

文章编号:1004-4213(2010)04-0734-5

# 耗散腔中 $\Lambda$ 型原子与光场 Raman 相互作用体系的线性熵\*

赖振讲<sup>1</sup>, 赵合运<sup>2</sup>, 张利<sup>1</sup>, 刘宝平<sup>1</sup>, 贺树芳<sup>1</sup>

(1 河南师范大学 物理系, 河南 新乡 453007)

(2 新乡医学院 生命科学技术系, 河南 新乡 453007)

**摘要:**为了研究耗散腔中原子与光场 Raman 相互作用体系中子系统间的熵交换, 利用超算符方法通过对系统主方程求解, 讨论了光场强度、腔的耗散系数及原子两能级的 Stark 位移对线性熵的影响. 结果表明: 光场越强, 光场与其它子系统进行熵交换的时间越长; 腔耗散系数越大, 熵交换时间越短; 改变两能级间的 Stark 位移使原子和场之间的耦合增强, 而系统的耗散系数不变, 此时, 系统的熵交换加快且其稳态值变小.

**关键词:**  $\Lambda$  型三能级原子; 线性熵; 耗散腔; Stark 位移

中图分类号: O431

文献标识码: A

doi:10.3788/gzxb20103904.0734

## 0 引言

自从熵的概念引入量子光学领域以来, 光场与原子相互作用系统中熵的演化规律就引起了人们的广泛关注<sup>[1-3]</sup>. 因为熵的特性可以明确地揭示光场与原子以及原子之间的纠缠程度和量子态的纯度. Zurek<sup>[4-6]</sup>等人利用熵研究了环境影响下的谐振子系统从初始纯态演化到混合态的特性, 发现线性熵能够更加简洁、清晰地反映量子态的纯度变化. 从量子信息学的观点来看, 线性熵是一种关于系统中量子态描述时信息缺乏的量度. 并且熵还可以表征系统中子系统间的纠缠度, 也可以是系统信息量的测度<sup>[6-9]</sup>. 线性熵作为 Von Neumann 熵在数学上的一种简化, 并不改变系统定性的物理结论. 当系统由纯态变为混合态时伴随着有效信息的损失, 这种特性可以由熵交换特性说明. 所以线性熵在理解存在耗散的量子系统中的经典和量子信息的差异以及研究两个系统的纠缠方面具有独特的优越性. 最近 Xiang and Xiong<sup>[7]</sup>利用线性熵的性质研究了系统中的熵交换和相干信息的变化等系统的固有特性. 但是, 在这些研究中都没有考虑环境耗散的影响. 而在实际情况中, 光场与原子相互作用的系统在演化过程中总伴随着腔场损耗的出现. 因此, 考虑耗散腔中  $\Lambda$  型三能级原子与光场相互作用体系的量子特性就更有实际意义.

本文考虑环境耗散的影响, 利用描述环境作用的超算符方法, 对耗散腔中  $\Lambda$  型三能级原子与光场喇曼相互作用体系的主方程进行了精确求解, 计算了原子、光场以及系统线性熵, 并结合图形讨论光场强度、腔的耗散系数以及两能级间的 Stark 位移对线性熵的影响.

## 1 理论模型及线性熵

考虑图 1 的一个  $\Lambda$  型三能级原子与腔内单模相干光耦合.  $|g\rangle, |e\rangle$  是两个简并的低能级,  $|f\rangle$  是激发态, 在大失谐条件下, 设  $\hbar = 1$ , 系统的有效 Hamiltonian 量在相互作用绘景中为<sup>[10]</sup>

$$H = \beta_2 a^+ a |e\rangle\langle e| + \beta_1 a^+ a |g\rangle\langle g| + ga^+ a (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|) \quad (1)$$

