

文章编号:1004-4213(2010)05-0897-5

# 重建彩色数字全息图时不同色光物光场的准确重叠研究\*

桂进斌,李俊昌<sup>†</sup>,楼宇丽,彭祖杰,樊则宾

(昆明理工大学,昆明 650093)

**摘要:**将数字全息检测物体表面视为散射面,球面波为参考波,使用角谱重建算法对不同波长照明情况下物平面光波场重建位置进行研究.结果表明,不考虑图像的物理意义时,衍射的一次傅里叶变换重建像中心与物光场频谱的中心相对应,以一次傅里叶变换重建像为参考,可以较好地确定物光场频谱位置,按照可变放大率的角谱重建算法实现不同色光重建场的准确重叠.

**关键词:**全息术;彩色数字全息;角谱理论

**中图分类号:**O438.1

**文献标识码:**A

**doi:**10.3788/gzxb20103905.0897

## 0 引言

在彩色数字全息物光场重建的应用研究中,菲涅耳衍射积分是广泛采用的计算工具,由于该积分可以表示为傅里叶变换及卷积两种形式,存在用一次快速傅里叶变换(Fourier Transform, FFT)的重建算法(Single-FFT, S-FFT)及需要两次快速傅里叶变换的重建算法(Double-FFT, D-FFT)<sup>[1-3]</sup>. S-FFT法计算量小,计算相对简单,是目前广泛采用的方法.然而, S-FFT重建场的尺寸是波长、物体到 CCD 距离以及取样数的函数,通常必须采用不同插值方法才能综合不同色光重建场的信息.目前主要流行两种插值方法:一是对不同波长重建像进行插值处理,使各波长的像平面大小一致,然后综合得到彩色像<sup>[4-6]</sup>.由于重建像尺寸的统一是通过插值实现的,较难避免插值误差;另一种方法是用不同的记录距离来获得不同波长的重建像<sup>[5]</sup>,但这种方法不但容易引入距离调整误差,而且在形成彩色全息图时,必须对记录距离改变引起的记录物光场强度进行相应的补偿才能形成较真实的彩色重建像.最近的研究表明,可变放大率的 D-FFT 重建是能够避免插值误差及便于实现彩色数字全息的一种有效途径<sup>[7]</sup>.

由于可变放大率的 D-FFT 重建需要从数字全息图中获取到达 CCD 的物光频谱,并且,当不同色光的物光场按照预定放大率进行重建后,还必须进

行不同色光重建场强度的准确叠加,才能得到正确的彩色图像.我们将物体表面视为散射面,使用球面波为参考波,理论上研究了 S-FFT 重建像位置与物光频谱位置在各自平面的相对关系.结果表明,衍射的一次傅里叶变换重建像中心与物光场频谱的中心相对应.以 S-FFT 重建像为参考,不但可以较好地确定物光场频谱位置,而且容易实现不同色光重建场的准确重叠.本文选择两种色光照射物体,利用可变放大率的 D-FFT 方法对参考波及重建波均为球面波的彩色数字全息波面重建问题进行了研究,并给出实验证明.

## 1 S-FFT 重建像位置与物光频谱位置关系

图 1 是理论研究的坐标定义图.定义  $x_0, y_0$  是与被测量物体相切的平面,  $x_i, y_i$  是球面波为重现光时物体的像平面.两平面到 CCD 窗口平面  $xy$  的距离分别是  $z_0$  和  $z_i$ .为简明起见,图中未标出照明物光.

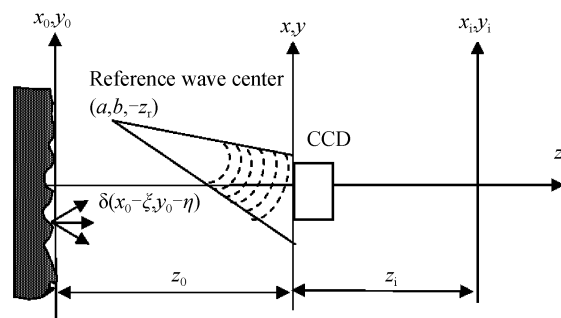


图 1 理论研究坐标定义

Fig. 1 Coordinate definition for theoretical study

根据统计光学理论<sup>[4]</sup>,来自光学粗糙表面的散射光是物体表面的大量散射基元散射光的叠加,可

\* 云南省自然科学基金(2007F028M)和云南省教育厅基金(07Y11344)资助

<sup>†</sup> Tel:0871-5162644

Email:jcli@vip.163.com

收稿日期:2009-07-17

修回日期:2009-10-14

以通过任意给定位置的散射基元的重建研究综合出重建物光场. 引入  $\delta$  函数可将物平面上坐标  $(\xi, \eta)$  处基元的光波场表示为

$$u_0(x_0, y_0; \xi, \eta) = o(\xi, \eta) \delta(x_0 - \xi, y_0 - \eta) \cdot \exp[j\varphi_0(\xi, \eta)] \quad (1)$$

