

文章编号:1004-4213(2011)10-1464-5

电光双稳态系统的混沌特性分析

赵振华¹, 张胜海¹, 杨华¹, 谭建峰¹, 张丹²

(1 解放军信息工程大学 理学院 数理系, 郑州 450001)

(2 郑州供电公司, 郑州 450000)

摘 要:从理论上分析了电光双稳态系统的稳定性,通过图解方式研究了各不动点的稳定性.用数值求解的方法,确定了分岔点的具体位置,分析了该系统是经过倍周期分岔和阵发混沌途径产生混沌.数值模拟由系统状态随参量变化的分岔图和最大李雅普诺夫指数随参量的变化关系,表明本文的理论分析结果是完全自洽的.

关键词:电光双稳态;混沌;稳定性;图解方式

中图分类号:O437

文献标识码:A

doi:10.3788/gzxb20114010.1464

0 引言

1969年由Szöke等人最早提出光学双稳态^[1-2],1975年Gibbs等人用钠蒸汽作为非线性色散介质首次试验上实现了光学双稳态^[1].由于它在全光通信、光开关、光检测、光逻辑门、光信息存储、光计算机等领域具有十分重要的作用,因此对光学双稳态系统的研究一直受到人们的广泛关注^[3-7].光学双稳态可分为全光学型双稳态和混合型光学双稳态^[8],混合型光学双稳装置结构简单,在实验上易于实现,是研究混沌有力的试验装置.近年来基于声光混合型光学双稳系统的混沌特性、混沌控制和混沌同步研究备受关注^[9-13],但是对于电光混合型双稳态系统的研究相对较少.

1983年Gao等人对电光双稳态系统的动力学特性进行了研究^[14],F. A. Hopf等人对电光双稳态系统混沌特性进行了研究^[15],Zhang Ying等人对电光双稳态系统混沌控制进行了研究^[16],牛永迪等人对电光双稳态系统混沌控制和同步进行了研究^[17],但目前已有的工作都是基于输入光强调节所产生的电光双稳态系统混沌进行的研究,对于由系统参量变化而导致系统产生混沌的研究尚未发现.本文分析了由系统参量变化而引起的电光双稳态系统的不稳定性,采用图解方式研究了不动点的稳定性,并且分析了系统混沌经倍周期分岔和阵发混沌途径产生.

1 电光双稳态系统的动力学方程

电光双稳态系统的动力学方程表达式为^[16-17]

$$\frac{dx}{dt} + x(t) = I \{1 - k \cos [x(t - \tau_d) + \theta]\} / 2 \quad (1)$$

式中, I 为系统的输入光强,经常被作为系统的分岔参量进行混沌控制方面的研究^[16-17]; $x(t)$ 是系统的输出光强经过光电转换、放大后反馈到系统上的电压; τ_d 是反馈回路中的有效延迟时间; k 是消光系数,本文将它作为系统的分岔参量; θ 是与系统偏置电压相对应的量.

在长延迟状态下,系统的时间演化方程(1)可近似表示成一维迭代方程:

$$x_{n+1} = I [1 - k \cos (x_n + \theta)] / 2 \quad (2)$$

式中, n 代表系统的迭代次数,系统参量 k 是系统的分岔参量.

2 电光双稳态系统的稳定性分析

式(1)是含有延迟时间 τ_d 的自治微分方程,相当于一个无穷阶自治非线性常微分方程.系统处于稳定态时,即式(1)中 $dx/dt=0$ 或式(2)中 $x_{n+1}=x_n$ 时,取 $I=2, \theta=\pi$,得到定态解为 x^* ,形式为

$$x^* = 1 + k \cos x^* \quad (3)$$

图1是定态方程(3)的另一种表示形式: $k = (x^* - 1) / \cos x^*$ 而来的 $k - x^*$ 稳态曲线,在 $\cos x^* = 0$ 时,即 $x^* = \pi/2 + n\pi$ 时,不存在符合条件的 k 值.正如图1所示,不是在任意 x^* 处都有满