式中,  $a^+, a$  为光场的产生和消灭算符;  $\beta_1 = g_1^2/\Delta, \beta_2 = g_2^2/\Delta, \beta_1, \beta_2$  是描述两能级  $|g\rangle, |e\rangle$  的 Stark 位移参量<sup>[11-12]</sup>;  $\Delta$  是失谐量, 当  $\Delta$  远大于能级之间的 Rabi 频率时, 原子的上能级的影响可绝热消去.  $g_1, g_2$  是腔模和原子跃迁 ( $|g\rangle \leftrightarrow |f\rangle, |e\rangle \leftrightarrow |f\rangle$ ) 之间的耦合系数.  $g = \sqrt{\beta_2 \beta_1}$  描述  $|e\rangle$  和  $|g\rangle$  之间的简并 Raman 跃迁过程的耦合强度.

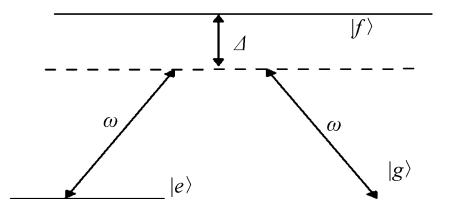


图 1  $\Lambda$  型三能级原子与单模光场相互作用示意图  
Fig. 1 Schematic diagram of the interaction of a  $\Lambda$ -type three-level atom and one mode field

\* 河南省自然科学基金(082300410030)资助

Tel: 13569808749

Email: laizhenjiang@sina.com

收稿日期: 2009-08-07

修回日期: 2009-10-06

当腔场存在幅值损耗时系统的主方程为

$$\frac{d}{dt}\rho_{a-f}(t) = -i[H, \rho_{a-f}(t)] + D\rho_{a-f}(t) \quad (2)$$

在绝对零度下, 写为<sup>[13]</sup>

$$D\rho_{a-f}(t) = \kappa[2a\rho_{a-f}(t)a^+ - a^+a\rho_{a-f}(t) - \rho_{a-f}(t)a^+a] \quad (3)$$

式中  $\kappa$  为腔的耗散系数.

为了数学上处理方便, 定义两个新的原子态

$$\begin{aligned} |+\rangle &= (\sqrt{\beta_2}|e\rangle + \sqrt{\beta_1}|g\rangle)/\sqrt{\eta} \\ |-\rangle &= (\sqrt{\beta_1}|e\rangle - \sqrt{\beta_2}|g\rangle)/\sqrt{\eta} \end{aligned} \quad (4)$$

式中

$$\eta = \beta_1 + \beta_2 \quad (5)$$

当原子初始处于  $|e\rangle$ , 光场处于相干态  $|\alpha\rangle =$

$$\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$|\Psi_{a-f}(0)\rangle = |\Psi_a(0)\rangle \otimes |\Psi_f(0)\rangle = |e\rangle \otimes |\alpha\rangle^{[14]},$$

则相应的初始密度算符为

$$\begin{aligned} \rho_{a-f}(0) &= \frac{1}{\eta} (\beta_2 |+\rangle\langle +| + \sqrt{\beta_1\beta_2} |+\rangle\langle -| \\ &\quad + \sqrt{\beta_1\beta_2} |-\rangle\langle +| + \beta_1 |-\rangle\langle -|) \end{aligned} \quad (6)$$

利用超算符方法解主方程, 系统的密度算符在  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  构成的完备 Hilbert 空间中表示为

$$\rho_{++}(t) = Ae^{-2\kappa t} |\alpha\rangle\langle\alpha| \quad (7)$$

$$\rho_{+-}(t) = Be^{\Gamma(t) + i\Theta(t) - 2\kappa t} |\alpha\rangle\langle\alpha e^{-i\eta t}| \quad (8)$$

$$\rho_{-+}(t) = Be^{\Gamma(t) - i\Theta(t) - 2\kappa t} |\alpha e^{-i\eta t}\rangle\langle\alpha| \quad (9)$$

$$\rho_{--}(t) = Ce^{-2\kappa t} |\alpha e^{-i\eta t}\rangle\langle\alpha e^{-i\eta t}| \quad (10)$$

