

文章编号:1004-4213(2010)s1-0075-5

# 任意多包层光纤模场的数值解法\*

夏涛<sup>1</sup>, 郭红利<sup>1</sup>, 陈根祥<sup>2</sup>

(1 国家广播电影电视总局 491 电台, 北京 100121)

(2 北京交通大学 电子信息工程学院 光波所, 北京 100044)

**摘 要:**利用非等距差分法进行一阶和二阶微分近似,对任意多包层光纤的半径和折射率分布进行非线性网格划分,对亥姆霍兹方程进行数值化,用 Matlab 编程求解特征矩阵方程,得到准确的单模、多模光纤模场分布,计算出五包层色散平坦光纤的归一化模场.结果表明,非等距差分法既可以保证运算的准确度,又能够提高运算速度,为深入研究光纤的其它特性奠定基础.

**关键词:**模场分布;亥姆霍兹方程;非线性网格划分;二阶微分近似

**中图分类号:**O431.1

**文献标识码:**A

**doi:**10.3788/gzxb201039s1.0075

## 0 引言

光纤的模场是满足边界条件的光纤亥姆霍兹方程的特征解,它取决于光纤的芯包半径、折射率分布.光通信发展到今天,各种复杂折射率分布的光纤层出不穷,例如阶跃型、渐变型、三角型、W 型、抛物 W 型,多包层型等等<sup>[1]</sup>.常规的求解模场分布的方法,比如 WKB 法(Wentzel, Kramers 和 Brillouin 提出)、等效阶跃折射率近似法、微扰法等,因只针对解析解(某些复杂光纤的模场可能不存在解析解)或者运算过于复杂等局限性越来越力不从心<sup>[2]</sup>.目前对光纤模场求解的研究只局限于特定折射率分布的光纤<sup>[3]</sup>.

本文针对任意多包层的折射率分布光纤,采用与中心差分公式不同的非等距差分公式来精确地表示一阶和二阶导数,并对光纤半径和折射率分布采用非均匀网格划分,用 Matlab 软件精确求解亥姆霍兹方程的特征数值解,计算出精确的光纤模场分布.既保证了计算准确度,又大大提高运算速度(单模光纤 747 点的矩阵特征方程求解只需 8 s).

## 1 亥姆霍兹标量方程

无自由电荷和自由电流的条件下,对于均匀介质中的谐变电磁场,麦克斯韦方程组中的电场方程可以简化为亥姆霍兹方程,其表达式为

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \mu_0 \epsilon \mathbf{E} = 0 \quad (1)$$

由于光纤具有圆对称性,因此式(1)可以改写为柱坐标形式

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} + k_0^2 n^2 \mathbf{E} = 0 \quad (2)$$

在纵向均匀的光纤中, $\mathbf{E}$  的纵向场为驻波形式,而横向场  $\psi(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$  ( $R(r)$  和  $\Phi(\phi)$  相互独立)满足标量波动方程组

$$\begin{cases} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left[ k_0^2 n^2(r) - \beta^2 - \frac{m^2}{r^2} \right] R = 0 \\ \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0 \end{cases} \quad (3)$$

式中  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  表示不同的模式.方程组中第二个的解为  $\Phi = \cos m\phi$  或者  $\Phi = \sin m\phi$ <sup>[4]</sup>.显然问题解决的关键是对第一个方程进行数值求解,而数值求解的关键首先是对一阶和二阶微分转化为精确的一阶和二阶差分.

## 2 一阶和二阶微分的数值表示和网格划分

微分的数值表示由中心差分公式得来

$$\frac{df_i}{dx_i} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \quad (4)$$

在阶跃折射率分布中,为保证计算准确并降低复杂度,折射率突变处分点较多,而其它缓慢变化处分点较少,而中心差分公式要求所有分点必须均匀,这显然增加了计算的复杂度.

对于图 1,三点  $i-1, i, i+1$  之间的间隔可以不相等, $i-0.5$  和  $i+0.5$  分别为前两点 and 后两点间隔的中点.