基金项目:国家自然科学基金(No. 10975047)资助

第一作者:赵振华(1987-),男,硕士研究生,主要研究方向为光学混沌及其应用. Email: zhenhua622322@163.com

导师(通讯作者):张胜海(1971-),男,副教授,主要研究方向为光学混沌及其应用. Email: ccstshz@163.com

收稿日期:2011-05-19;修回日期:2011-07-20

足条件的 k 值与之相对应. 稳态曲线的斜率方程为

$$\frac{dx^*}{dk} = \frac{x^* - 1}{k(1+A)} \quad (4)$$

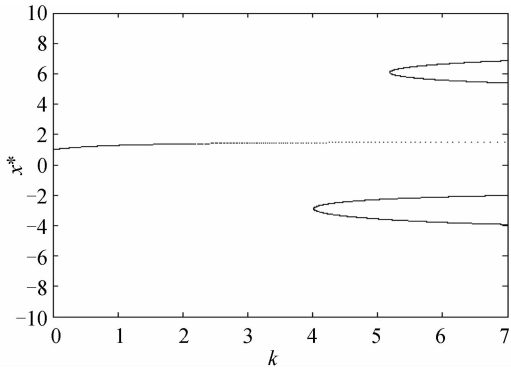


图1 电光双稳态系统的稳态曲线
Fig.1 Stable graph of electrical-optical bistable system
引用 Narducci 定义^[18]

$$A = k \sin x^* \quad (5)$$

由斜率方程(4)可知,当 $x^* > 1, A < -1$ 或 $x^* < 1, A > -1$ 时,有 $dx^*/dk < 0$ 对应图1中稳态曲线的负斜率区;当 $x^* > 1, A > -1$ 或 $x^* < 1, A < -1$ 时,有 $dx^*/dk > 0$ 对应图1中稳态曲线的正斜率区;当 $x^* = 1, dx^*/dk = 0$ 对应图1中稳态曲线斜率等于零的部分,此时只有 $k=0$ 满足方程(3),即在 $k=0$ 处稳态曲线斜率等于零;当 $A = -1$ 时, $dx^*/dk = \infty$ 对应着图1中稳态曲线的突跳点.

在定态解 x^* 附近作微小的扰动 $y(t)$,即 $x(t) = y(t) + x^*$,将 $x(t)$ 代入到式(1)可得

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) + x^* = 1 + k \cos [y(t - \tau_d) + x^*] \quad (6)$$

经简化整理得到式(7)

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = -ky(t - \tau_d) \sin x^* - Ay(t - \tau_d) \quad (7)$$

方程有形式解 $y \sim e^{\lambda t}$,本征方程为

$$(\lambda + 1)e^{\lambda \tau_d} = -k \sin x^* = -A \quad (8)$$

本征值为 λ ,一般为复数,将 $\lambda = \alpha + i\beta$ 代入分别整理实部和虚部可得

$$\begin{cases} \alpha + 1 + \beta \text{ctg } \tau_d \beta = 0 \\ (\alpha + 1)^2 + \beta^2 = A^2 e^{-2\tau_d \alpha} \end{cases} \quad (9)$$

本征值的实部 α 决定定态解的稳定性.当 $\alpha = 0$ 是失稳阈值;当 $\alpha < 0$ 时,即 $A^2 < 1 + \beta^2$,扰动呈指数衰减趋势,则 x^* 是稳定的定态解;反之,当 $\alpha > 0$ 时,即 $A^2 > 1 + \beta^2$,扰动将呈指数增加趋势,则 x^* 是不稳定的定态解.

系统处于稳定态时,式(1)、式(2)同时可以得到定态解为 x^* ,如式(3)所示,用图解方式对电光双稳态系统进行稳定性分析,转换成

$$\begin{cases} y = x^* \\ y = 1 + k \cos x^* \end{cases} \quad (10)$$

图2是由图解法求解定态解图,图中 $y = x^*$ 直线和 $y = 1 + k \cos x^*$ 一簇正弦曲线的交点都为定态点.同时,满足 $dy/dx^* = -k \sin x^*$ 的绝对值等于1的 k 点为临界点(分岔点),显然 $k = \pm 1/\sin x^*$ 满足条件.临界点同时又为定态点,即满足定态方程式(3),得到在分岔点处 x^* 满足

$$k = \frac{x^* - 1}{\cos x^*} = \frac{\pm 1}{\sin x^*} \quad (11)$$

即

$$x^* \sin x^* - \sin x^* \mp \cos x^* = 0 \quad (12)$$

通过数值计算,将从超越方程(12)中解出的 x^* 带入式(11),得到对应的 k 值.当 $k = 1.0409$ 时系统由周期一分岔至周期二,当 $k = 1.8595$ 时系统由周期二分岔至周期四,当 $k = 2.2404$ 时系统由周期四分岔至周期八之后进入混沌态.