式中

$$\Gamma(t) = \left\{ \frac{2\kappa e^{-2\kappa t} (\eta \sin \eta t - 2\kappa \cos \eta t) + 4\kappa^2}{4\kappa^2 + \eta^2} + (e^{-2\kappa t} - 1) \right\} |\alpha|^2 \quad (11a)$$

$$\Theta(t) = \frac{2\kappa [\eta e^{-2\kappa t} (\eta \cos \eta t + 2\kappa \sin \eta t)]}{4\kappa^2 + \eta^2} |\alpha|^2 \quad (11b)$$

$$A = \beta_2/\eta, \quad B = \sqrt{\beta_1\beta_2}/\eta, \quad C = \beta_1/\eta \quad (12)$$

根据 Zurek<sup>[4]</sup> 等人定义的线性熵:  $S = 1 - \text{Tr}(\rho^2)$ , 式中  $\rho$  为密度算符. 对于纯态  $S = 0$ ; 对于混合态  $0 < S < 1$ . 线性熵作为 Von Neumann 熵在数学上的一种简化, 并不改变系统定性的物理结论. 当系统由纯态变为混合态时伴随着有效信息的损失, 所以线性熵在理解存在耗散的量子系统中的经典和量子信息差异以及研究两个系统的纠缠方面显示了其独特的优越性. 本文也利用线性熵来讨论光场、原子和系统的纯度演化. 由式(7)~(12)可得系统的线性熵

$$S = 1 - \text{Tr}(\rho_{a-f}(t))^2 = 1 - (A^2 + C^2) - 2B^2 e^{2\Gamma(t)} \quad (13)$$

将系统的密度算符对原子求迹后得到光场的密度算符, 经计算可得光场的线性熵为

$$S_f = 1 - \text{Tr}_f(\rho_f(t))^2 = 1 - (A^2 + C^2) - 2AC e^{2\Xi(t)} \quad (14)$$

式中

$$\Xi(t) = |\alpha|^2 e^{-2\kappa t} (\cos \eta t - 1) \quad (15)$$

同样, 原子的线性熵可表示为

$$S_a = 1 - \text{Tr}_a(\rho_a(t))^2 = 1 - (A^2 + C^2) - 2B^2 e^{2[\Xi(t) + \Gamma(t)]} \quad (16)$$

## 2 数值计算与讨论

由式(13)、(14)和(16)可知, 原子、光场和系统的线性熵 ( $S_a, S_f$  和  $S$ ) 与光场的平均光子数  $|\alpha|^2$ 、腔的耗散系数  $\kappa$  以及原子两能级之间的 Stark 位移参量  $\beta_1, \beta_2$  有关, 或者说与 Stark 位移影响因子  $\gamma = (\beta_1/\beta_2)^{1/2}$  有关. 为了比较直观的说明上述参量对线性熵的影响, 借助于数值计算并作图展示各参量与线性熵之间的关系.

图 2(a) 是当光场平均光子数  $|\alpha|^2 = 9$ , 两能级具有相同的 Stark 位移 ( $\gamma = 1$ ) 以及腔场耗散系数为

