

文章编号:1004-4213(2010)04-0709-5

莫尔条纹法测量微小旋转角度的频域分析

方靖岳^a, 秦石乔^b, 王省书^a, 黄宗升^a, 郑佳兴^a

(国防科学技术大学 a. 光电科学与工程学院; b. 理学院, 长沙 410073)

摘要:利用菲涅耳衍射的频域分析方法,对莫尔条纹复振幅分布公式进行了理论推导,得到了使用两块相同光栅组成的光栅付测量微小角度的原理公式,与利用几何光学等方法得到的结论一致.模拟结果表明:莫尔条纹是光栅付拍现象的最低频率含量,莫尔条纹内含有大量高次谐波;在探测器光学系统放大率一定的前提下,为通过直接测量莫尔条纹宽度的变化达到测量角度变化的目的,必须根据测角精度、探测器的尺寸和分辨率选择合适的光栅付光栅常数和光栅付初始夹角.

关键词:测量;小角度;频域分析;莫尔条纹;光栅付

中图分类号:O4

文献标识码:A

doi:10.3788/gzxb20103904.0709

0 引言

微小角度测量技术在航空、航天、航海和通信等国民经济和国防建设的诸多领域中发挥着重要作用,如海上机动航天测量船需要对船体形变进行测量,修正补偿形变引起的误差,对航天器实施全程跟踪测量;水面舰船导弹垂直发射系统需要对它的惯性导航系统与弹载惯性平台之间的形变进行测量和修正,提高武器系统的精度等.航天测量船上现行的大钢管测量法是采用自准法间接测量扭转角的^[1].自准直法以激光照射被测物体,通过入射与反射光束间的横向位移变化量来测得物体的转动角度,该方法只能应用于纵向挠曲和横向挠曲的测量^[2-3].光学内反射小角度测量法^[4-5]、激光干涉小角度测量法^[6]和衍射光栅干涉仪动态测量法^[7]等技术成熟,但都无法实现对扭转角的直接测量.莫尔计量术是现代光学计量领域中的一种重要方法,将它应用于微小扭转角(或称旋转角)的测量,具有非接触、高准确度和高灵敏度的特点^[8-10].

光在通过光栅付时衍射和干涉共同作用产生莫尔条纹,条纹宽度随光栅付栅线夹角的变化而变化,栅线夹角越小,莫尔条纹宽度越大,栅线夹角越大,莫尔条纹宽度越小.而且,莫尔条纹的倾角也随光栅付夹角的变化而变化.莫尔条纹测量小角度就是根据光栅付栅线夹角不同时,产生的莫尔条纹宽度(或者其倾角)不同的原理进行的.莫尔条纹的形成,实质是光在通过光栅付时衍射和干涉共同作用的结

果,文献[11]从透过率的角度解释莫尔条纹的形成,文献[12]从几何光学、光栅衍射和傅里叶级数的角度对莫尔条纹的形成进行了详细的分析,本文将从菲涅耳衍射频域分析的角度对莫尔条纹的形成进行分析.

1 莫尔条纹形成的频域分析

如图 1,两块正弦振幅光栅相叠合,光栅 G_1 位于光栅 G_2 整数倍泰伯距离处.将光栅付的栅线投影到 $o\xi\eta$ 平面,光栅 G_1 的栅线与 η 轴平行,光栅 G_2 的栅线与 η 轴夹角为 θ , d_1 和 d_2 分别是光栅 G_1 和

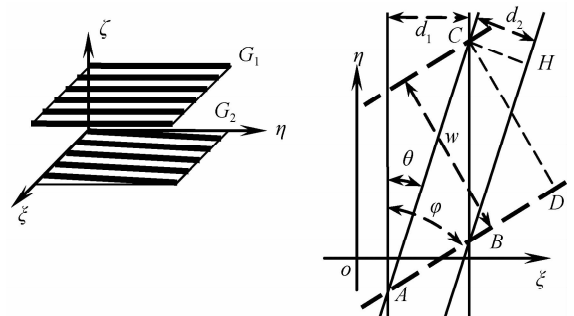


图 1 光栅付几何位置关系

Fig. 1 The geometric position relationship of the grating pair. 光栅 G_2 的栅距, f_1 和 f_2 分别是光栅 G_1 和光栅 G_2 的空间频率, $f_1 = 1/d_1$, $f_2 = 1/d_2$, m_1 和 m_2 分别是光栅 G_1 和光栅 G_2 的透过率函数峰峰值, φ 是莫尔条纹与 η 轴的夹角, w 是莫尔条纹的宽度,单位振幅单色平面光波垂直入射光栅付时,光栅付后的复振幅分布为^[11]

$$t(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \{ 1 + m_1 \cos(2\pi f_1 \xi) + m_2 \cos[2\pi f_2 (\xi \cos \theta - \eta \sin \theta)] + \frac{m_1 m_2}{2} \cos[2\pi(f_1 \xi + f_2 (\xi \cos \theta - \eta \sin \theta))] + \frac{m_1 m_2}{2} \cos[2\pi(f_1 \xi - f_2 (\xi \cos \theta - \eta \sin \theta))] \} \quad (1)$$

