

文章编号:1004-4213(2011)01-0121-5

欠采样干涉图最小二乘相位解包裹算法改进*

张雄,钱晓凡

(昆明理工大学 理学院 激光研究所,昆明 650093)

摘 要:数字全息的再现光场相位一般具有较高的空间变化频率,而目前 CCD、CMOS 的空间带宽积还很有限,容易产生欠采样并导致包裹相位中有大量不可靠数据点存在,给最小二乘相位解包裹带来困难.本文将剪切干涉原理引入到数字全息再现光场的重构中,通过改变再现光场相位梯度的计算方法减少欠采样的影响,对现有的最小二乘相位解包裹算法进行了改进.模拟计算和实验验证表明:新方法得到的相位更接近实验值,具有比传统方法更强的抗欠采样能力.

关键词:相位解包裹;最小二乘算法;剪切干涉;欠采样;改进

中图分类号:O436.1

文献标识码:A

doi:10.3788/gzxb20114001.0121

0 引言

全息术可以记录和再现光场的相位,因而在光学检测中具有独到的优势.随着计算机及 CCD、CMOS 等光电转换器件技术的进步,用 CCD 等光电转换器件代替传统全息感光板的数字全息术及其检测技术正成为一个研究热点,并获得广泛的应用^[1-4].在该研究领域,利用数字全息获得高质量的再现光场后,如何通过相位解包裹运算得到再现光场的相位,是一个重要的研究内容.因为在数字全息术及全息干涉检测技术中,为了得到所需要的测量值,如物体的形变量、温度场分布、三维形貌和应力场分布等等,都必须完成光场的相位计算,但计算相位一般要用到反正切函数,其值域(主值)为 $[-\pi, \pi]$,直接计算得到的相位被“截断”或“包裹”了,实际测量时必须通过相位解包裹将它们连接起来.

为了很好地实现解包裹运算,目前国内、外学者已经提出了很多相位解包裹算法,归纳起来主要是两种:即寻求积分结果与路径无关条件的路径跟踪算法^[5-7],以及寻求满足最小范数解的路径无关相位解包裹算法^[8-14].其中各种路径无关算法寻求的是满足最小范数的解,即计算期望相位与真实相位之间的相位梯度误差的最小范数,进而获得真实相位的逼近值,其中最常用的是最小二乘法,又分为无权最小二乘法^[8-9]和加权最小二乘法^[12-13]等.在实际应用中,由于目前传统记录介质的分辨率已达到

4000~10 000 lp/mm,而 CCD、CMOS 的分辨率还在 100~200 lp/mm,加之 CCD、CMOS 的有效光敏面尺寸也还在厘米量级,限制了光电转换器件的空间带宽积,因此,数字全息再现光场相位的空间频率一般较高,常常出现包裹相位条纹断裂、欠采样,使包裹相位中存在大量不可靠数据点,给最小二乘相位解包裹算法带来了不小的困难:当相位在空间中变化较快,有大量欠采样出现的情况时,解包裹无法顺利完成.

针对这个问题,本文将剪切干涉计量原理引入到有欠采样情况下的最小二乘相位解包裹运算中,通过改变再现光场相位梯度的计算方法减少欠采样的影响,对传统的最小二乘相位解包裹算法进行了改进,提高了最小二乘相位解包裹算法的准确度和抗欠采样能力,使利用数字全息获得相位信息的能力得到更好的发挥.

1 最小二乘相位解包裹算法的基本原理及缺陷

设 $N \times M$ 个数据点的二维包裹相位值为 $g(n, m)$,而 $\varphi(n, m)$ 为对应的实际连续相位值(n, m 为二维分布相位对应矩阵的下标, $0 \leq n \leq N-1, 0 \leq m \leq M-1$),可以写出包裹相位沿 x 方向和 y 方向的梯度为

$$\Delta^x g_{n,m} = g(n+1, m) - g(n, m) + 2k\pi \quad (1)$$

$$\Delta^y g_{n,m} = g(n, m+1) - g(n, m) + 2k\pi \quad (2)$$

基金项目:国家自然科学基金(No. 61067004)资助

第一作者:张雄(1965-),讲师,硕士,主要研究方向为光信息处理. Email:13888696879@139.com

通讯作者:钱晓凡(1963-),教授,主要研究方向为信息光学. Email:qianxiaofan1@sina.com

收稿日期:2010-08-27;修回日期:2010-09-18

式中, k 为整数. 为了使求得的相位对已知包裹相位拟合最好, 作最小二乘

$$S = \sum_{n=0}^{N-2M-1} \sum_{m=0}^{M-1} (\varphi_{(n+1)m} - \varphi_{nm} - \Delta^x g_{n,m})^2 + \sum_{n=0}^{N-1M-2} \sum_{m=0}^{M-1} (\varphi_{n(m+1)} - \varphi_{nm} - \Delta^y g_{n,m})^2 \quad (3)$$