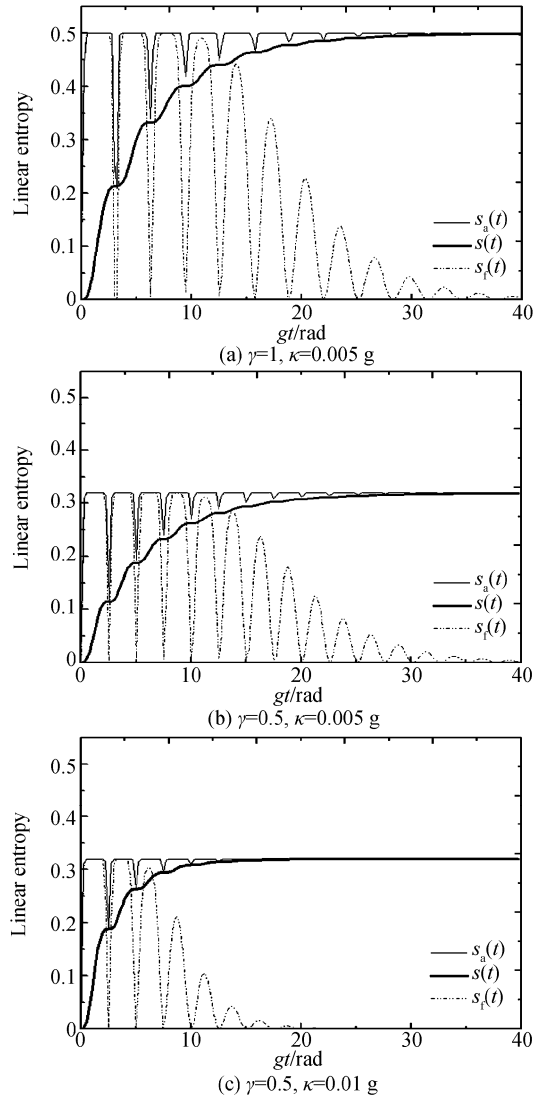


图 2 相同光场强度 ( $|\alpha|^2 = 9$ ) 时光场、原子和系统线性熵随时间的演化

Fig. 2 Time evolution of the linear entropy of the field, the atom and the system with the same intensity of the field ( $|\alpha|^2 = 9$ )

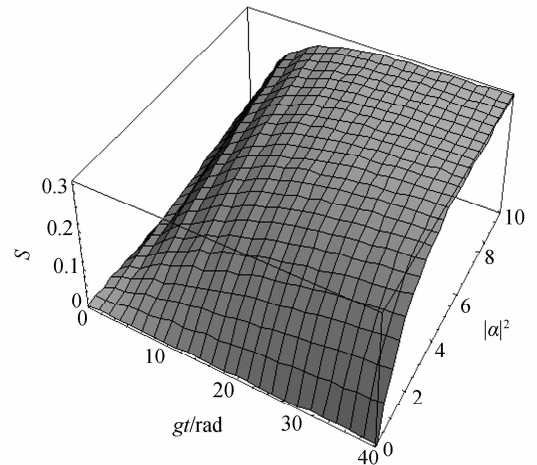
$\kappa=0.005g$  时,  $S_a$ ,  $S_f$  和  $S$  随时间的演化规律. 从图中(细实线、虚线和粗实线分别表示原子、光场和系统的线性熵)可以看出: 当腔存在耗散时, 原子和系统只有在初始时刻处于纯态 ( $S_a, S=0$ ), 在其余任何时刻  $S_a$  和  $S$  均大于零.  $S_a$  随着时间的增加呈现出振荡幅度减小的周期振荡, 其变化趋势是按指数变化规律增加, 经一段时间后达到稳定值; 且在  $t=n\pi/g$ , ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) 时刻,  $S_a$  回到局域最小值, 这表明光场与原子的退耦合周期为  $T=\pi/g$ . 系统线性熵  $S$  的变化趋势是随时间按指数变化规律增加, 最终趋于与  $S_a$  相同的稳定值. 由于腔场的耗散使得光场中的光子不断地向外泄露, 最终光场变为真空纯态. 光场的线性熵  $S_f$  作周期为  $\pi/g$  的减幅振荡最终变为零. 这种线性熵的振荡演化特性可以看作是系统中熵的交换过程. 在目前研究的模型中, 由于系统的开放性(存在耗散), 使熵的交换不仅存在于系统之中, 而且存在于系统和环境之间, 所以光场的熵逐渐趋于零.