式中  $j = \sqrt{-1}$ ,  $o(\xi, \eta)$  是随机振幅,  $\varphi_0(\xi, \eta)$  是取值范围  $-\pi \sim \pi$  的随机相位. 到达 CCD 平面的光波场可以根据菲涅耳衍射积分及  $\delta$  函数的筛选性质得到

$$u_\delta(x, y; \xi, \eta) = \frac{\exp[jkz_0 + j\varphi_0(\xi, \eta)]}{j\lambda z_0} o(\xi, \eta) \cdot \exp\left\{\frac{jk}{2z_0}[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]\right\} \quad (2)$$

式中,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  是光波长.

设到达 CCD 的参考光是波束中心在  $(a, b, -z_r)$ , 振幅为  $A_r(x, y)$  的球面波为

$$R(x, y) = A_r(x, y) \exp\left\{\frac{jk}{2z_r}[(x-a)^2 + (y-b)^2]\right\} \quad (3)$$

CCD 平面上物光及参考光干涉场强度则为

$$I_\delta(x, y) = |u_\delta(x, y)|^2 + A_r^2(x, y) + R(x, y) \cdot u_\delta^*(x, y) + R^*(x, y) u_\delta(x, y) \quad (4)$$

设用单位振幅球面波  $R_c(x, y) = \exp\left[j\frac{k}{2z_c}(x^2 + y^2)\right]$  照射数字全息图,  $w(x, y)$  是 CCD 的窗口函数, 形成的衍射波则为

$$I_\delta(x, y) R_c(x, y) w(x, y) = w(x, y) \cdot \exp\left[j\frac{k}{2z_c}(x^2 + y^2)\right] \left[|u_\delta(x, y)|^2 + A_r^2(x, y) + R(x, y) u_\delta^*(x, y) + R^*(x, y) u_\delta(x, y)\right] \quad (5)$$

展开得

$$I_\delta(x, y) R_c(x, y) w(x, y) = \left[|u_\delta(x, y)|^2 + A_r^2(x, y)\right] w(x, y) \exp\left[j\frac{k}{2z_c}(x^2 + y^2)\right] + u_\delta(x, y) R^*(x, y) w(x, y) \exp\left[j\frac{k}{2z_c}(x^2 + y^2)\right] + u_\delta^*(x, y) R(x, y) w(x, y) \exp\left[j\frac{k}{2z_c}(x^2 + y^2)\right] \quad (6)$$

把式(6)的等式右边第三项代入衍射距离为  $z_i$  的非涅耳积分计算公式, 注意到当  $z = z_i$  是像平面时有<sup>[4,7-8]</sup>

$$\frac{1}{z_i} = \frac{1}{z_0} - \frac{1}{z_r} - \frac{1}{z_c} \quad (7)$$

令  $M = z_i/z_0$ , 以及

$$C_{\varphi_0}(x_i, y_i) = o(\xi, \eta) \exp\{jk(z_i - z_0) - j\varphi_0(\xi, \eta)\} \cdot \exp\{jk/2\left[\frac{1}{z_r}(a^2 + b^2) + \frac{1}{z_i}(x_i^2 + y_i^2) - \frac{1}{z_0}(\xi^2 + \eta^2)\right]\},$$

可以得到

$$I'_\delta(x_i, y_i) = (\lambda z_i)^2 C_{\varphi_0}(x_i, y_i) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda z_i x, \lambda z_i y) A_r(\lambda z_i x, \lambda z_i y) \exp\{-j2\pi[(x_i + \frac{z_i a}{z_r} - M\xi)x + (y_i + \frac{z_i b}{z_r} - M\eta)y]\} dx dy \quad (8)$$