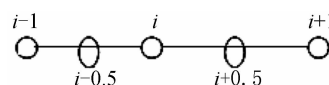


图 1 一阶、二阶差分近似示意图  
Fig. 1 Approximation of first and second order differential schematic diagram

基金项目:国家自然科学基金(No. 60777013)和北京市自然科学基金(No. 4082023)资助

第一作者:夏涛(1983-),男,硕士,研究方向为天线通信、电磁场及微波、光纤通信等. Email:xiatao664@gmail.com

收稿日期:2010-06-07;修回日期:2010-07-30

此时中间  $i$  点的一阶导数可以差分表示为

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \left[ \frac{\partial f_{i-0.5}}{\partial x_{i-0.5}}(x_{i+0.5} - x_i) + \frac{\partial f_{i+0.5}}{\partial x_{i+0.5}}(x_i - x_{i-0.5}) \right] / (x_{i+0.5} - x_{i-0.5}) \quad (5)$$

再将  $i-0.5$  和  $i+0.5$  点的一阶导数用中心差分表示,式(5)变为

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \frac{x_i - x_{i-1}}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)} f_{i+1} + \frac{(x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i)}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)} f_i - \frac{x_{i+1} - x_i}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_i - x_{i-1})} f_{i-1} \quad (6)$$

在式(6)的基础上,得到的二阶导数的差分表示为

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2} = \frac{1}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)} f_{i+1} - \frac{1}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)} f_i + \frac{1}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_i - x_{i-1})} f_{i-1} \quad (7)$$

在导数的差分表示的基础上进行网格划分,原则为:1)折射率突变点两侧对称划分;2)折射率突变附近网格划分比较密,折射率缓慢变化处网格划分较疏的非线性划分.这样的网格划分既保证了准确度,又使计算尽量简单.

### 3 波动方程的数值化

为了利用 Matlab 中的特征值和特征向量的函数进行计算,将方程组(3)中第一个方程进行变形

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + [k^2 n^2(r) - \frac{m^2}{r^2}] R = \beta^2 R \quad (8)$$

再通过方程(6)和(7)进行数值化,得到矩阵特征值方程

$$\begin{pmatrix} x & x & x & 0 & & & & & & \dots \\ x & x & x & x & 0 & & & & & \dots \\ x & x & x & x & x & 0 & & & & \dots \\ 0 & x & x & x & x & x & 0 & & & \dots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\ \vdots & & & & & 0 & x & x & x & x & x & 0 \\ & & & & & \dots & & 0 & x & x & x & x & 0 \\ & & & & & & & & 0 & x & x & x & x \\ & & & & & & & & & 0 & x & x & x \\ 0 & & & & & & & & & & 0 & 0 & x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ R_{n-5} \\ R_{n-4} \\ R_{n-3} \\ R_{n-2} \\ R_{n-1} \end{pmatrix} = \beta^2 \begin{pmatrix} R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ R_{n-5} \\ R_{n-4} \\ R_{n-3} \\ R_{n-2} \\ R_{n-1} \end{pmatrix} \quad (9)$$

计算方程(9)利用了两点:1)圆心处模场的一阶导数为零,这是显然的;2)包层最外端的模场衰减到很小,近似为零,所以方程(9)中无  $R_1$  和  $R_n$  项.

### 4 数值仿真结果

通过 Matlab 编程计算,得到多包层复杂折射率分布光纤的归一化标量模场结果.本文给出常见阶跃型单模光纤(Single-Mode optical Fibers, SMF)、阶跃型多模光纤和五包层色散平坦光纤(Dispersion Flattened Fiber, DFF)的模场计算结果.

#### 4.1 阶跃型 SMF 模场分布

由于单模光纤中只传输一种模式,而且横向场是圆对称分布,计算采用波长为  $1.31 \mu\text{m}$ ,阶跃型单模光纤芯径为  $4.5 \mu\text{m}$ ,给出三维立体图见图 2,左边是折射率分布,右边是模场分布图.