在与图 2(a) 相同的光场强度和耗散系数下, 改变 Stark 位移影响因子, 使  $\gamma=0.5$ , 作出图 2(b). 比较图 2(a) 和 (b) 发现: 在原子两能级具有相同的 Stark 位移 ( $\gamma=1$ ) 时,  $S_a$  和  $S$  的振荡周期均为  $\pi/g$ , 且经过一段时间达到稳定值 0.5; 但在原子两能级具有不同的 Stark 位移 ( $\gamma=0.5$ ) 时,  $S_a$  和  $S$  的振荡周期减小 ( $< \pi/g$ ), 而且最终所达稳定值减小为 0.32. 因为当原子两能级之间的 Stark 位移不同时, 两能级跃迁的有效失谐量<sup>[14]</sup> ( $\Delta N = \beta_1 - \beta_2$ ) 不再为零,  $\Delta N$  值的变化导致原子和场之间的耦合系数  $g = \sqrt{\beta_2 \beta_1}$  增加, 从而增加了光场与原子相互作用的拉比频率, 而腔耗散系数不变, 使得各线性熵的振荡周期和稳定值均减小.

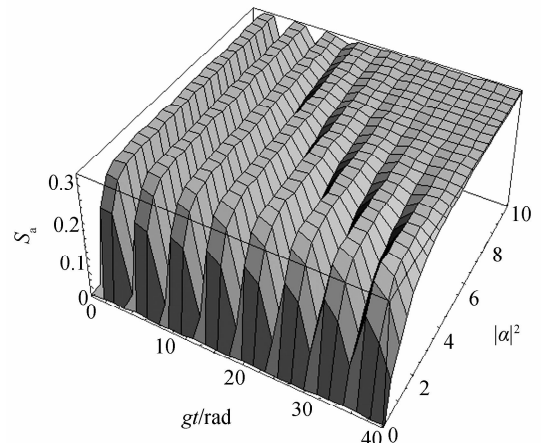
为了明确耗散系数对线性熵的影响, 在与图 2(b) 相同的光场强度和 Stark 位移参量下, 我们将腔场的衰减系数改变为  $\kappa=0.01g$ , 作出线性熵随时间的演化曲线图 2(c). 比较图 2(b) 和 (c) 可以看出: 随着腔场衰减系数的增加,  $S_a$  和  $S$  达到相同稳定值的时间缩短, 即熵增加的较快, 系统中发生熵交换的时间变短, 所以腔耗散系数阻滞子系统间的熵交换; 腔的耗散系数越大, 光场的线性熵  $S_f$  变为零的速度也越快. 由此可见腔的耗散程度越强, 原子和系统越快地从初始纯态变为混合态, 光场越快地变为真空纯态.

图 3 是在耗散系数和 Stark 位移参量一定 ( $\kappa=0.005g$ ,  $\gamma=0.5$ ) 时, 系统(a)、原子(b)以及光场(c)的线性熵随时间及光场强度的演化规律(三维图). 由图 3(a) 和 (b) 可以看出: 随着光场强度的增强,  $S$  和  $S_a$  振荡达到稳定值所需时间缩短, 而且此稳定值

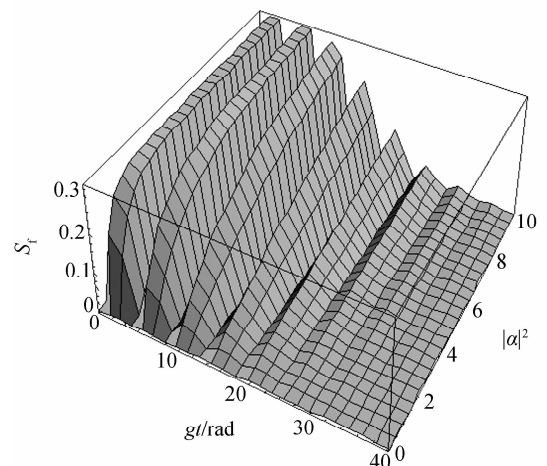
也随着  $|\alpha|^2$  的增加而增大, 即光场越强, 系统和原子由初始纯态变为混合态的时间越短且混合度越高. 对于光场而言, 由图 3(c) 可见, 当平均光子数增大时,  $S_f$  作减幅周期振荡回到零值所需时间延长而且振荡幅度增大, 即光场中的光子完全消失最后回到真空纯态所需的时间增加.