上式是  $A_r(\lambda z_i x, \lambda z_i y)$  照射下的矩形孔  $w(\lambda z_i x, \lambda z_i y)$  的夫琅和费衍射图像. 由于  $A_r(\lambda z_i x, \lambda z_i y)$  是坐标的缓变函数, 式(8)事实上可以视为矩形孔  $w(\lambda z_i x, \lambda z_i y)$  的夫琅和费衍射图像, 衍射图像为中心在  $(-z_i a/z_r + M\xi, -z_i b/z_r + M\eta)$  处为极大值的弥散斑. 由此可见, 将物平面视为在不同位置的散射基元的集合, 根据式(7)计算出重建光波面半径  $z_c$ , 将能重建中心为  $(-z_i a/z_r, -z_i b/z_r)$ , 横向放大率是  $M$  的像. 当用 FFT 计算时, 在重建像平面上采样间距为<sup>[3,4]</sup>

$$\Delta x_i = \Delta y_i = \frac{\lambda z_i}{\Delta L}$$

像平面上以像素为单位的坐标则为

$$\left(\frac{-z_i a/z_r + M\xi \Delta L}{\lambda z_i}, \frac{-z_i b/z_r + M\eta \Delta L}{\lambda z_i}\right) \quad (9)$$

现研究 S-FFT 重建平面像相对位置与到达 CCD 的物光频谱相对位置的关系. 对式(6)两边作关于  $x, y$  的傅里叶变换

$$F\{I_\delta(x, y) R_c(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[|u_\delta(x, y)|^2 + A_r^2(x, y)\right] w(x, y) \exp\left[j\frac{k}{2z_c}(x^2 + y^2)\right] \exp[-j2\pi(f_x x + f_y y)] dx dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_\delta(x, y) R^*(x, y) w(x, y) \exp\left[j\frac{k}{2z_c}(x^2 + y^2)\right] \exp[-j2\pi(f_x x + f_y y)] dx dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_\delta^*(x, y) R(x, y) w(x, y) \exp\left[j\frac{k}{2z_c}(x^2 + y^2)\right] \exp[-j2\pi(f_x x + f_y y)] dx dy$$

把式(2)及式(3)代入上式, 根据  $\delta$  函数的卷积性质及 sinc 函数与  $\delta$  函数的关系可得<sup>[4,7]</sup>

$$F\{I_\delta(x, y) R_c(x, y)\} \approx G_0(f_x, f_y) + G\left(f_x + \left(\frac{\xi}{z_0 \lambda} - \frac{a}{z_r \lambda}\right), f_y + \left(\frac{\eta}{z_0 \lambda} - \frac{b}{z_r \lambda}\right)\right) +$$

$$G' \left( f_x - \left( \frac{\xi}{z_0 \lambda} - \frac{a}{z_r \lambda} \right), f_y - \left( \frac{\eta}{z_0 \lambda} - \frac{b}{z_r \lambda} \right) \right) \quad (10)$$

式中

$$G_0(f_x, f_y) = F \left\{ \left[ \left| \frac{o(\xi, \eta)}{\lambda z_0} \right|^2 + A_r^2(x, y) \right] \exp \left[ \frac{jk}{2z_c} (x^2 + y^2) \right] \right\} \quad (10a)$$

$$G(f_x, f_y) = D_1(\xi, \eta) F \left\{ A_r(x, y) \exp \left[ \frac{jk}{2} \left( \frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_c} - \frac{1}{z_r} \right) (x^2 + y^2) \right] \right\} \quad (10b)$$

$$G'(f_x, f_y) = D_2(\xi, \eta) F \left\{ A_r(x, y) \exp \left[ \frac{jk}{2} \left( \frac{1}{z_r} + \frac{1}{z_c} - \frac{1}{z_0} \right) (x^2 + y^2) \right] \right\} \quad (10c)$$

式中

$$D_1(\xi, \eta) = \frac{o(\xi, \eta) \exp [jkz_0 + j\varphi_0(\xi, \eta)]}{j\lambda z_0} \exp \left\{ \frac{jk}{2} \left[ \frac{(\xi^2 + \eta^2)}{z_r} - \frac{(a^2 + b^2)}{z_0} \right] \right\},$$

$$D_2(\xi, \eta) = \frac{o(\xi, \eta) \exp [-jkz_0 - j\varphi_0(\xi, \eta)]}{-j\lambda z_0} \exp \left\{ \frac{jk}{2} \left[ \frac{(a^2 + b^2)}{z_0} - \frac{(\xi^2 + \eta^2)}{z_r} \right] \right\}$$

