

文章编号:1004-4213(2010)07-1257-6

# 基于三投影方向的层析重建分析\*

周文静,徐强胜,于瀛洁

(上海大学 精密机械工程系,上海 200072)

**摘要:**针对传统的层析方法中,投影方向多、系统复杂等特点,提出了基于三个投影方向的层析重建方法.论文选取适用于少投影方向的代数迭代重建算法,采用参量修正方法,能较好的提高重建准确度和抑制椒盐噪音.同时对影响重建图像质量和速度的迭代次数、不同原图像结构对重建图像质量的影响进行了分析,给出了相应分析模拟结果.结果表明,迭代 300 次后,重建结果基本稳定.同时对于具有轴对称结构物体,三个方向投影数据能够较好地实现三维层析重建.分析结果为后期开展的基于单幅层析全息图的三维层析重建实验研究提供了理论依据.

**关键词:**三维层析重建;代数迭代法;三投影方向

**中图分类号:**O434.12

**文献标识码:**A

**doi:**10.3788/gzxb20103907.1257

## 0 引言

层析成像是一种有效获取断层信息、实现三维物体结构测量的技术手段.计算机断层成像技术(Computed Tomography, CT)<sup>[1]</sup>、光学投影层析技术(Optical Projection Tomography, OPT)<sup>[2]</sup>是其中的典型代表,它们在医疗器件、工业测量、生命科学等领域获得广泛应用,充分表明了层析技术的优越性.

CT 技术以及 OPT 技术是以能透射被测物的电磁波为光源,在各个不同角度扫描被测物获得投影图,然后通过三维重建算法实现物体三维结构测量的技术.在实际应用中,往往需要在 180°内获得几十幅甚至是上百幅成均匀分布的投影图<sup>[3]</sup>,才能获得较好的重建效果.这导致了记录方式比较复杂,限制了整个层析重建的快捷性,难以实现变化物体在各个角度的同时记录.

针对上述问题,本文基于 CT 技术,开展了三个投影方向的层析重建分析工作,通过减少投影方向实现系统简化,为未来设计一次性记录装置做理论准备,使其能用于变化物理量的测量.由于代数迭代法是层析重建中的一种重要方法<sup>[4]</sup>,适用于投影数据不完备的场合,本文对其进行了介绍.针对本文中只有三个投影方向的三维重建,选择了适用于三

投影方向的层析重建算法,分析了可能存在的困难和影响重建图像质量的主要因素,并模拟分析了不同结构物体及多层折射率物体的层析重建和迭代次数对重建图像质量的影响.

## 1 CT 层析重建原理

层析是在投影重建的原理上进行的,即在不同方向上得到物体的投影图,然后以投影图为原始图像重建出物体的原始图像<sup>[5]</sup>.图 1 为工作原理示意图<sup>[6]</sup>.

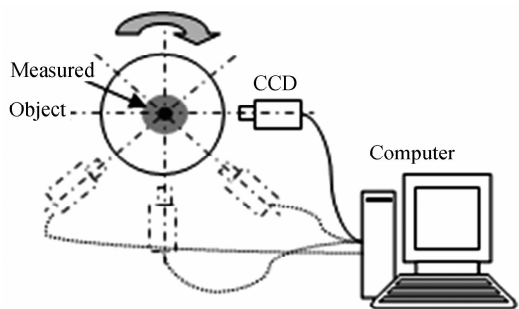


图 1 CT 工作原理示意图  
Fig. 1 Schematic of the CT principle

当一束具有一定能量的射线穿过物体时,由于射线和物体之间会发生光电效应、康普顿效应等一些作用,射线强度将受到射线路径上物质的吸收或散射而发生衰减,如图 2<sup>[7]</sup>.