(a) Linear entropy of the system



(b) Linear entropy of the atom



(c) Linear entropy of the field

图 3 相同耗散系数 ( $\kappa=0.005g$ ) 和 stark 位移参量 ( $\gamma=0.5$ ), 不同光场强度下线性熵随时间的演化规律  
Fig. 3 Time evolution of the linear entropy with the same dissipative coefficient ( $\kappa=0.005g$ ), the same Stake shift parameter ( $\gamma=0.5$ ) and the different intensity of the field ( $|\alpha|^2=9$ )

### 3 结论

本文研究了幅值耗散腔中  $\Lambda$  型三能级原子与单模相干态光场 Raman 相互作用下光场、原子和系统的线性熵( $S_f, S_a, S$ ), 并讨论了光场强度, 耗散系数以及 Stark 位移对线性熵演化规律的影响. 结果发现: 当腔场存在幅值耗散时,  $S_a$  随时间作减幅周期振荡并按指数规律上升最后达到稳定值,  $S_f$  随时间作减幅振荡并按指数规律衰减最后趋于零,  $S$  的幅值随时间按指数规律逐渐增大最终达到与原子线性熵相同的稳定值. 腔场的耗散系数越大,  $S_a, S$  趋于稳定值以及  $S_f$  减幅振荡回复为零所需时间越短, 即腔的耗散越强, 原子光场及系统由纯态变为混合态的时间越短. 当原子两能级的 Stark 位移不同时, 由于有效失谐量  $\Delta N$  值的变化导致原子和场之间的耦合增强, 而系统中腔的耗散不变时, 线性熵的振荡周期和其稳定值均减小. 光场的平均光子数越多,  $S_a$  和  $S$  振荡达稳定值所需时间越短, 即原子和系统越快达到混合态. 但当平均光子数增大时, 光场经振荡回到真空纯态所需时间延长. 总之, 腔耗散系数阻滞系统中子系统间的熵交换, 并使系统的熵增加, 相干信息量减少; 当两能级之间的 Stark 位移之差的变化使原子和场之间的耦合增强, 而耗散系数不变时, 系统的熵交换加快和稳态值变小; 光场越强, 光场与其它子系统进行熵交换的时间越长.