式(3)中最小二乘矩阵的求解方程为

$$\varphi_{(n+1)m} + \varphi_{(n-1)m} + \varphi_{n(m+1)} + \varphi_{n(m-1)} - 4\varphi_{nm} = \Delta^x g_{n,m} - \Delta^x g_{(n-1),m} + \Delta^y g_{n,m} - \Delta^y g_{n,(m-1)} \quad (4)$$

其恒等关系式为

$$[\varphi_{(n+1)m} - 2\varphi_{nm} + \varphi_{(n-1)m}] + [\varphi_{n(m+1)} - 2\varphi_{nm} + \varphi_{n(m-1)}] = \rho_{nm} \quad (5)$$

式中

$$\rho_{nm} = [\Delta^x g_{n,m} - \Delta^x g_{(n-1),m}] + [\Delta^y g_{n,m} - \Delta^y g_{n,(m-1)}] \quad (6)$$

可以通过已知包裹相位值 $g(n, m)$ 直接计算.

显然, 上述最小二乘矩阵求解方程是 $N \times M$ 矩形网格上的离散 Poisson 方程

$$\frac{\Delta^2}{\Delta x^2} \varphi(x, y) + \frac{\Delta^2}{\Delta y^2} \varphi(x, y) = \rho(x, y) \quad (7)$$

考虑边界条件, 相位解包裹问题的最小二乘解, 在数学上等于求解具有 Neumann 边界条件的离散 Poisson 方程, 常用离散余弦变换 (DCT) 或傅里叶变换 (FT) 求解该离散 Poisson 方程. 即目前常用的非权重最小二乘离散 Poisson 方程解包裹算法.

最小二乘解包裹需要计算 ρ_{nm} , 先直接用式(1)和式(2)计算 $\Delta^x g_{n,m}$ 和 $\Delta^y g_{n,m}$, 然后再用(6)式计算 ρ_{nm} . 从原理上看没有什么不妥, 但在算法上是有缺陷的. 这是因为 $g(n, m)$ 本身是包裹着的相位, 必须通过调节式(1)和式(2)中“ k ”的数值, 将 $\Delta^x g_{n,m}$ 和 $\Delta^y g_{n,m}$ 的值变为连续分布, 才能保证后面的计算正确, 但在相位的空间变化频率较高的情况下, 很容易因为欠采样而导致“ k ”的数值计算错误, 从而引入不可靠数据, 最终使解包裹失败.

为了说明现有的最小二乘解包裹算法的缺陷, 本文用一个模拟计算加以说明: 用 MATLAB 中的 peaks 函数再乘以 8 构建一个二维相位分布 (256×256 pixel), 其最大值和最小值分别为 64.87 rad 和 -52.40 rad, 得到的计算结果如图 1.

图 1(a) 是用于模拟计算的原始相位; 图 1(b) 给出了其包裹相位, 由于像素点少, 而相位在空间中变化快, 在箭头所指的三个区域出现了欠采样; 图 1(c) 给出了用包裹相位计算得到的沿 x 方向的梯度 $\Delta^x g_{n,m}$, 只是还没有通过调节“ k ”的数值使之连续分布; 图 1(d) 给出了通过调节“ k ”的数值, 使包裹相位沿 x 方向的梯度 $\Delta^x g_{n,m}$ 连续分布后的结果, 在箭头所指的三个欠采样区域数值还是出现了跳跃, 这最

终导致后面的解包裹计算失败.