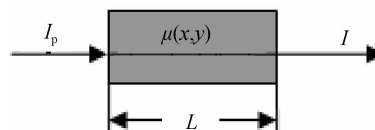


图 2 射线穿越衰减系数为  $\mu$ 、长度为  $L$  的物体  
Fig. 2 Ray passes through an object with attenuation coefficient of  $\mu$  and length of  $L$

\*上海市博士后科研项目(21412900)、上海市科委国际合作项目(09530708700)、上海大学研究生创新基金(SHUCX092195)和上海大学创新基金(A10010909014)资助

Tel:021-56334108

Email:lazybee@shu.edu.cn

收稿日期:2009-07-17

修回日期:2009-10-28

衰减规律遵循比尔定律<sup>[7]</sup>:当入射强度为  $I_0$  的射线穿过衰减系数分布为  $\mu(x, y)$ , 路径长度为  $L$  的物质时, 以强度为  $I$  穿出, 则由比尔定律确定的  $I_0$ 、 $I$  和  $\mu(x, y)$  的关系为

$$I = I_0 \exp[-\int_L \mu(x, y) dx dy] \quad (1)$$

$$\int_L \mu(x, y) dx dy = \ln(I_0/I) \quad (2)$$

以极坐标形式表示时, 方程表示为

$$\int_L \mu(x, y) dx dy = \ln(I_0/I) = p(s, \theta) \quad (3)$$

$p(s, \theta)$  为射线穿过物体后的投影值. 因此通过改变投影角  $\theta$  和路径  $s$ , 就能获得各个不同方向上的投影值, 然后以投影值  $p(s, \theta)$  进行反求衰减系数  $\mu(x, y)$ , 也就是由投影图像来重建出原图像.

## 2 层析重建算法

### 2.1 层析重建基本算法

目前, 层析重建算法可归结为两类: 变换法(或称为卷积法)和迭代法(或称为级数展开法)<sup>[4]</sup>.

变换法是在 Radon 变换的基础上发展而来的. 它的优点是计算量小, 重建速度快, 对完全投影数据能获得很好的重建质量. 但由于变换法存在的内在特性, 使得要重建物体的某一断面必须对物体进行  $180^\circ$  全方位扫描, 采集完整的数据; 如果数据不完整, 如投影角度有限或投影稀疏, 重建的效果将急剧恶化. 而在实际应用过程中, 由于受环境、时间等因素的限制, 往往不可能获得完整的投影数据.

迭代法常被用于不完全投影数据重建, 与前述变换法的区别在于, 它首先将欲重建图像进行离散化, 然后选定一组基函数(或称为初始值), 用这些基函数的适当线性组合来逼近我们希望重建的任何函数  $f(x, y)$  值<sup>[8]</sup>. 如图 3, 为了重建出图像, 它先将原始图像离散化为  $n \times n$  像素的一维数组  $[f_1, f_2 \cdots f_N]$ ,  $N = n \times n$ .

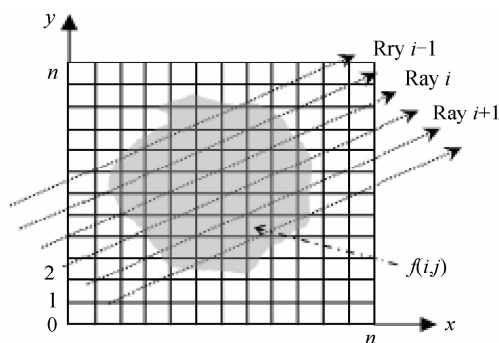


图 3 代数迭代法重建模型

Fig. 3 Reconstruction model of ART

则图像的投影过程可由式(4)表示<sup>[9]</sup>

$$\sum_{j=1}^N \omega_{ij} f_j = p_i \quad (i=1, 2, \dots, M) \quad (4)$$

式中  $p_i$  为第  $i$  条射线的投影值;  $\omega_{ij}$  为加权因子, 即第  $j$  个像素对第  $i$  根射线积分的贡献;  $M$  为投影总数;  $f_j$  代表的是第  $j$  个方格所需求的像素值.

为了求解该问题, 代数迭代法 (Algebraic Reconstruction Technique, ART) 采用线性代数中的逐次超松弛迭代法来求解重建问题, 此过程可由式(5)描述

$$f_j^{(k+1)} = f_j^{(k)} + \lambda \frac{p_i - \sum_{j=1}^J \omega_{ij} f_j^{(k)}}{\sum_{j=1}^J \omega_{ij}^2} \omega_{ij} \quad (5)$$

式中  $k$  为迭代的次数;  $\lambda$  为松弛因子, 一般取  $0 \sim 2$  之间.