* 国家高技术研究发展计划(2006AA09Z208)资助

† Tel: 0731-84573774 Email: fxy_nudt@yahoo.com.cn

收稿日期: 2009-07-03

修回日期: 2009-09-02

根据菲涅尔衍射理论,观察屏上光波的复振幅分布的傅里叶变换为

$$F\{U_0(x,y)\} = F\{t(x,y)\}F\{h(x,y)\} = \frac{e^{jkz}}{4} \{ \delta(f_x, f_y) + \frac{m_1}{2} e^{-j\pi\lambda z f_1^2} [\delta(f_x - f_1) + \delta(f_x + f_1)] + \frac{m_2}{2} e^{-j\pi\lambda z f_2^2} [\delta(f_x - f_2 \cos \theta, f_y + f_2 \sin \theta) + \delta(f_x + f_2 \cos \theta, f_y - f_2 \sin \theta)] + \frac{m_1 m_2}{2} e^{-j\pi\lambda z (f_1^2 + f_2^2 + 2f_1 f_2 \cos \theta)} \cdot [\delta(f_x - f_1 - f_2 \cos \theta, f_y + f_2 \sin \theta) + \delta(f_x + f_1 + f_2 \cos \theta, f_y - f_2 \sin \theta)] + \frac{m_1 m_2}{2} e^{-j\pi\lambda z (f_1^2 + f_2^2 - 2f_1 f_2 \cos \theta)} \cdot [\delta(f_x - f_1 + f_2 \cos \theta, f_y - f_2 \sin \theta) + \delta(f_x + f_1 - f_2 \cos \theta, f_y + f_2 \sin \theta)] \} \quad (2)$$