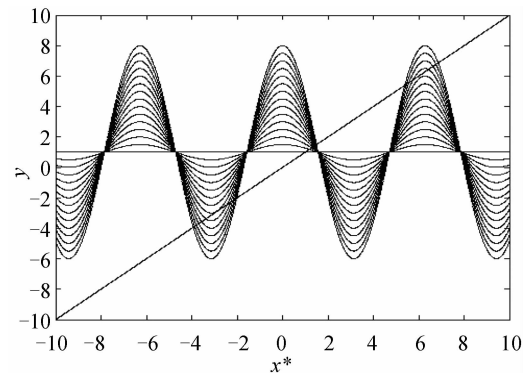


图2 图解法求解定态解图
Fig.2 Steady state solution diagram for diagrammatized mode

在图2中,直线 $y = x^*$ 和正弦曲线 $y = 1 + k \cos x^*$ 分别在 x^* 的正负半轴有相切点.图3是 $k = 4.05$ 时图解法求解定态解图,即是图2中 $y = 1 + k \cos x^*$ 一簇正弦曲线中 $y = 1 + 4.05 \cos x^*$ 这条正弦曲线.在 $x^* = 1.5$ 附近 $y = x^*$ 和 $y = 1 + 4.05 \cos x^*$ 有一个交点,即存在定态解.通过解超越

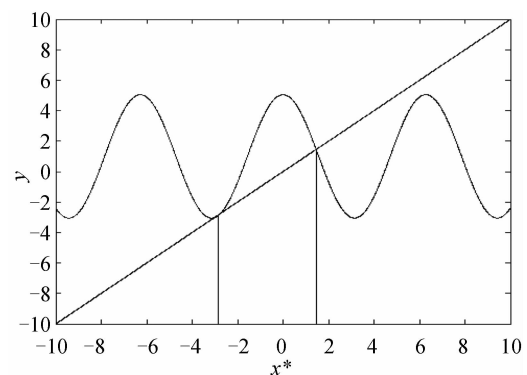


图3 $k=4.05$ 时图解法求解定态解图
Fig.3 Steady state solution diagram when $k=4.05$ for diagrammatized mode

方程 $x^* = 1 + 4.05 \cos x^*$ 在 $x^* = 1.5$ 附近的解, 得到 $x^* = 1.4576$. 当 $k = 4.05$, $x^* = 1.4576$ 时, $y = 1 + 4.05 \cos x^*$ 斜率等于 -4.0241 , 绝对值大于 1, 说明该点是个不稳定的不动点. 在 $x^* = -3$ 附近 $y = x^*$ 和 $y = 1 + 4.05 \cos x^*$ 相切, 显然此处 $y = 1 + 4.05 \cos x^*$ 斜率等于 1, 说明该点是个临界点(分岔点). 当 k 在 $k < 4.05$ 附近, 无交点, 即不存在定态情况; 而在 $k > 4.05$ 一侧会有 $y = 1 + k \cos x^*$ 斜率的绝对值小于 1 的情况, 即存在稳定定态. 在 $k < 4.05$ 附近, $y = x^*$ 和 $y = 1 + k \cos x^*$ 之间会形成一狭窄通道. 在通道内, 系统演化状态变化差异很小, 近似于周期运动, 但随着迭代次数的增多很快会走出通道, 产生类随机振荡行为, 也即产生了阵发混沌. 当然, 产生阵发混沌的 k 的区间不会很大. 因为要产生阵发混沌, 需使 $y = x^*$ 和 $y = 1 + k \cos x^*$ 之间有一狭小通道; 若之间是一个很宽的通道, 是不会产生这种阵发混沌. 因此, 在 $k = 4.05$ 附近, 随着 k 的减小, 系统会从周期状态突然进入阵发混沌区.