因此可以通过测量得到的各个方向上的投影值  $p_i$  和给定的初始值  $f_j^0$ , 实现逼近到所需重建的函数  $f(x, y)$ .

本文由于只有三个投影方向, 投影数据不完全, 因此采用代数迭代法思想进行重建.

### 2.2 本文三投影方向重建算法

在代数迭代法重建中, 一般采用的是简化的加权因子计算方法, 这是由于在加权因子的计算当中, 计算量和存储空间的需求较大, 并且由于投影的方向较多, 简化的加权因子对重建图像的质量影响不大. 但在本文中, 由于只有三个方向的投影, 对每个加权因子的约束方程减少, 采用简化的加权因子对重建图像质量的影响较大. 会产生较严重的噪音, 因此本文采用非简化的加权因子的计算方法, 其计算方法为: 加权因子  $\omega_{ij}$  为第  $i$  条射线在第  $j$  像素内的射线长度<sup>[10]</sup>. 这样就减小了权因子误差对重建图像的影响. 并且由于只有三个投影方向, 加权因子的计算量和处理量相对较小, 因此并没有过多的降低图像重建速度.

同时, 迭代过程中, 每次投影计算的修正值都不相同, 而相邻投影扫描光束穿过同一像素格子时, 其图像会存在一定的模糊, 这种模糊误差修正将会引起重建场的严重噪音. 而采用其它改进的代数迭代法并不能很好的抑制椒盐噪音, 因此本文在每次迭代结束后, 对图像进行中值滤波<sup>[11]</sup>, 以此来减小椒盐噪音, 其设定的滤波窗为  $3 \times 3$  个像素.

### 2.3 算法验证

为了验证该算法对重建结果的影响, 本文对采用传统代数迭代法和修正后代数迭代算法进行重建模拟分析比较, 其模拟的原始图像大小为  $41 \times 41$  像素, 灰度值为 1 的圆. 投影方向为 3 个, 各个投影之间的角度是  $60^\circ$ , 每个方向做 41 个投影射线, 松弛因子  $\lambda$  取 1, 得到了结果如图 4.