为复常量. 以上三式分别是零级衍射光频谱、物光频谱和共轭物光频谱. 上式表明, 物点  $(\xi, \eta)$  到达 CCD 平面光波场的频谱分布是能量集中在  $(\frac{\xi}{z_0 \lambda} - \frac{a}{z_r \lambda}, \frac{\eta}{z_0 \lambda} - \frac{b}{z_r \lambda})$  附近的弥散斑. 设 CCD 平面宽度为  $\Delta L$ , 则频域采样间距  $\Delta f_x = \Delta f_y = \frac{1}{\Delta L}$ , 频率平面上以像素为单位的坐标为

$$\left( \frac{\xi}{z_0 \lambda} \Delta L - \frac{a}{z_r \lambda} \Delta L, \frac{\eta}{z_0 \lambda} \Delta L - \frac{b}{z_r \lambda} \Delta L \right) \quad (11)$$

将  $M = z_i/z_0$  代入式(9), 可以发现式(9)与式(11)完全一致. 因此, 在不考虑物理意义, 并以像素为单位时, 只要保持同样的采样数, 物点  $(\xi, \eta)$  的 S-FFT 菲涅耳重建像和其到达 CCD 平面时物光场分布的频谱中心是一致的.

## 2 物光频谱中心及选通滤波器的选择

由式(10)及上述的结果讨论, 可选择物体上某一特征点为像的频谱中心参考点, 把频谱中心移到原点, 周边补零形成与 CCD 面阵一致的计算区域宽度, 可以重建物光场. 将光波场视为某一数量的散射基元的散射光的组合. 在衍射距离为  $z_i$  处, 物光场的重建公式可由下式计算出<sup>[4]</sup>

$$O'(x_i, y_i) = F^{-1} \left\{ \left[ \sum_j G'_j \left( f_x - \frac{\xi_j}{z_0 \lambda}, f_y - \frac{\eta_j}{z_0 \lambda} \right) \right] \cdot \exp \left\{ jkz_i \sqrt{1 - \lambda^2 (f_x^2 + f_y^2)} \right\} \right\} \quad (12)$$

然而, 上式表明物光频谱强度图像是弥散斑的叠加, 很难在全息图的频谱图像中准确确定物光频谱的中心. 而对于彩色数字全息及多波长照明的数字全息检测, 准确确定不同色光物光频谱的中心, 让重建物光场以同一放大率在相同的位置进行叠加是实现彩色物像重建或综合检测信息的关键.

基于前面的分析, 可根据 S-FFT 重建像, 选择物体某一特征点为参考点, 然后在频谱面上以此参考点为物光频谱中心, 选择恰当的滤波半径, 对频谱进行选通滤波. 然后再把物光频谱中心移到原点, 滤波半径外的区域补零形成和 CCD 面阵一致的计算区域, 利用式(12), 得到放大率为  $M$  的重建物光场. 不同色光选择各自 S-FFT 重建像上的对应特征点作为频谱参考点, 便能在重建物平面上同一位置重建同样放大率的像, 按三基色原理叠加在一起, 就可实现彩色全息重建像的准确叠加.

## 3 实验验证

为验证上述理论, 我们进行相关实验(实验光路如图 2). 实验中使用波长为 532 nm(绿光)及 650 nm(红光)的 YAG 激光器构成两组物光及参考光. 物光使用球面波照射物体表面形成散射光, 参考光为球面波. 采用单次记录的方式使用单色 CCD 分别记录得两种色光的全息图, 被测量物体是彩色小狗的头部, 物体表面到达 CCD 平面的距离为 435 mm, 参考光波面半径为 485 mm. CCD 像素宽度 0.004 65 mm, 有效像素 1 024 × 1 024. 为方便实验, 在物上点一特征点, 并以此作为选择频谱中心时的参考点(图 3 中两眼中间的黑点). 首先对两种色