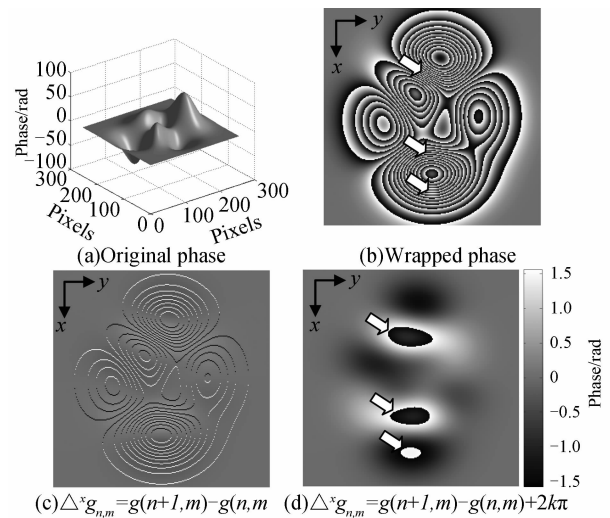


图 1 传统最小二乘解包裹算法的模拟计算结果

Fig. 1 Simulated results by conventional least-square phase unwrapping algorithm

2 剪切干涉计量及最小二乘相位解包裹算法的改进方法

光学测量中的一种重要方法是剪切干涉计量 (Shearing Interferometry), 它利用被测波面与其自身经某种变换后的波面进行干涉并完成计量, 根据剪切方向可分为横向剪切、径向剪切、旋转剪切和反向剪切等, 已在很多领域获得广泛的应用, 如光学系统和光学器件的检测、液体和气体流动的研究、实验力学中的应力、应变和振动分析等^[15-16].

剪切干涉计量的主要特点是两光波共光路, 对机械振动、温度扰动、以及空气流动都不敏感, 便于在实验室外进行现场检测. 这里我们注意到它的另一个突出特点是: 一般情况下, 剪切干涉的光路和装置要比数字全息复杂, 但所得干涉条纹的空间频率要远低于数字全息, 因为剪切得到的两个波面, 尽管每一个波面自身的空间变化频率并不低, 但两者之间的差别却不大. 因此, 如果直接用 CCD 分别记录两个波面与参考光的干涉条纹均极易发生欠采样, 但同样用 CCD 记录两个剪切波面相互干涉得到的干涉条纹却不容易出现欠采样. 既然剪切干涉原理上只需将光场作一定剪切后再相互干涉即可, 于是, 应该可以将剪切干涉的原理引入到最小二乘相位解包裹算法中, 克服由于欠采样产生的不可靠数据对相位解包裹的影响. 本文对现有最小二乘相位解包裹算法进行改进的基本思路如下:

对 $N \times M$ 个数据点上的二维包裹相位 $g(n, m)$, 引入一个等效的二维复光场 (其中 $j = \sqrt{-1}$)

$$\tilde{U}(n, m) = \exp [jg(n, m)] \quad (8)$$

对该等效光场沿某个方向上(以沿 x 方向为例)作一个像素的平移(剪切),创建一个新的光场——剪切光场

$$\tilde{U}(n,m) = \exp [jg(n+1,m)] \quad (9)$$

将两光场相除,可以得到

$$\frac{\tilde{U}(n,m)}{\tilde{U}(n,m)} = \frac{\exp [jg(n+1,m)]}{\exp [jg(n,m)]} = \exp (j\Delta^x g_{n,m}) \quad (10)$$

式中:

$$\Delta^x g_{n,m} = g(n+1,m) - g(n,m) \quad (11)$$

是 (n,m) 处两光场相位的差值,即等效光场在该点处的相位 $g(n,m)$ 沿 x 方向上的梯度,对应前面的式(1),所不同的是,在建立等效光场之前, $g(n,m)$ 是包裹相位,式(8)定义的等效光场 $\tilde{U}(n,m)$ 的数值,与 $g(n,m)$ 不包裹的情况是一致的.这是因为按欧拉定理, e 指数可以分解为正弦和余弦函数,它们可以自动消除包裹,建立等效光场后, $g(n,m)$ 的截断在形式上其实已经被去除,即,无论 $g(n,m)$ 是否是包裹(截断)的,得到的等效光场 $\tilde{U}(n,m)$ 的数值都是一样的.于是,即使 $g(n,m)$ 的空间变化频率不低,包裹严重,但 $\exp (j\Delta^x g_{n,m})$ 的空间变化频率却不高,计算其相位就不容易出现相位包裹的情况,从而避免了现在最小二乘解包裹运算中通过调节“ k ”值使 $\Delta^x g_{n,m}$ 连续分布的过程,可有效减少欠采样带来的麻烦.