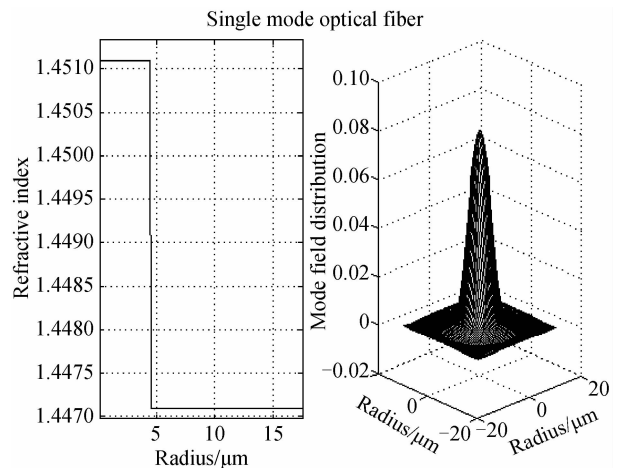


图2 折射率分布和模场分布  
Fig. 2 Refractive index and mode field distribution

#### 4.2 阶跃型多模光纤模场分布

双包层多模光纤的芯径一般为  $25 \mu\text{m}$ ,在低阶

模中,  $m$  相同也会有不同的  $LP_m$  模,  $m=0,1,2,\dots$   
 $n=1,2,3,\dots$ . 模场数量  $N$  和归一化频率  $V$  的经验公  
 式为:  $N=V^2/4$ , 采用计算波长同样为  $1.31 \mu\text{m}$ , 计

算出归一化频率  $V=18$ , 根据经验公式, 模场数量  
 $N=81$ . 图 3 给出多模光纤折射率分布和  $m=1$  时  
 所有的模式  $LP_{11}$  到  $LP_{18}$  的平面图.