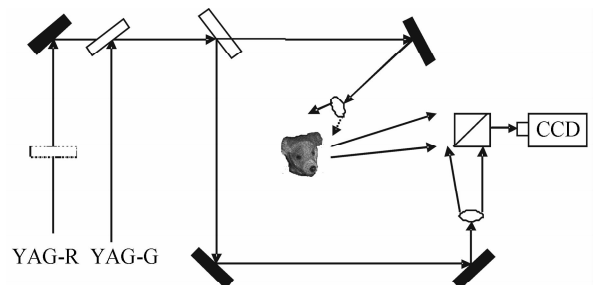


图 2 实验光路图

Fig. 2 Experimental configuration

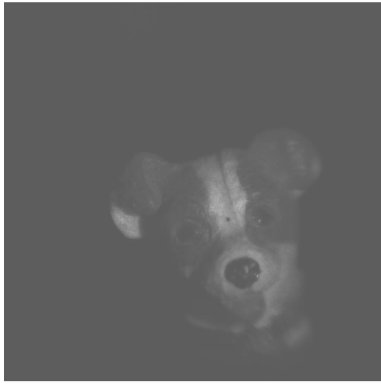


图3 物体像  
Fig. 3 Image of object

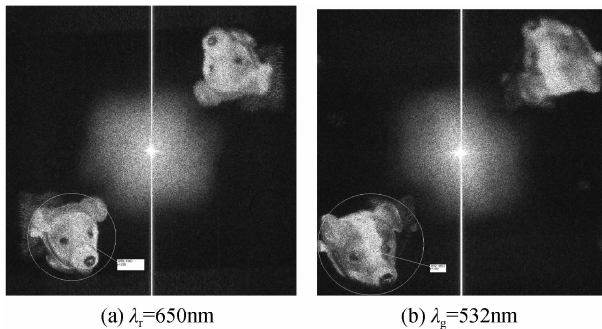


图4 S-FFT 重建像  
Fig. 4 Reconstruction image of S-FFT

光照射下的全息图进行放大率为 0.1 的 S-FFT 计算,在像平面上选择同一特征点(见图 4 中两眼中间

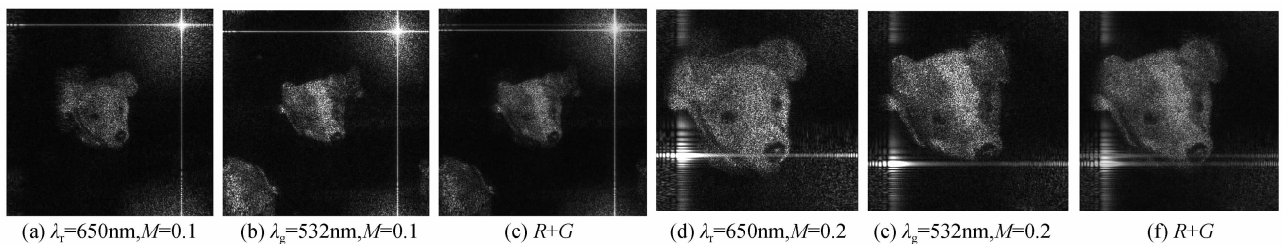


图6 实验结果  $z_r=485\text{ mm}$ ,  $z_o=435\text{ mm}$ ( $4.76\text{ mm}\times 4.76\text{ mm}$ )  
Fig. 6 Result of experimental  $z_r=485\text{ mm}$ ,  $z_o=435\text{ mm}$ ( $4.76\text{ mm}\times 4.76\text{ mm}$ )

## 4 结论

彩色数字全息研究中,为利用可变放大率的重建算法实现不同色光重建像的准确叠加,本文将数字全息检测物体表面视为散射面,使用球面波为参考波,理论分析了 S-FFT 重建像位置与数字全息图物光频谱位置的相对关系.结果表明,可以用 S-FFT 重建像为参考确定全息图物光频谱中心,实现不同色光的同一放大率重建像的准确叠加,最终合成可变放大率的彩色重建像.所进行的工作对彩色数字全息及多波长照明的数字全息检测研究提供了一个有益的参考.

### 参考文献

[1] SHEN Fa-bin, WANG An-bo, Fast-Fourier-transform based numerical integration method for the Rayleigh-Sommerfeld diffraction formula[J]. *Appl Opt*, 2006, **45**(6): 1102-1110.

的黑点)作为物光频谱中心参考点,用鼠标选择该点后记录下坐标值(分别为(259, 816)及(202, 865)),然后在全息频谱上选择相应坐标点为频谱中心(见图 5),选择一定半径( $R_r=156$ ,  $R_g=180$ )的区域(要保证把像全装入区域),把频谱中心移到原点,根据式(12),分别得红光和绿光的重建像(图 6 中的(a)、(b)),然后把两幅图像分别作为 R、G 分量进行彩色重建像的合成,得到彩色重建像(图 6 中的(c)).然后使用同样的步骤,改变放大率为 0.2,得到结果如图 6 中(d)、(e)、(f).从实验结果中可以看出,频谱参考中心及滤波半径选择恰当,可以方便地重建出彩色像.