#### 参考文献

- [1] LAI Zhen-jiang, LIU Zi-xin. Entropy properties of the field or the atom in the interacting system of two-mode field with the V-type three-level atom in a Kerr-like medium [J]. *Acta Physica Sinica*, 2000, **49**(9): 1714-1719.  
赖振讲, 刘自信. 附加 Kerr 介质非关联相干态长与 V 型三能级原子相互作用系统中原子(场)的熵特性[J]. 物理学报, 2000, **49**(9): 1714-1719.
- [2] LAI Zhen-jiang, YANG Zhi-yong, BAI Jin-tao, *et al.* Entanglement swapping in the process of two-level atoms interacting with field of coherent states [J]. *Acta Physica Sinica*, 2004, **53**(11): 3733-3736.
- 赖振讲, 杨志勇, 白晋涛, 等. 二能级原子和相干态腔场相互作用过程中的纠缠交换[J]. 物理学报, 2004, **53**(11): 3733-3736.
- [3] FANG Mao-fa. Evolution of field entropy in the intensity-dependent coupling J-C model[J]. *Acta Optica Sinica*, 1995, **15**(3): 296-300.  
方卯发. 依赖强度耦合 J-C 模型场熵的演化[J]. 光学学报, 1995, **15**(3): 296-300.
- [4] ZUREK W H, HABIB S, PAZ J P. Coherent states via decoherence[J]. *Phys Rev Lett*, 1993, **70**(9): 1187-1190.
- [5] SHUMACHER B, NIELSEN M. Quantum data processing and error correction[J]. *Phys Rev A*, 1996, **54**(4): 2629-2635.
- [6] SCHUMACHER B. Sending entanglement through noisy quantum channels[J]. *Phys Rev A*, 1996, **54**(4): 2614-2628.
- [7] XIANG Y, XIONG S J. Entropy exchange, coherent information, and concurrence [J]. *Phys Rev A*, 2007, **76**, 014306.
- [8] ZHOU L, SONG H S, LUO Y X, *et al.* Dissipative dynamics of two-photon Jaynes-Cummings model with the Stark shift in the dispersive approximation[J]. *Phys Lett A*, 2001, **284**(4): 156-161.
- [9] ZHANG Li-hui, LI Gao-xiang, PENG Jin-sheng. Entropy property of degenerate Raman two-photon coupling system in a phase-damping cavity[J]. *Acta Physica Sinica*, 2002, **51**(3): 541-546.  
张立辉, 李高翔, 彭金生. 位相损耗腔中简并双光子喇曼耦合系统中的熵特性[J]. 物理学报, 2002, **51**(3): 541-546.
- [10] XU L, ZHANG Z M. Modified effective Hamiltonian for degenerate Raman process[J]. *Z Phys B*, 1994, **95**(4): 507-510.
- [11] AO Sheng-mei, ZHOU Shi-lun, ZENG Gao-jian. Influence of AC-Stark shift on field entropy and entanglement in non-degenerate Raman process[J]. *Acta Physica Sinica*, 2001, **50**(1): 52-58.  
敖胜美, 周石伦, 曾高坚. 非简并喇曼过程中交流斯塔克位移对场熵和纠缠的影响[J]. 物理学报, 2001, **50**(1): 52-58.
- [12] NASREEN T, RAZMI M S. Effect of the dynamic Stark shift on dipole squeezing in two-photon processes[J]. *Phys Rev A*, 1992, **46**(7): 4161-4166.
- [13] LAI Zhen-jiang, LI Li-sha, HOU Xun, *et al.* Quantum information transfer among the system of many atoms and cavities[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(4): 385-388.  
赖振讲, 李莉莎, 侯洵, 等. 多原子-腔系统中的量子信息传递[J]. 光子学报, 2004, **33**(4): 385-388.
- [14] YOO H I, EBERLY J H. Dynamical theory of an atom with two or three levels interacting with quantized cavity fields[J]. *Phys Rep*, 1985, **118**(5): 241-337.

## Linear Entropy of an Atom-field System with Raman Coupling in Dissipation Cavity

LAI Zhen-jiang<sup>1</sup>, ZHAO He-yun<sup>2</sup>, ZHANG Li<sup>1</sup>, LIU Bao-ping<sup>1</sup>, HE Shu-fang<sup>1</sup>

(1 *College of Physics & Information Engineering, Henan Normal University, Xinxiang, Henan 453007, China*)

(2 *Department of Life Science & technique, Xinxiang Medical University, Xinxiang, Henan 453003, China*)

**Abstract:** For studying the entropy exchange between the subsystems of the interaction system of a atom with the field in a leaking cavity, an exact solution of the master equation that describes the system by using the method of super-operator is obtained. The influences of the intensity of the cavity-field, the dissipative coefficient of the cavity and the Stark shift between two atomic levels on the linear entropy are discussed. The results show that; the more intense the cavity-field is, the longer the persistent time of the exchange of the entropy between the cavity field with other sub-systems is. When the two-level Stark shifts between the atomic levels changes to enhance the coupling between the atom and the cavity field increased and the cavity dissipation coefficient remain unchanged, the entropy of the system speed up the exchange and the steady-state values of the entropy become smaller.

**Key words:**  $\Lambda$ -type three-level atom; Linear entropy; Amplitude dissipation cavity; Stark shifts



**LAI Zhen-jiang** was born in 1954. He earned his Ph. D. degree in optics from Northwest University. Now he is a professor, and his research interests focus on quantum optics, quantum information science, nonlinear optics, and quantum electronics.