图 4 是 $k = 5.2$ 时图解法求解定态解图, 即是图 2 中 $y = 1 + k \cos x^*$ 一簇正弦曲线中 $y = 1 + 5.2 \cos x^*$ 这条正弦曲线, 在 $x^* = -3.6$, $x^* = -2$ 和 $x^* = 1.4$ 附近存在三个交点, 即有定态解存在. 通过解超越方程 $x^* = 1 + 5.2 \cos x^*$ 在各点附近的解得到, $x^* = -3.6189$, $x^* = -2.2446$ 和 $x^* = 1.4789$. 对应曲线 $y = 1 + 5.2 \cos x^*$ 在三点处的斜率分别为: -2.3888 , 4.0636 , -5.1781 , 绝对值都大于 1, 故这三个点都是不稳定的不动点. 在 $x^* = 6$ 附近 $y = x^*$ 和 $y = 1 + 5.2 \cos x^*$ 相切, 显然此处 $y = 1 + 5.2 \cos x^*$ 斜率等于 1. 通过解超越方程 $x^* = 1 + 5.2 \cos x^*$ 在 $x^* = 6$ 附近的解, 即点 $k = 5.2$, $x^* = 6.0174$ 是个临界点(分岔点). 当 k 在 $k < 5.2$ 的一侧, 无定态; 而在 $k > 5.2$ 的一侧会有 $y = 1 + k \cos x^*$ 斜率的绝对值小于 1 的情况, 即存在稳定定态. 在 $k < 5.2$ 的附近, $y = x^*$ 和 $y = 1 + k \cos x^*$ 之间

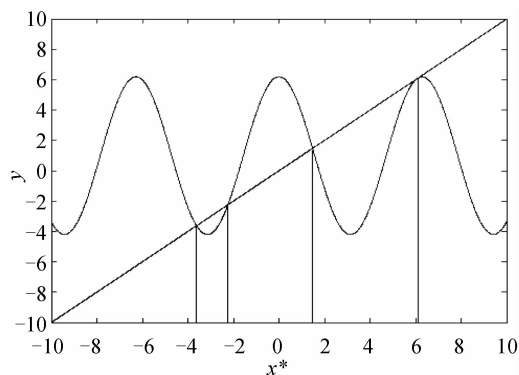


图 4 $k = 5.2$ 时图解法求解定态解图
Fig. 4 Steady state solution diagram when $k = 5.2$ for diagrammatized mode

在 $x^* = 6$ 附近会形成一狭窄通道, 也会有阵发混沌现象发生. 因此, 在 $k = 5.2$ 附近, 随着 k 的减小, 系统会从周期状态突然进入阵发混沌区.

3 数值模拟

对式(2)所示的初始系统取参量 $I = 2, \theta = \pi$, 即在输入光强一定的情况下, 改变系统的消光系数, 将 k 作为系统的可调参量, 可得到系统随参量 k 演化的分岔图, 如图 5(a)所示, 系统分别经历周期一、周期二、周期四、周期八后跳至混沌态, 并且在混沌区域内出现一些透明窗口, 即周期窗. 如在 $k = 2.6$ 附近出现周期三窗口, 这与李天岩和约克在 1973 年提出的周期三意味着混沌的判据相吻合^[8]. 系统随参量 k 演化的最大 Lyapunov 指数, 如图 5(b)所示. 由 Lyapunov 指数的定义可知, 正 Lyapunov 指数是非线性系统具有混沌的本质特征, 负 Lyapunov 指数是非线性系统具有周期稳定态的特征, Lyapunov 指数为零时对应的参量是系统演化分岔点, 因此可以明确判断出各点所处的状态. 显然图 5(b)所示结果与图 5(a)所示完全一致, 在系统参量的变化范围内, 该系统存在多个倍周期分岔和切分岔过程.