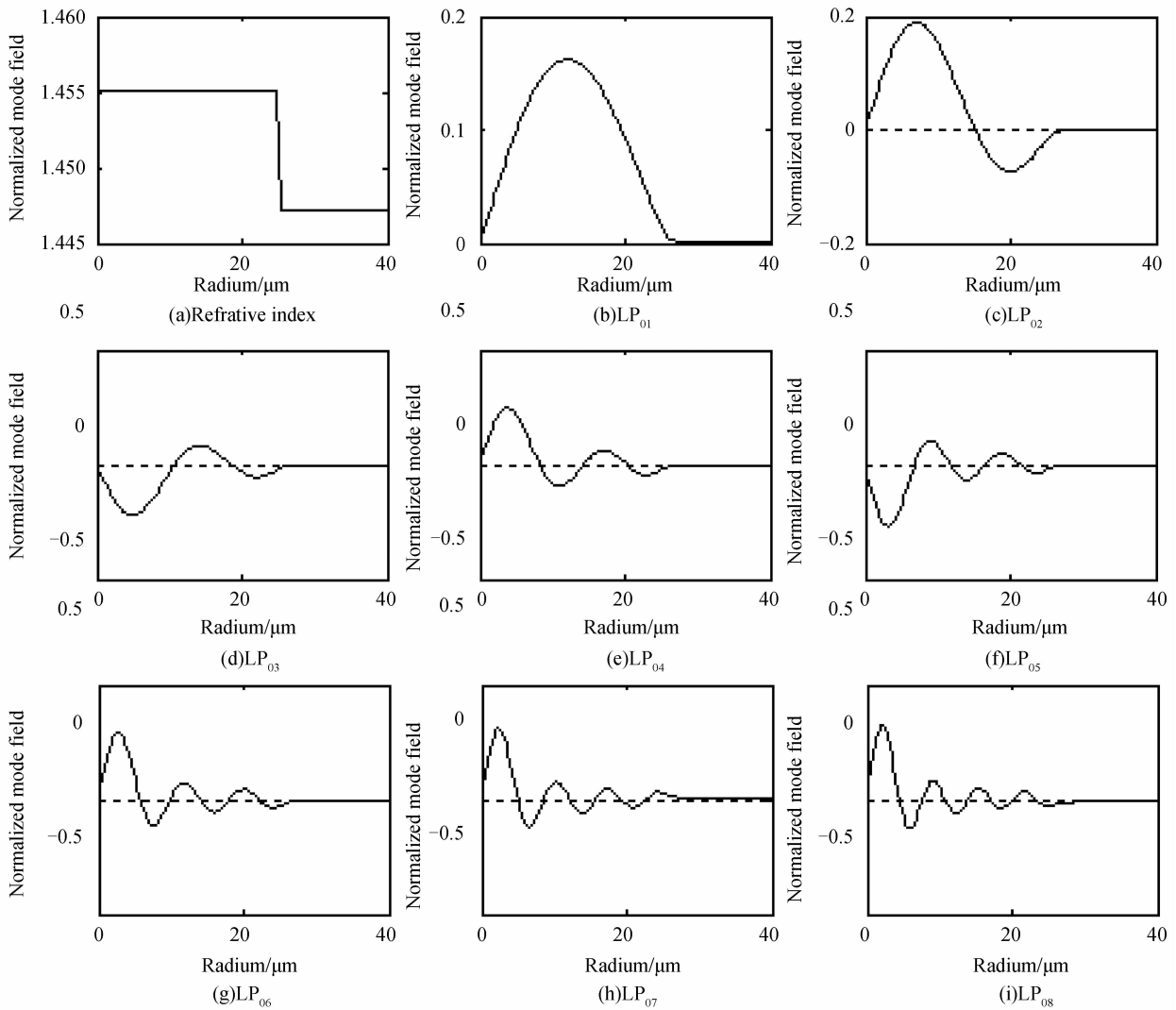
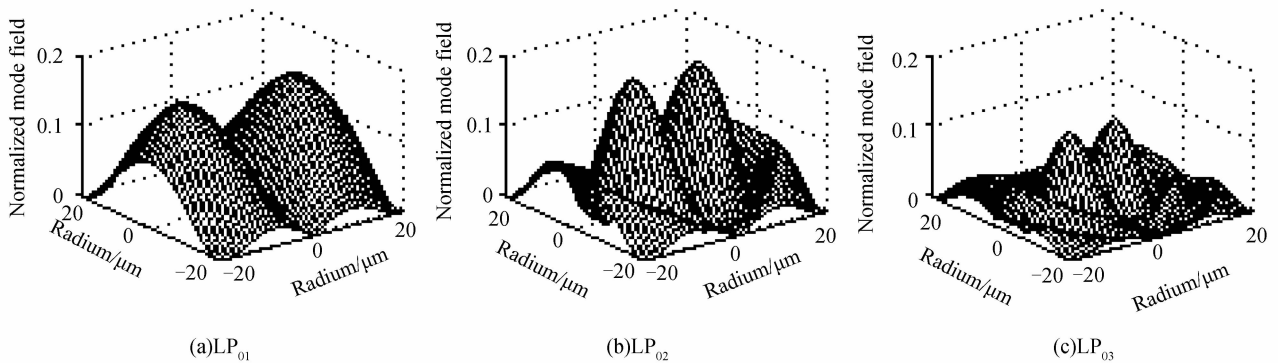
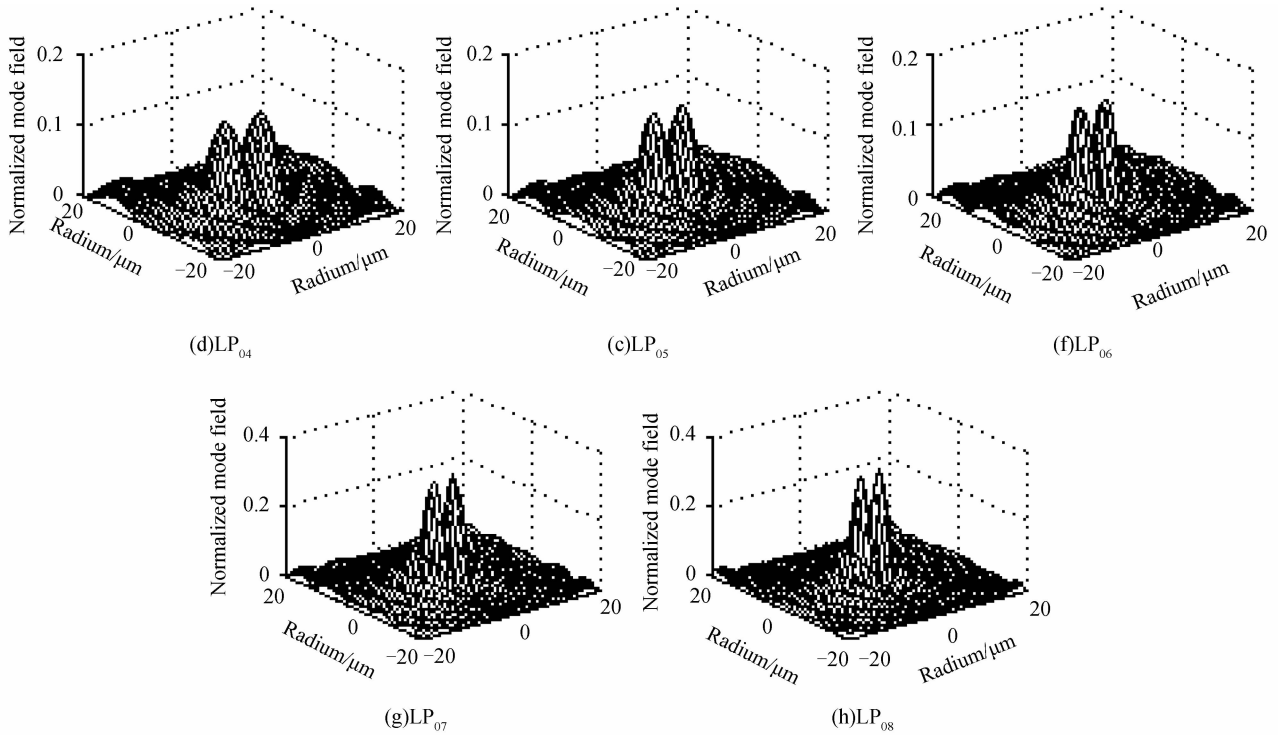