同样可以计算 $\Delta^y g_{n,m} = g(n,m+1) - g(n,m)$, 最终计算出 ρ_{nm} , 这里不再赘述.

3 基于剪切干涉原理对最小二乘相位解包裹算法进行改进的模拟计算

为了说明改进后的最小二乘解包裹算法的优势,对第1节中作为例子给出的包裹相位用改进后的最小二乘法计算,得到的结果如图2.

图2(a)给出了用改进算法计算得到的相位沿 x 方向的梯度 $\Delta^x g_{n,m}$, 与图1(d)通过调节“ k ”得到的 $\Delta^x g_{n,m}$ 相比较,可以看到不连续的三个区域已经重新连续起来;图2(b)给出了用改进算法计算得到的沿 y 方向的梯度 $\Delta^y g_{n,m}$, 其中也没有发现不连续的点;图2(c)给出了用改进算法计算得到的解包裹相位,与图1(a)给出的原始相位相比较,可以看到解包裹的效果很好;图2(d)给出了用现有的最小二乘算法得到的解包裹相位,由于有三个区域因欠采样导致相位的梯度不连续,最终得到的解包裹结果很差,可以认为解包裹计算失败.模拟计算结果表明:在有欠采样的情况下,改进后的算法效果要好于现

有的最小二乘算法.

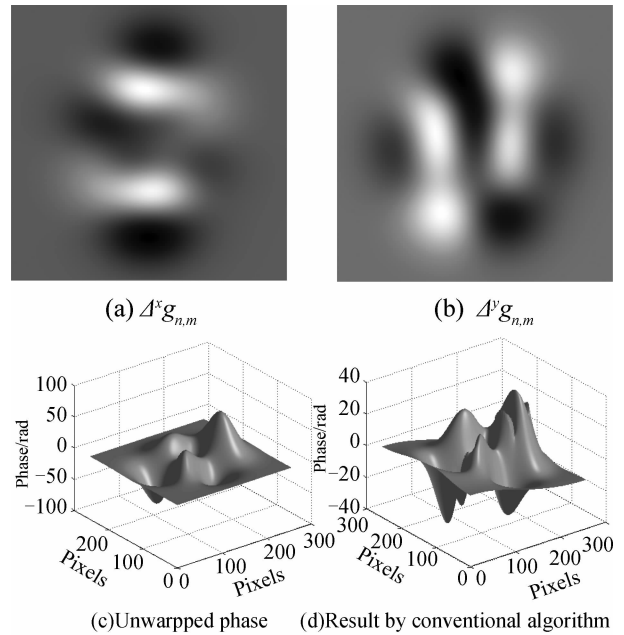


图2 改进后最小二乘解包裹算法的模拟计算结果
Fig. 2 Simulated results by our new least-square phase unwrapping algorithm

4 改进算法的实验验证

为了进一步检验改进后最小二乘相位解包裹算法的效果,本文用实验数据进行检验.

例子来自透射式像面显微数字全息实验^[17-18]: He-Ne 激光束(波长 $\lambda = 632.8 \text{ nm}$)经分束镜 BS_1 分成两束,其中一束经反射镜 M 照射到样品上,显微镜物镜将透射光投射到光电耦合器 CCD 上,调节 z_0 使之在 CCD 上清晰成像;另一束通过扩束透镜 BE 和针孔滤波器 h 后,经准直透镜 L 变为平行光束,由压电陶瓷管驱动的反光镜 $PZT M$ 和分束镜 BS_2 反射到 CCD 上,作为记录参考光(如图3所示).

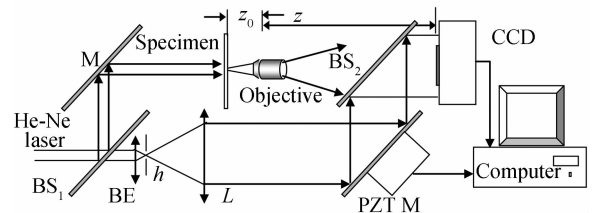


图3 像面数字显微全息光路
Fig. 3 Schematic of digital holographic microscope

实验用普通洋葱切片作为测试样品,CCD 的像素为 512×512 , 通过四步相移记录 4 幅全息图,可得到在像面处光场的包裹相位.