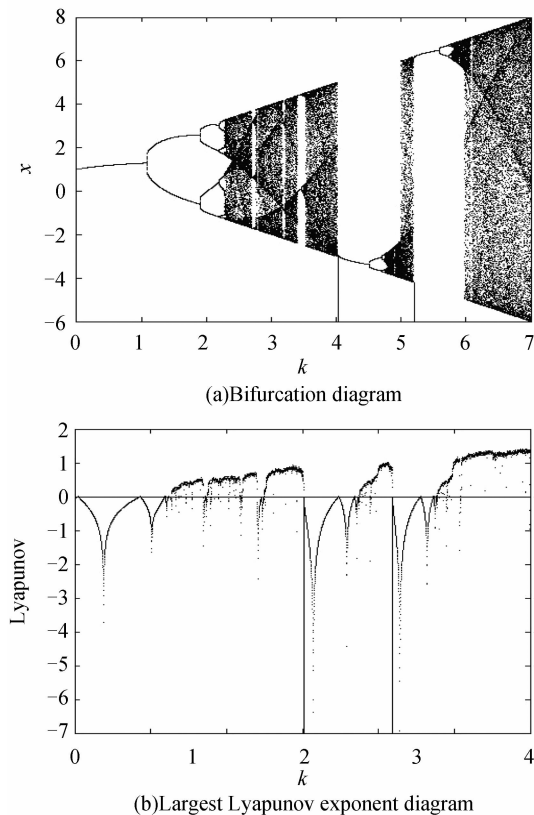


图 5 电光双稳态系统的分岔图和最大 Lyapunov 指数谱
Fig. 5 Bifurcation diagram and largest Lyapunov exponent diagram of electrical-optical bistable system

图 5(a)所示的分岔图中, 在 $k = 0 \sim 1.05$ 区间, 系统处于周期一状态; 在 $k = 1.05$ 附近分岔至周期

二状态,在 $k=1.05\sim 1.86$ 区间系统处于周期二状态;在 $k=1.86$ 附近分岔至周期四状态,在 $k=1.86\sim 2.25$ 区间系统处于周期四状态;在 $k=2.25$ 附近分岔至周期八之后进入混沌态.在 $k=3.45\sim 4.05$ 区间的混沌带内有几条深色的线条,且混沌带区域边界整齐,正是由于倍周期分岔和阵发混沌同时作用产生的混沌带.在 $k=4.05$ 时,系统经过切分岔跳至周期一态,随着 k 值逐渐增大,系统再次经历周期一、周期二、周期四这个倍周期分岔途径进入混沌态.在 $k=5.00\sim 5.20$ 区间的混沌带的偏下部分,有一块深色的区域,也是由于倍周期分岔和阵发混沌同时作用的结果,其余的部分是阵发混沌作用的结果.在 $k=5.20$ 附近,系统再次经过切分岔进入周期一态,随着 k 值逐渐增大,系统又一次经历周期一、周期二、周期四这个倍周期分岔途径进入混沌态.在图 5(b)所示的最大 Lyapunov 指数谱中,最大 Lyapunov 指数也相应的产生正负变化.这一现象与本文用图解方式对电光双稳态系统进行稳定性分析的结果相一致.

图 6(a)为 $k=3.00\sim 4.40$ 的分岔图,在 $k=3.18$ 处有清晰可见的周期三窗口.随着参量 k 的增长,在 $k=4.05, x^*=1.45$ 附近,是系统的倍周期分岔中一支的终点.正如图 3 分析所述,在 $k=4.05$ 处系统发生了切分岔现象,在 $k=3.45\sim 4.05$ 处存在由倍周期分岔和阵发混沌同时作用产生的混沌带.