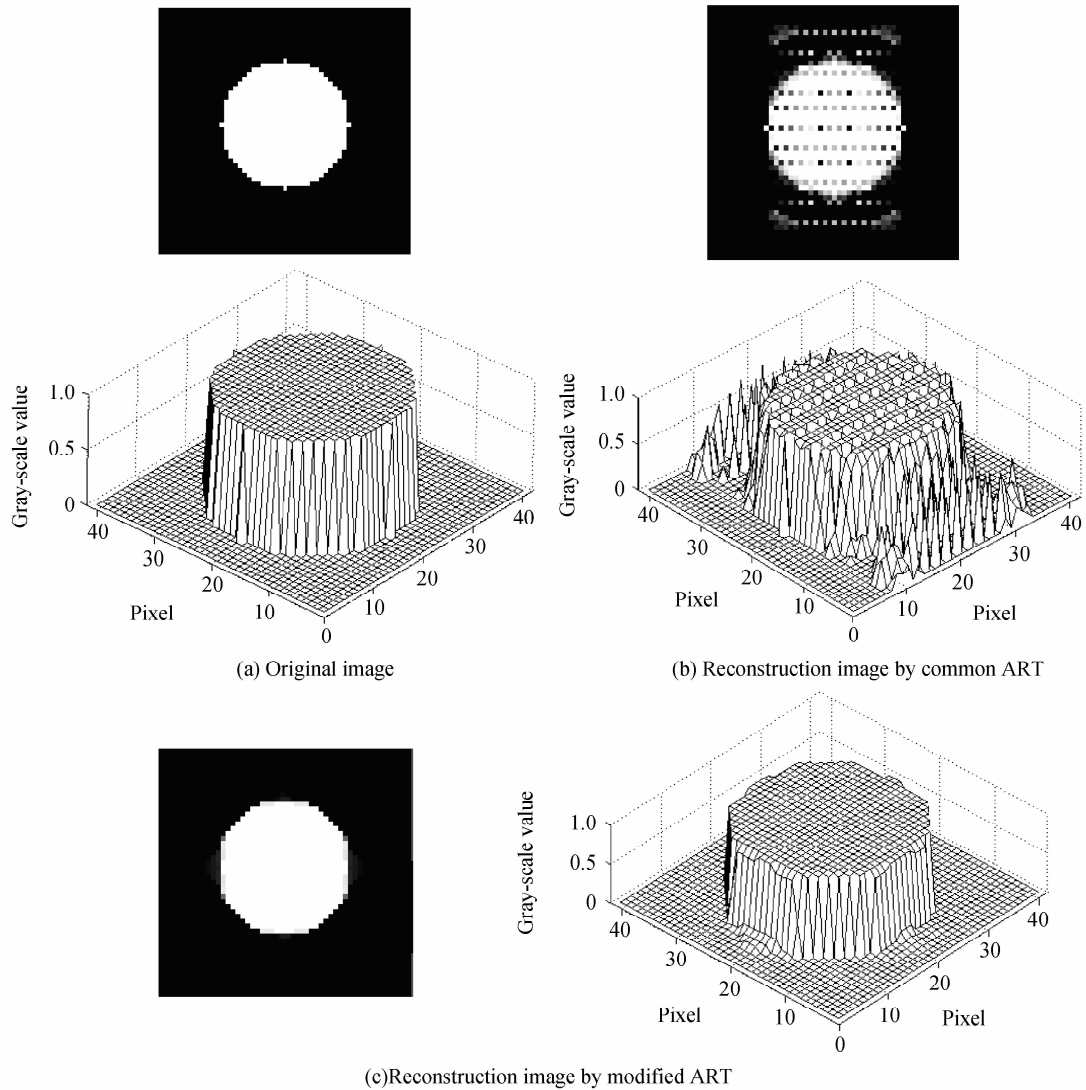


图 4 圆的迭代重建模拟分析比较

Fig. 4 Simulation Analysis of Reconstruction and Comparison of circle by ART

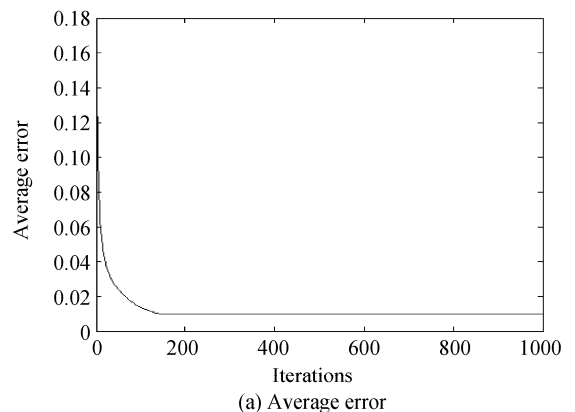
从图 4 可以看出,采用传统代数迭代法进行重建时,得到的重建图像有严重的椒盐噪音.当采用非简化加权因子计算方法和对图像进行滤波后,其重建图像的质量得到了极大的提高.并且,本文对这两种方法的准确度进行了比较,以重建图像与原始图像做差值,然后取差值的平均值和最大值作为评价重建图像准确度的平均误差和最大误差.由此得到传统代数迭代法的平均误差为 0.060 0,而采用后一种方法时,平均误差降低到 0.009 8,最大误差也由前一种的 1.000 降低到 0.881 8.因此,采用非简化加权因子计算方法和对图像进行滤波能提高重建图像的质量.

### 3 重建误差因素影响分析

#### 3.1 迭代次数的影响

在代数迭代过程中,迭代的次数不仅对重建图像质量有较大的影响,对重建的速度也有较大影响.

当迭代次数较少时,重建速度较快,但可能获得的重建图像误差较大;但迭代次数较多时,重建图像质量比较理想,但可能重建速度过慢.因此为了获得一个理想的迭代次数,本文仍然以灰度值为 1 的圆为模拟原图,对迭代次数与重建图像质量的关系进行分析,以平均误差和最大误差来评价重建图像质量.图 5 为迭代次数与重建图像误差的关系图.