图 3 多模光纤折射率分布和模场分布 ( $m=1$ )  
 Fig. 3 Refractive index distribution of multimode fiber and mode field ( $m=1$ )

由分析可知,  $\Psi(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$ ,  $\Phi = \cos m\phi$ , 当  $m \neq 0$  时, 横向场为非圆对称, 所以当  $m=1$  时, 给出图 3 中 8 个模式的三维立体图 (见图 4).



图4 多模光纤三维模场分布( $m=1$ )Fig. 4 3D mode field distribution of multimode fiber( $m=1$ )

### 4.3 多包层 DFF 模场分布

五包层光纤(此为色散平坦光纤)的折射率分布如图 5.

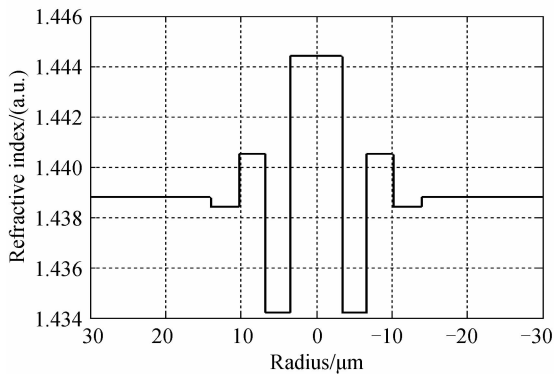


图5 色散平坦光纤的折射率分布

Fig. 5 Refractive index distribution of DFF

通过计算,当波长为  $1.31 \mu\text{m}$  时归一化频率  $V=1.8284 < 2.40483$ ,显然此为单模光纤,只能传输一个模式,给出模场计算结果,如图 6.