实验结果如图4.其中图4(a)是实验得到的四幅全息图中的一幅,图4(b)是用四步相移法计算得到的包裹相位图.从这两幅图中容易看到,由于像面显微数字全息中叠加有一个球面波,与平行光波干涉得到的干涉条纹很密,而 CCD 的分辨率有限,导

致采样不满足抽样定理,全息图和包裹相位图中出现了欠采样。

图4(c)给出了用现有最小二乘算法得到的解包裹相位(为方便与全息图比较取了余弦),与图4(a)比较可以看到,得到的解包裹结果很差,从图的中部到右侧边缘约占整幅图二分之一范围内的相位严重失真,重构光场从中部附近一分为二,左右两端高,中间低,呈“V”字型,与实际的光场完全不一样,可以认为解包裹计算失败。图4(d)给出了用改进算法计算得到的解包裹相位(同样已取了余弦),与图4(a)比较可以看到,除了右侧边缘处很小范围内的相位有失真,以及还留有最小二乘算法带来的峰削尖、谷填底、陡坡变缓的情况外,其它区域解包裹的效果总体很好。实验结果表明:在有欠采样的情况下,改进后的算法效果要明显好于现有的最小二乘算法。

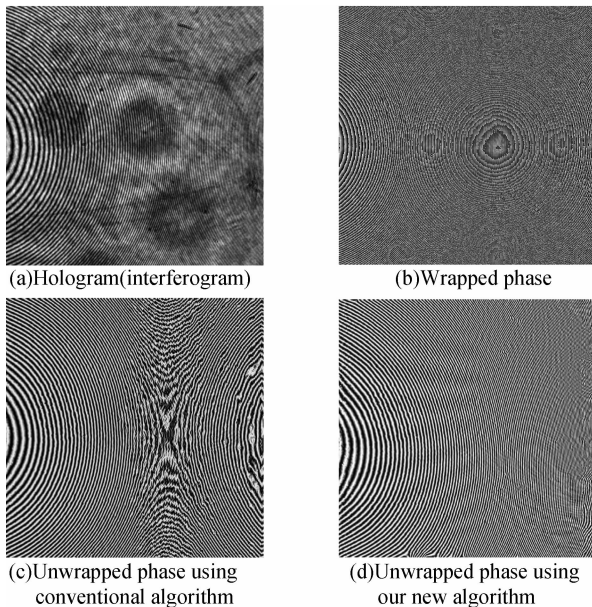


图4 改进算法的实验验证结果及其与现有算法的比较
Fig. 4 Experimental results of unwrapped phase by improved algorithm

5 结论

数字全息的再现光场相位一般具有较高的空间变化频率,而目前 CCD、CMOS 的空间带宽积还很有限,容易产生欠采样并导致包裹相位中有大量不可靠数据点存在,给最小二乘相位解包裹带来困难。注意到全息干涉计量和剪切干涉计量都是光学测量的重要方法,剪切干涉从原理上讲只需将光场作一定剪切后再相互干涉即可,于是将剪切干涉的原理引入到数字全息再现光场的重构中,对现有的最小二乘相位解包裹算法进行了改进。通过模拟计算和实验验证,证明了新方法的可行性和有效性。结果表明,新方法得到的相位更接近实验值,具有比传统方

