieval Based on Transport-of-intensity Equation

CHENG Hong, ZHANG Quan-bi, WEI Sui, SHEN Chuan

(Key Laboratory of Intelligent Computing & Signal Processing (Ministry of Education), Anhui University, Hefei 230039, China)

**Abstract:** Phase retrieval based on the transport-of-intensity equation is researched to calculate phase information from the intensity measurement. A practical phase retrieval system is designed including classic Fourier phase retrieval algorithm and phase retrieval algorithm based on the total variation. Only measurements of the spatial intensity of the optical wave in focal plane and defocus plane around are needed to retrieval the phase by solving a second-order differential equation. Phase retrieval based on the transport-of-intensity equation overcomes the disadvantages of iteration uncertainty and slow convergence compared with the iterative phase retrieval technique. The experimental results show that the phase retrieval based on the transport-of-intensity equation is able to quickly and effectively calculate phase information from the intensity measurement, and information in edge is remained at the same time of phase retrieval based on the total variation compared to Fourier algorithm.

**Key words:** Transport-of-intensity equation; Iterative phase retrieval; Fourier; Total variation