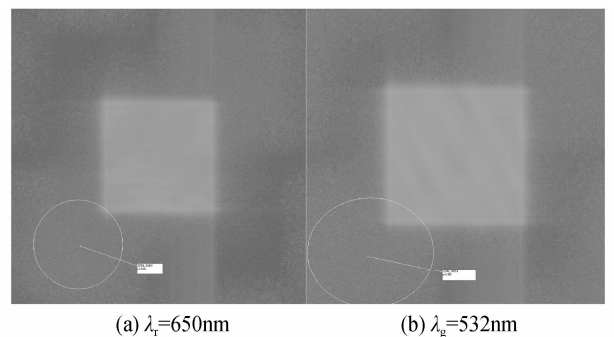


图5 物光频谱中心及滤波半径选择  
Fig. 5 Select of frequency spectrum center and filter radius

[2] LI Jun-chang, LOU Yu-li, GUI Jin-bin. Three methods for scattering wave fields reconstruction by convolution[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2009, **38**(5): 1176-1181.  
李俊昌,楼宇丽,桂建斌. 散射光波场卷积重建的三种方法研究[J]. *光子学报*, 2009, **38**(5): 1176-1181.

[3] WANG Hua-ying, WANG Da-yong, XIE Jian-jun, et al. Comparative studies for reconstruction algorithms of object wave front in microscopic digital holography [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2007, **36**(6): 1023-1027.  
王华英,王大勇,谢建军,等. 显微数字全息中物光波前重建方法研究和比较[J]. *光子学报*, 2007, **36**(6): 1023-1027.

[4] XIONG Bing-heng, LI Jun-chang. Holography interference measure[M]. Beijing: Science Press, 2009.  
熊秉衡,李俊昌. 全息干涉计量[M]. 北京: 科学出版社, 2009.

[5] ZHANG Wei, Lü Xiao-xu, YANG Feng-tao, et al. Multi-wavelength digital holography reconrded by monochromatic CCD and color reconstructed image display[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2007, **36**(11): 2003-2007.  
张维,吕晓旭,杨锋涛,等. 单色 CCD 记录多波长数字全息图及再现像彩色显示[J]. *光子学报*, 2007, **36**(11): 2003-2007.

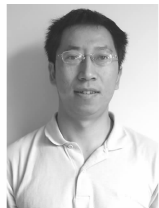
- [6] ZHAO Jian-lin,JIANG Hong-zhen,DI Jiang-lei. Recording and reconstruction of a color holographic image by using digital lensless Fourier transform holography [J]. *Optics Express*, 2008, **16**(4):2514-2519.
- [7] LI Jun-chang, TANKAM Patrice, PENG Zu-jie, *et al.* Digital holographic reconstruction of large objects using a convolution approach and adjustable magnification [J]. *Optics Letters*, 2009, **34**(5):572-574.
- [8] CHEN Jia-bi, SU Xian-yu. Optical information technique-Principles & applications[M]. Beijing: Higher Education Press, 2002:368-375.  
陈家璧,苏显渝. 光学信息技术原理及应用[M]. 北京:高等教育出版社,2002,368-375.

## Accurate Overlapping of Multi-wavelength Object Wave Fields in Color Digital Hologram Reconstruction

GUI Jin-bin, LI Jun-chang, LOU Yu-li, PENG Zu-jie, FAN Ze-bin  
(Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

**Abstract:** Regarding the test object surface as scattering plane, and using spherical wave as reference wave, with different wavelength illumination, reconstruction position of object plane wave field is studied by using Angular spectrum theory. The result shows that, when the physical meaning of the image is not considered, diffraction image center reconstruction with S-FFT (Single Fourier Transform) is corresponding to the frequency spectrum center of object wave field. Taking the S-FFT reconstruction image as a reference, the location of the object wave field spectrum can be well determined, then the reconstruction field of different wavelength can be accurate overlapped with adjustable magnification reconstruction Angular spectrum method.

**Key words:** Holography; Colore digital holography; Angular spectrum theory



**GUI Jin-bin** was born in 1974. He received the M. S. degree from Kunming University of Science and Technology in 2004. Now he is a lecturer, and his main research interests focus on digital optical information processing and image processing.



**LI Jun-chang** was born in 1945. He graduated from the Department of Physics at Yunnan University in 1967. Now he is a Doctoral Supervisor at Kunming University of Science and Technology and at three France engineering Universities (Ecole Centrale de LYON, INSA de LYON, Université du MAINE). His research interests focus on optical information processing and interaction between laser and materials.