法更强的抗欠采样能力。

参考文献

- [1] GOODMAN J W, LAWRENCE R W. Digital image formation from electronically detected holograms[J]. *Applied Physics Letter*, 1967, **11**(3): 77-99.
- [2] PICART P, LEVAL J, MOUNIER D, et al. Some opportunities for vibration analysis with time averaging in digital Fresnel holography[J]. *Applied Optics*, 2005, **44**(3): 337-343.
- [3] REPETTO L, CHITTOFRATI R, PIANO E, et al. Infrared lensless holographic microscope with a vidicon camera for inspection of metallic evaporations on silicon wafers[J]. *Optics Communications*, 2005, **251**(1-3): 44-50.
- [4] SHEN Gong-xin, WEI Run-jie. Digital holographic particle image velocimetry for the measurements of 3D-3C flows[J]. *Optics & Lasers in Engineering*, 2005, **43**(10): 1039-1055.
- [5] GOLDSTEIN RICHARD M, ZEBKER H A, WERNER C L. Satellite radar interferometry: two-dimensional phase unwrapping[J]. *Radio Science*, 1988, **23**(4): 713-720.
- [6] FLYNN T J. Two-dimensional phase unwrapping with minimum weighted discontinuity[J]. *JOSA A*, 1997, **14**(10): 2692-2701.
- [7] EINEDER M, HUBIG M, MILCKE B. Unwrapping large interferograms using the minimum cost flow algorithm[C]. *Proceedings of the 1998 International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS'98)*, IEEE Piscataway NJ USA, 1998, 1: 83-87.
- [8] PRITT M D, SHIPMAN J S. Least-squares two-dimensional phase unwrapping using FFT's [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 1994, **32**(3): 706-708.
- [9] GHIGLIA D C, REMORO L A. Robust two-dimensional weighted and unweighted phase unwrapping that uses fast transforms and iterative methods[J]. *JOSA A*, 1994, **11**(1): 107-117.
- [10] MENESES J, GHARBI T, HUMBERT P. Phase-unwrapping algorithm for images with high noise content based on a local histogram [J]. *Applied Optics*, 2005, **44**(7): 1207-1215.
- [11] HUI Mei, WANG Dong-sheng. Phase unwrapping method based on the solution of discrete poisson equation [J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(10): 1245-1249.
- [12] 惠梅, 王东生. 基于离散泊松方程解的相位展开方法[J]. *光学学报*, 2003, **23**(10): 1245-1249.
- [13] QIAN Ke-mao, WU Xiao-ping. Modulation analysis based on weighted least-squares approach for phase unwrapping [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2001, **30**(5): 585-588.
- [14] 钱克矛, 伍小平. 基于调制度分析的加权最小二乘相位展开方法[J]. *光子学报*, 2001, **30**(5): 585-588.
- [15] QIAN Xiao-fan. A new phase calculation method in 3D optical phase measurement by combining PSP with IFTP [J]. *Optoelectronics Letters*, 2010, **6**(2): 120-123.
- [16] QIAN Xiao-fan, ZHANG Yong-an, Li Xin-yu, et al. Phase unwrapping algorithm based on mask and least-squares iteration [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(2): 440-444.
- [17] 钱晓凡, 张永安, 李新宇, 等. 基于掩膜和最小二乘迭代的相位解包裹方法[J]. *光学学报*, 2010, **30**(2): 440-444.
- [18] LAGO E L, de la FUENTE R. Amplitude and phase reconstruction by radial shearing interferometry[J]. *Applied Optics*, 2008, **47**(3): 372-376.
- [19] KRAMER S L B, RAVICHANDRAN G, BHATTACHARYA K. Transmission wavefront shearing interferometry for photoelastic materials[J]. *Applied Optics*, 2009, **48**(13): 2450-2460.
- [20] QIAN Xiao-fan, ZHANG Lei, DONG Ke-ping. Phase

reconstruction of cells with microscopy digital holography based on phase shifting technique[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2006, **35**(10):1565-1568.

钱晓凡,张磊,董可平. 基于相移技术的显微数字全息重构细胞相位[J]. *光子学报*, 2006, **35**(10):1565-1568.

[18] WANG Hua-ying, WANG Guang-jun, ZHAO Jie, *et al.*

Resolution analysis of imaging system with pro-magnification digital holography[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2008, **37**(4):729-733.

王华英,王广俊,赵洁,等. 预放大数字全息系统的成像分辨率分析[J]. *光子学报*, 2008, **37**(4):729-733.

An Improvement on the Least- squares Phase Unwrapping Algorithm for Undersampled Interferogram

ZHANG Xiong, QIAN Xiao-fan

(*Laser Institute, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China*)

Abstract: In digital holography, the reconstructed optical field phase generally has high spatial variation frequency, however, the space-bandwidth product is so limited that it is easy to introduce undersampling and to cause the existence of massive unreliable data points in the wrapped phase, which makes the least-squares phase unwrapping algorithm difficult. The principle of shearing interferometry was introduced to refactor the digital holographic reconstructed optical field. By changing the phase gradient calculation of the reconstructed optical field, the impact of undersampling was reduced. The feasibility and validity of the new method were proved by the simulated calculation and experimental verification. And the results show that the phase obtained by the new method is closer to the experimental value and it has stronger resistance ability to undersampling than the traditional method.

Key words: Phase unwrapping; Least-square algorithm; Shearing interferometry; Undersampling; Improvement