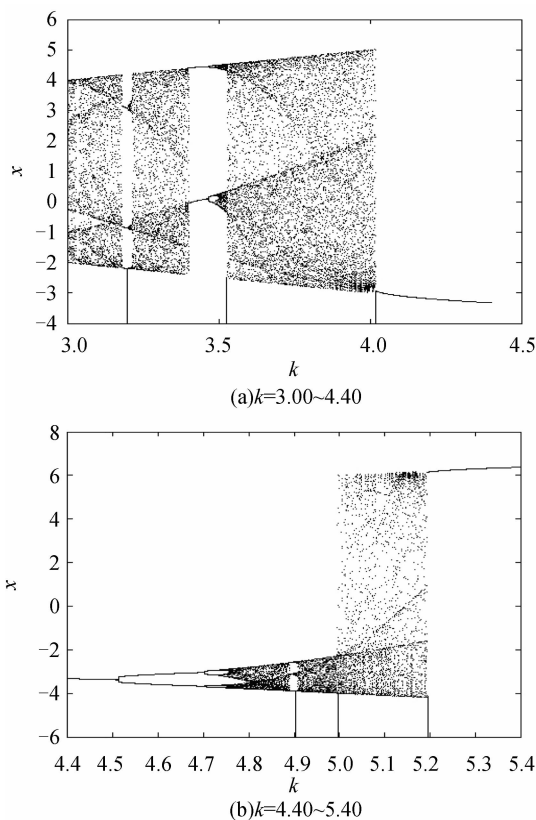


图 6 k 为不同值的分岔图
Fig. 6 Bifurcation diagrams with different values of k

图 6(b)为 $k=4.40\sim 5.40$ 的分岔图,在 $k=4.90$ 附近有周期三窗口.正如图 4 分析所述,在 $k=5.20$ 处系统发生了切分岔现象,在 $k=5.00\sim 5.20$ 处存在主要由阵发混沌作用产生的混沌带.当 $k=5.20$ 时,在 $x^*=-3.6, x^*=-2$ 和 $x^*=1.4$ 附近,是系统的倍周期分岔中一支的终点.同时图中出现了明显的豁口,正是由于在稳态条件下,必然满足稳态方程(3),在 $\cos x^*=0$ 时,即 $x^*=\pi/2+n\pi$ 时,不存在符合条件的 k 值,故出现了一段缺失造成豁口现象.

4 结论

本文分别从理论上和图解方式对电光双稳态系统进行了稳定性分析,针对由系统参量变化引起的电光双稳态系统的混沌态,发现系统演化过程中混沌产生的原因是由于倍周期分岔和阵发混沌同时作用的结果.同时,说明倍周期分岔和阵发混沌是系统进入混沌状态的途径.数值分析表明,本文理论分析的方法是正确的.从系统演化的分岔图可以清晰地发现演化过程中有切分岔现象发生,系统经过倍周期分岔和阵发混沌途径进入混沌状态.系统最大 Lyapunov 指数谱虽然不能显示系统的演化途径,但可以清楚地判定系统各点是否处于混沌状态,所示结果与分岔图显示完全一致.本文的研究对电光双稳态系统装置的参量选取提供了重要的理论依据.

参考文献

- [1] 李福利. 高等激光物理学[M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2006:164.
- [2] SZÖKE A, DANEU V, GOLDHAR J, et al. Bistable optical element and its applications[J]. *Appl Phys Lett*, 1969, **15** (11):376-379.
- [3] HUA Cun-cai, LU Qi-shao. Time-dependent bifurcation and dynamical behaviors of the absorptive optical bistability equation[J]. *Acta Phys Sin*, 2000, **49**(4):733-740. 化存才, 陆启韶. 吸收型光学双稳态方程的时变分岔与动力学行为[J]. *物理学报*, 2000, **49**(4):733-740.
- [4] JIANG Mei-ping, CHEN Guang, CHEN Xian-feng. The bistable properties of nonlinear bragg cavity containing negative refractive index materials[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2006, **35**(4):535-539. 蒋美萍, 陈光, 陈宪锋, 等. 含负折射率介质非线性 Bragg 腔的双稳态特性[J]. *光子学报*, 2006, **35**(4):535-539.
- [5] CHEN Xian-feng, SHEN Xiao-ming, JIANG Mei-ping, et al. Study on the bistability of nonlinear bragg microcavity[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2007, **36**(4):613-616. 陈宪锋, 沈小明, 蒋美萍, 等. 非线性 Bragg 微腔的双稳态研究[J]. *光子学报*, 2007, **36**(4):613-616.
- [6] WANG B, YAN S P. Correlation function of an optical bistable system with cross-correlated additive white noise and multiplicative colored noise[J]. *Chinese Optics Letters*, 2009, **7** (9):838-840.
- [7] JIN Yi, CHEN Xian-feng, HUANG Zheng-yi, et al. Optical bistability of a nonlinear microcavity[J]. *Chinese Journal of*