(a) Average error

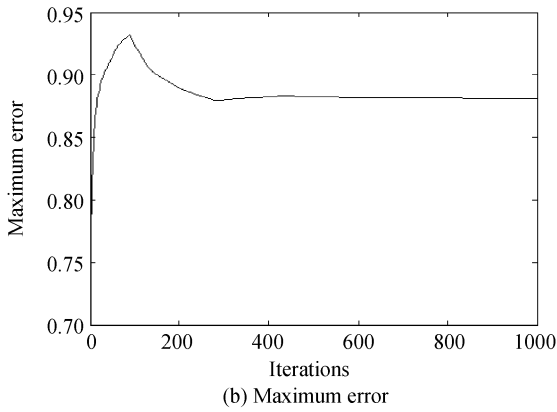


图5 迭代次数与重建图像质量的关系  
Fig. 5 The relationship between the reconstructed image quality and the number of iterations

从图5可以看出,在迭代150次得到的图像的

平均误差就相对较小,如继续迭代,其效果并不明显.对于最大误差,在迭代次数为300次以后就达到了一个相对稳定的值,但它的最大误差较大,这是由于采用中值滤波后,在边界区域会产出一些失真,这导致了最大误差偏大.因此本文将采用的迭代次数为300次.

### 3.2 待重建物体结构特征对重建图像质量的影响

由于在本文中,三维重建的投影方向较少,因此,不同的原始图形可能也会对重建图像的质量有较大的影响.为了分析原始图像对重建图像质量的影响,本文分别对不同的原始图像进行三维重建模拟,其原始图像分别是轴对称灰度图形:同心圆;非轴对称灰度图形:非对称半圆和成梯度变化的正方形.如图6,各个原始图像的大小为 $41 \times 41$ 像素,同