根据图 5,内芯的折射率最大,第二层的折射率最小,将光信号的大部分能量约束在内芯,通过图 6 可以明显看出,能量大部分集中在半径小于  $5 \mu\text{m}$  的内芯里面,定性地说明了本文所提出的数值方法是正确的.

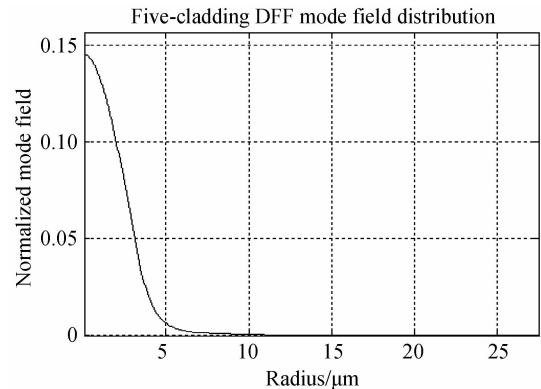


图6 色散平坦光纤的模场分布

Fig. 6 Mode field distribution of DFF

## 5 结论

通过一阶二阶导数的准确数值差分表示,和对折射率分布突变处的半径进行非线性对称网格划分,将任意多包层复杂折射率分布光纤的亥姆霍兹波动方程进行数值化,仿真计算得到正确的归一化模场分布结果,验证了数值方法的正确性.这对于数值仿真计算其它更复杂的问题,例如求复杂折射率分布光纤的色散问题等奠定了基础.

## 参考文献

- [1] 陈根祥. 光波技术基础[M]. 北京:中国铁道出版社,2003.
- [2] GUO Fu-yuan, CHEN Yu-qing, LIN Bin, *et al.* A new eigenfunction expression of step index fiber[J]. *Acta Photonica Sinica*,2003,**32**(9):1074-1078.
- 郭福源,陈钰清,林斌,等. 一种新的阶跃折射率光纤本征函数表达形式[J]. 光子学报,2003,**32**(9):1074-1078.
- [3] WANG Zi-hua, ZHANG Hui, XIAO Zhong-yin. Approximate Ritz-Galerkin method for field distribution of graded-index optical fibers[J]. *Acta Photonica Sinica*,2006,**35**(7):986-989.
- 王子华,张辉,肖中银. 求解梯度光纤模场的近似里兹—伽略金方法[J]. 光子学报,2006,**35**(7):986-989.
- [4] 陈根祥,秦玉文. 光通信技术与应用[M]. 北京:电子工业出版社,1998.

## Numerical Solution of Mode Field of Optical Fiber with Any Multiple Packet Layers

XIA Tao<sup>1</sup>, GUO Hong-li<sup>1</sup>, CHEN Gen-xiang<sup>2</sup>

(1 491 Radio Station, State Administration of Radio, Film and Television, Beijing 100121, China)

(2 Institute of Lightwave Technology, School of Electronic and Information Engineering,  
Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

**Abstract:** The non-linear differential method was applied to the first-order and second-order differential approximation. After non-linear grid dividing of radius and refractive index distribution of any multi-layer fiber, the numeralization of Helmholtz equation was obtained. By solving the characteristic matrix equation using Matlab, accurate mode field distributions of single mode fiber and multimode fiber were obtained, and the normalized mode field of five cladding dispersion flattened fiber was calculated. The results show that the non-linear differential method ensures the accuracy, and also improves the computational speed greatly, which lays a foundation for further study of other characteristics of optical fiber.

**Key words:** Mode field distribution; Helmholtz equation; Non-linear grid division; Approximation of second order differential