- Quantum Electronics*, 2009, **26**(5):591-595.
金铤, 陈宪锋, 黄正逸, 等. 非线性微腔的光学双稳态[J]. 量子电子学报, 2009, **26**(5):591-595.
- [8] 沈柯. 光学中的混沌[M]. 长春: 东北师范大学出版社, 2000: 200.
- [9] ZHANG Tao, ZHAI Ai-min, ZHANG Xiao-yan, *et al.* Hyperchaos control with an external periodic stimulation signal to a two-order cascading acousto-optical bistable system[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2001, **30**(7):818-820.
张涛, 翟爱民, 张小炎, 等. 二阶级联声光双稳态超混沌的周期驱动控制[J]. 光子学报, 2001, **30**(7):818-820.
- [10] LÜ Ling, DU Zeng, LUAN Ling. Realization of chaos control in the acousto-optical bistable system by the variable rotation transformation[J]. *Chinese J Lasers*, 2004, **31**(12):1437-1440.
吕翎, 杜增, 栾玲. 用变量旋转变换实现声光双稳态系统的混沌控制[J]. 中国激光, 2004, **31**(12):1437-1440.
- [11] LÜ Ling, LI Gang, CAO Hai-jing. Chaos control of acousto-optical bistable system[J]. *Chinese J Lasers*, 2004, **31**(2):161-163.
吕翎, 李钢, 曹海静. 声光双稳态系统混沌的控制[J]. 中国激光, 2004, **31**(2):161-163.
- [12] ZHANG Wei, PAN Wei, LUO Bin, *et al.* Chaos control of the external perturbation feedback in bragg acousto-optic bistable system[J]. *Laser Journal*, 2008, **29**(3):38-40.
张薇, 潘伟, 罗斌, 等. 延迟反馈法对 Bragg 声光双稳系统混沌的控制[J]. 激光杂志, 2008, **29**(3):38-40.
- [13] FENG Li-jun, LI Jun, SUN Guang-ming. Synchronization of bragg acousto-optic bistable system by parameter driven method[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2009, **38**(5):1104-1107.
冯立军, 李君, 孙光明. 利用参量驱动法实现 Bragg 声光双稳系统的混沌同步[J]. 光子学报, 2009, **38**(5):1104-1107.
- [14] GAO J Y, NARDUCCI L M, SCHULMAN L S, *et al.* Route to chaos in a hybrid bistable system with delay[J]. *Phys Rev A*, 1983, **28**(5):2910-2914.
- [15] HOLF F A, KAPLAN D L, ROSE M H, *et al.* Characterization of chaos in a hybrid optically bistable device[J]. *Phys Rev Lett*, 1986, **57**(12):1394-1397.
- [16] ZHANG Y, LI J B, ZHENG Z R, *et al.* Dynamic storage function by chaos control in a hybrid bistable system[J]. *Phys Rev E*, 1998, **57**(2):1611-1614.
- [17] NIU Yong-di, MA Wen-qiang, WANG Rong. Chaos control and synchronization in electrical-optical bistable systems[J]. *Acta Phys Sin*, 2009, **58**(5):2934-2938.
牛永迪, 马文强, 王荣. 电光双稳态系统的混沌控制与同步[J]. 物理学报, 2009, **58**(5):2934-2938.
- [18] 张洪均. 光学混沌[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1997: 171.

Analysis in Chaotic Characteristics of Electrical-optical Bistable Systems

ZHAO Zhen-hua¹, ZHANG Sheng-hai¹, YANG Hua¹, TAN Jian-feng¹, ZHANG Dan²

(1 Department of Mathematics and Physics, Institute of Science, PLA Information Engineering University, Zhengzhou 450001, China)

(2 Zhengzhou Power Supply Company, Zhengzhou 450000, China)

Abstract: The stability of the electrical-optical bistable system is theoretically analyzed and the stability of the fixed points is researched by diagrammatized mode. Through the method of numerical calculation, the concrete positions of the bifurcation points are calculated, the ways of chaos generation are studied which are intermittent chaos and period doubling bifurcations. Bifurcation diagram of the system state evolving with parameter and largest Lyapunov exponent changing with parameter of the system all show that the analysis is reasonable in theory.

Key words: Electrical-optical bistable system; Chaos; Stability; Diagrammatized mode