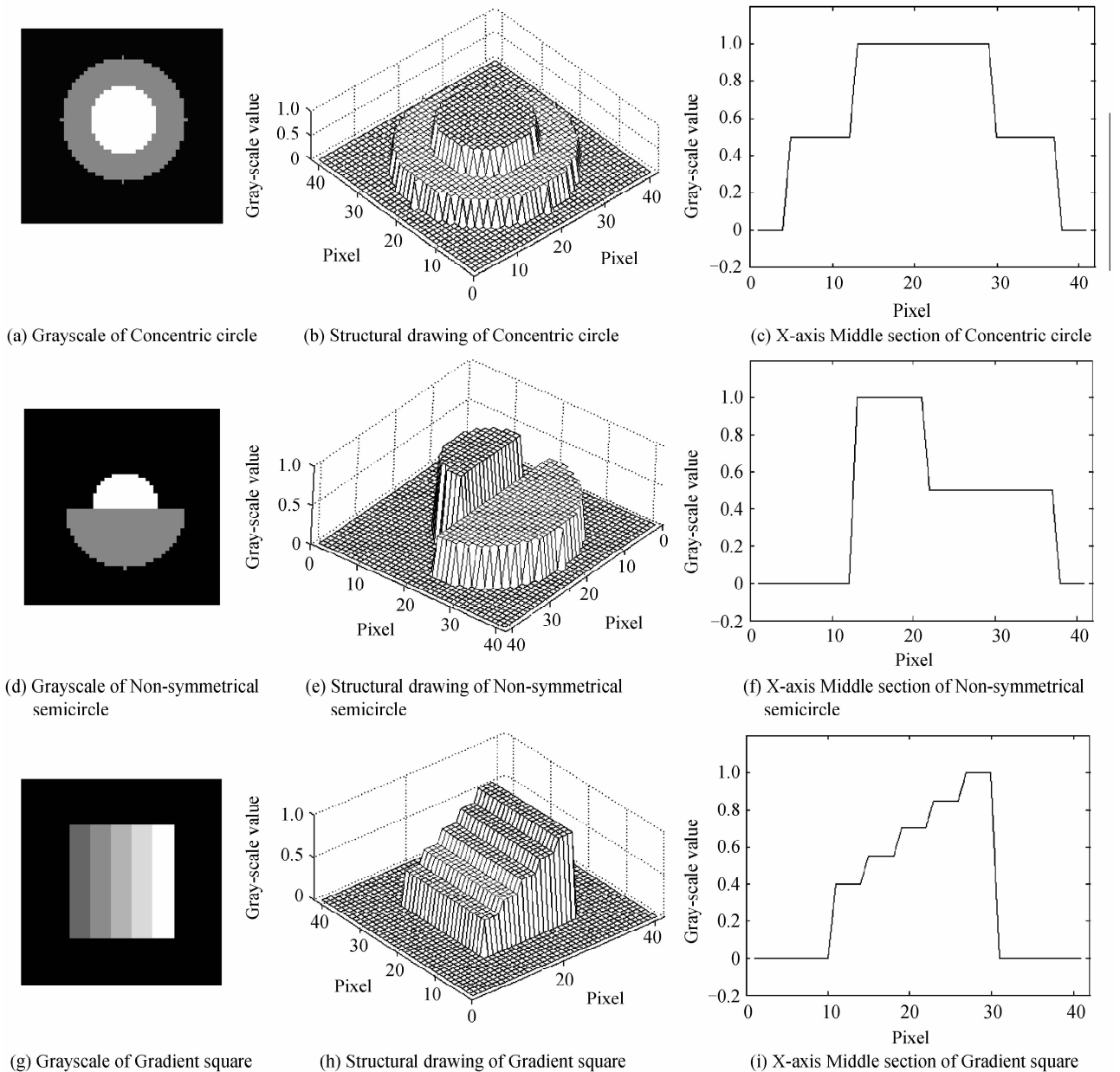


图6 不同结构的原始图

Fig. 6 The original images of the different structures

心圆中小圆直径为 16 个像素宽度,灰度值为 1,大圆直径为 32 个像素宽度,灰度值为 0.5. 非对称半圆中小半圆的直径为 16 个像素宽度,灰度值为 1,大半圆直径为 32 个像素宽度,灰度值为 0.5. 梯度正方形中的最小灰度值为 0.4,最大灰度值为 1,相邻的两个梯度的灰度值变化为 0.15.

图 7 是不同结构的迭代重建图像. 表 1 是各个重建图像的准确度比较. 从中可以看出,在只有三个方向投影的情况下,原始图像为轴对称图形时,重建

得到的图像质量较好,误差较小. 当原始图像为非轴对称图像时,重建得到的图像在边缘区域和过渡区域有些失真和伪影的影响. 这是由于在只有三个方向的投影时,只有三条射线穿过同一像素,因此对该像素只有三个约束方程,当采用方程进行反投影迭代时,如果像素之间的值变化较大,约束方程不够,因此采用逼近原方程的方法而生成的解可能不是唯一的,存在着伪影的情况. 所以在本文中,当内部结构比较复杂时,重建出的图像的伪影就比较严重.

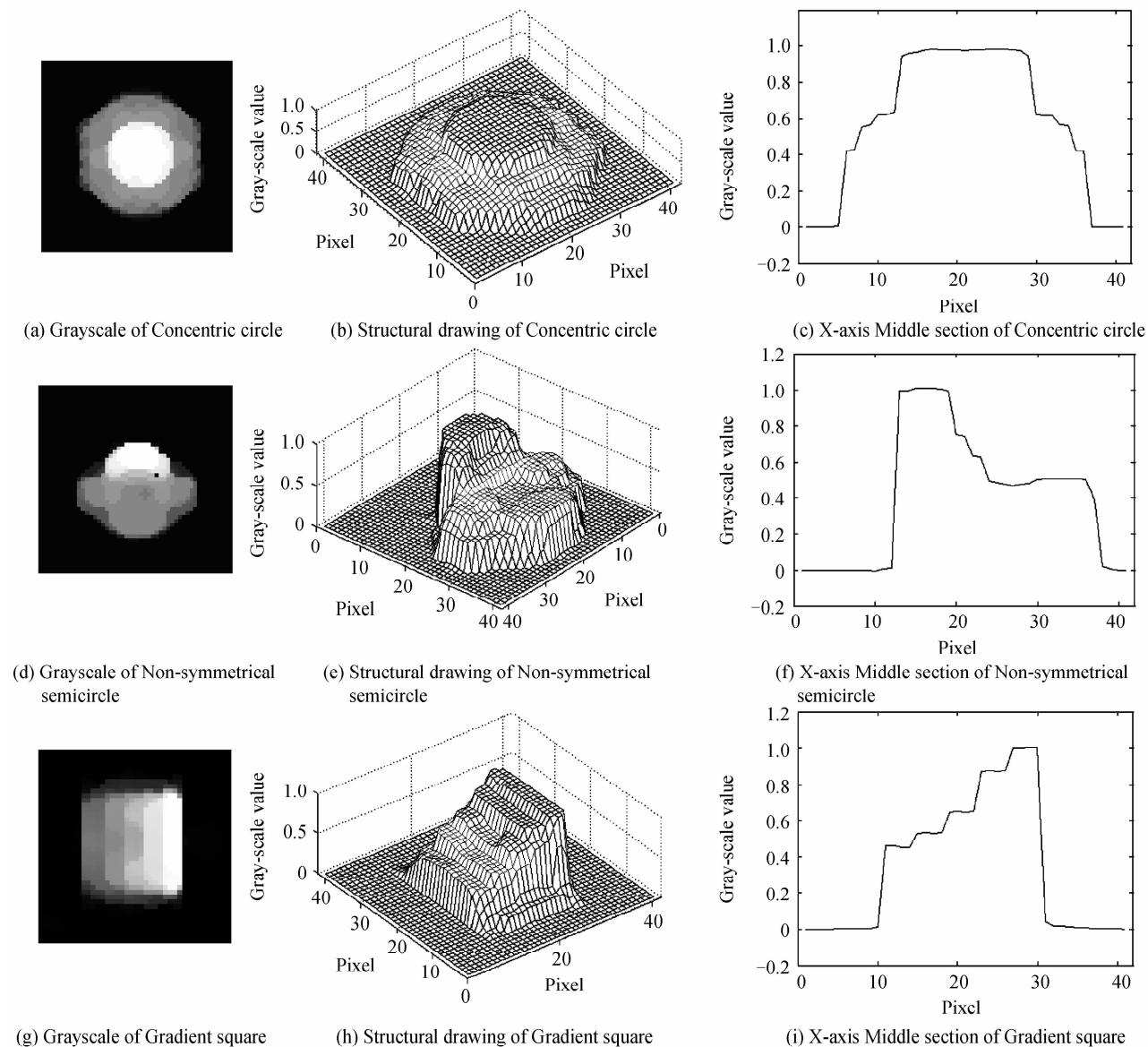


图 7 不同结构的重建图  
Fig. 7 The reconstructed images of the different structures

表 1 三种不同结构重建准确度比较

Table 1 Reconstruction accuracy comparison on three different structures

Structures	Concentric circle	Non-symmetrical semicircle	Gradient square
Average error	0.030 7	0.030 7	0.031 6
Maximum error	0.500 4	0.841 0	0.791 0

从该模拟分析中可以得出,基于三个方向投影的代数迭代法比较适合轴对称或内部结构较简单的物体.

### 4 结论

本文针对三个投影方向的三维层析重建,开展

了相关模拟分析:1)通过采用非简化的权因子计算方法和对图像进行滤波,较好的抑制了椒盐噪声和伪影,提高了重建准确度;2)分析了不同迭代次数对重建图像的影响,得出了在采用300次迭代时,迭代的准确度就相对稳定,因此采用了300次迭代作为迭代的次数,使重建准确度和速度达到了一个理想状态;3)通过对不同结构的物体的重建模拟,得出了基于三个投影方向的层析重建比较适合于内部结构为轴对称或较简单的物体,而对于复杂物体,其重建准确度较低,因此针对复杂物体,如何提高重建图像质量,是后续需要解决的问题;4)本文开展基于三个投影方向上的层析重建模拟分析,为后期即将开展的层析重建实验研究提供了理论依据.论文后续工作中,将针对具有轴对称结构的物体,采用三个投影光束,实现基于单幅层析全息图<sup>[12]</sup>(即三个投影方向的全息信息记录于同一幅全息图中)的三维层析重建实验研究.

#### 参考文献

- [1] SATOS K T. Measurement of temperature in a flame by holographic interferometers and CT technique [C]. Japan, Prepe Book 24th Combust Symp, 1986, 16.
- [2] SHARPE J, AHLGREN U, PERRY P, *et al.* Optical projection tomography as a tool for 3d microscopy and gene expression studies[J]. *Science*, 2002, **296**(5567): 541-545.
- [3] KAK A C, SLANEY M. Principles of computerized tomography imaging[M]. New York: IEEE Press, 1988.
- [4] SHI Du-fang. Image reconstruction technique from few projections for limited view optical tomography[J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics*, 2004, **21**(2): 168-172.  
是度芳. 有限角 CT 少数投影重建图像技术[J]. *量子电子学报*, 2004, **21**(2): 168-172.
- [5] GUREYEV T E, NESTERETS Y, PAVLOV K M, *et al.* Computed tomography with liner shift-invariant optical systems[J]. *Opt Soc Am A*, 2007, **24**(8): 2230-2241.
- [6] LI Hui, WAN Xiong, LIU Tao-li, *et al.* A computed tomography reconstruction algorithm based on multipurpose optimal criterion and simulated annealing theory[J]. *Chinese Optics Letters*, 2007, **5**(6): 340-343.
- [7] CHEN Xi-hui. The basic principle and applied research of holography tomography[D]. Kunming: Kunming University of Science & Technology, 2005.  
陈希慧. 全息 CT 的基本理论及应用研究[D]. 昆明: 昆明理工大学, 2005.
- [8] ZHANG Shun-li. The research and application of industrial CT image algebraic reconstruction [D]. Xi'an: Northwestern polytechnical University, 2004.  
张顺利. 工业 CT 图像的代数重建方法研究及应用[D]. 西安: 西北工业大学, 2004.
- [9] ZYSK A M, JOSH R J, MARKS D L, *et al.* Projected index computed tomography[J]. *Optics Letters*, 2003, **28**(9): 701-703.
- [10] WANG Xu, CHEN Zhi-qiang, XIONG Hua, *et al.* Projection computation based on pixel in simultaneous algebraic reconstruction technique[J]. *Nuclear Electronics & Detection Technology*, 2005, **25**(6): 784-788.  
王旭, 陈志强, 熊华, 等. 联合代数重建算法中基于像素的投影计算方法[J]. *核电子学与探测技术*, 2005, **25**(6): 784-788.
- [11] ZHANG Shun-li, ZHANG Ding-hua, AO Bo, *et al.* Research of image reconstruction from incomplete projection data on ART[J]. *Computer Engineering and Applications*, 2007, **43**(10): 8-10.  
张顺利, 张定华, 熬波, 等. 不完全投影数据图像重建的 ART 算法研究[J]. *计算机工程与应用*, 2007, **43**(10): 8-10.
- [12] ZHOU Wen-jing, XU Qiang-sheng, YU Ying-jie. Compensation for the Quadratic Phase Aberration in Off-axis Digital Micro-holography[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2009, **38**(8): 1973-1976.  
周文静, 徐强胜, 于瀛洁. 数字显微全息中的二次项相位误差的补偿[J]. *光子学报*, 2009, **38**(8): 1973-1976.

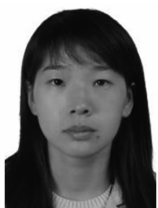
## Analysis of Tomography Reconstruction Based on Three Projections

ZHOU Wen-jing, XU Qiang-sheng, YU Ying-jie

(Department of Precision Mechanical Engineering, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

**Abstract:** In order to overcome some disadvantages of the conventional computer tomography, such as multiple projection directions, complicated systems, the tomography reconstruction based on three projection directions is proposed. Algebraic Reconstruction Algorithm suitable for fewer views is selected and its revised method which can well improve reconstruction precision and restrain salt-pepper noise is applied. The iteration numbers impacting on image quality and velocity and the impact that different shapes of original images on the reconstruction image quality are analyzed and discussed. The simulation results are presented, which show that the stable reconstruction can be gotten after 300 iteration numbers, tomography reconstruction based on three projections can be well realized for the axis-symmetric objects. The analysis results can provide some theory instruction for the further work on digital holographic tomography based on three projections.

**Key words:** 3-D tomography reconstruction; Algebraic reconstruction algorithm; Three projections



**ZHOU Wen-jing** was born in 1975. She received the Ph. D. degree from Shanghai University in 2007. Now she works as a lecturer, and her research interests focus on digital holography microscopy and digital holographic tomography.