对式(2)作逆傅里叶变换得观察屏上光波的复

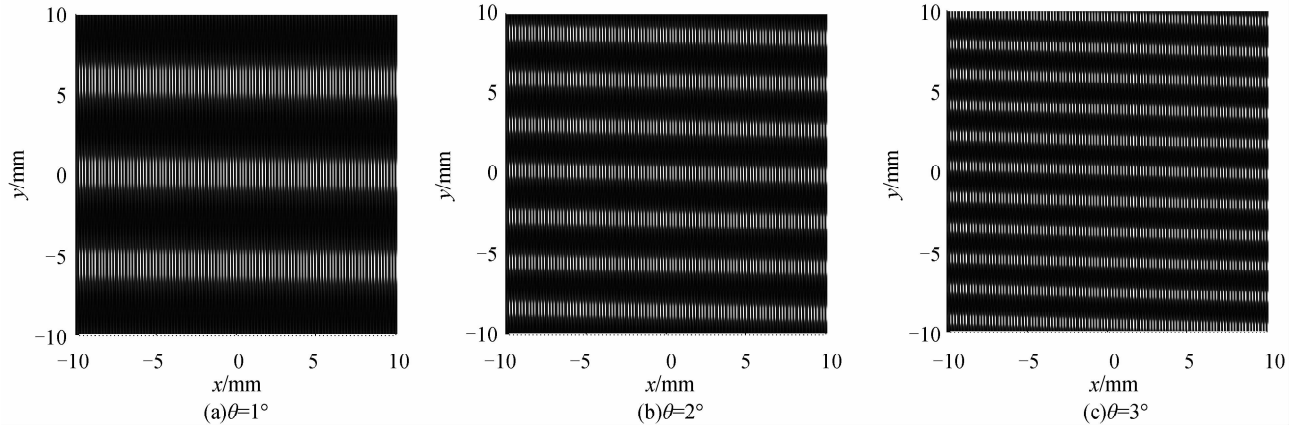


图2 栅线夹角不同时的莫尔条纹

Fig. 2 The moiré fringe at different value of θ

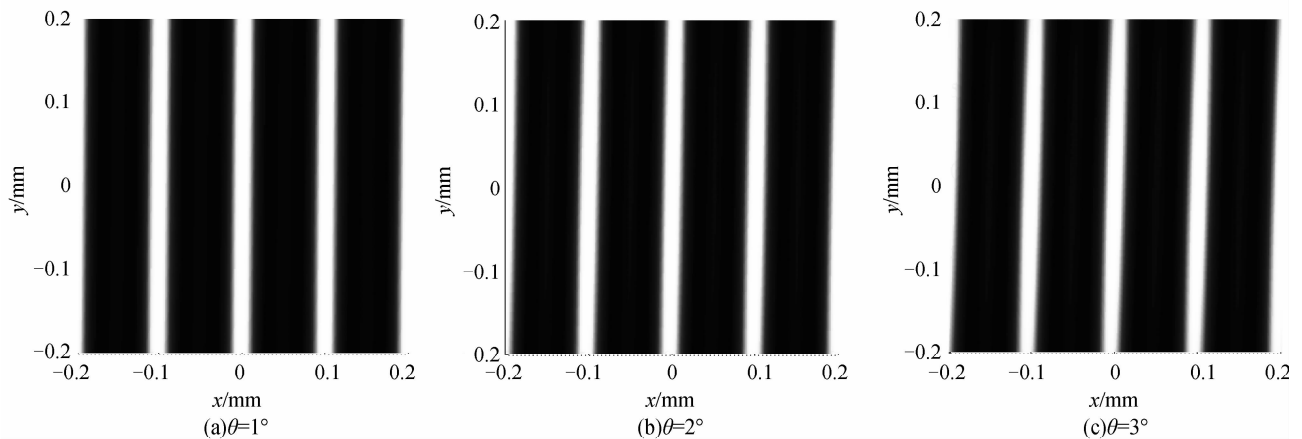


图3 莫尔条纹的局部特征

Fig. 3 The moiré fringe's local feature

假设光栅由两个相同型号的光栅组成($f_1 = f_2 = f_0 = 1/d_0$),且 $m_1 = m_2 = 1$,因为 θ 是小角度 ($\theta < 5^\circ$),可将式(3)中的 $\cos \theta$ 和 $\sin \theta$ 作泰勒展开,忽略掉 θ^2 以上的高阶小量(指数项忽略 θ^1 以上的高阶小量),式(3)简化为

$$U_0(x,y) = \frac{e^{jkz}}{4} \{ 1 + e^{-j\pi\lambda z f_0^2} \{ \cos(2\pi f_0 x) +$$

振幅分布,即莫尔条纹复振幅分布

$$U_0(x,y) = \frac{e^{jkz}}{4} \{ 1 + m_1 e^{-j\pi\lambda z f_1^2} \cos(2\pi f_1 x) + m_2 e^{-j\pi\lambda z f_2^2} \cdot \cos[2\pi f_2 (x \cos \theta - y \sin \theta)] + m_1 m_2 e^{-j\pi\lambda z (f_1^2 + f_2^2 + 2f_1 f_2 \cos \theta)} \times \cos\{2\pi[(f_1 + f_2 \cos \theta)x - f_2 \sin \theta y]\} + m_1 m_2 e^{-j\pi\lambda z (f_1^2 + f_2^2 - 2f_1 f_2 \cos \theta)} \times \cos\{2\pi[(f_1 - f_2 \cos \theta)x + f_2 \sin \theta y]\} \} \quad (3)$$

根据式(3),利用 Matlab 进行仿真计算,假设波长 $\lambda = 632.8 \text{ nm}$,光栅空间频率 $f_1 = f_2 = 10 \text{ 000/m}$,透过率函数的峰峰值 $m_1 = m_2 = 1$,观察屏的距离 z 位于光栅泰伯距离处,当栅线夹角 θ 取不同值时,计算得到莫尔条纹强度分布如图 2,图 3 为图 2 中的莫尔条纹中心局部的放大,可见,莫尔条纹包含大量高次谐波(等间距明暗细条纹).

$$\cos[2\pi f_0 (x - \theta^2 x/2 - \theta y)] + \cos[2\pi f_0 (\theta^2 x/2 + \theta y)] + e^{-j\pi\lambda z f_0^2} \cos[2\pi f_0 (2x - \theta^2 x/2 - \theta y)] \} \quad (4)$$

取 $\pi\lambda z f_0^2 = 2n\pi, n = 1, 2, 3, \dots$,式(4)简化为

$$U_0(x,y) = \frac{e^{jkz}}{4} \{ 1 + \cos(2\pi f_0 x) + \cos[2\pi f_0 (x - \theta^2 x/2 + \theta y)] + \cos[2\pi f_0 (2x - \theta^2 x/2 - \theta y)] +$$

$$\cos [2\pi f_0 (\theta^2 x/2 + \theta y)] \quad (5)$$

为方便对莫尔条纹沿 x 轴或者沿 y 轴的变化进行分析,对式(5)先后取 $y=0$ 和 $x=0$,得光强

$$I_0(x,0) = |U_0(x,0)|^2 \approx \frac{1}{32} [8 + 20\cos(2\pi f_0 x) + \cos(8\pi f_0 x) + 12\cos(4\pi f_0 x) + 4\cos(6\pi f_0 x) + 4\cos(\pi\theta^2 f_0 x) + \cos(2\pi\theta^2 f_0 x)] \quad (6)$$

$$I_0(0,y) = |U_0(0,y)|^2 = \frac{1}{32} [17 + 9\cos(4\pi\theta f_0 y) + 24\cos(2\pi\theta f_0 y)] \quad (7)$$

莫尔条纹是由光栅付拍现象所产生的最低频率分量组成的^[12],式(6)、(7)中的常数项代表了莫尔条纹中的直流分量,而式(6)中的高频分量 f_0 、 $2f_0$ 等决定了莫尔条纹中谐波分量(细条纹)的空间频率在 x 轴方向的分量,最低频率分量 $\theta^2 f_0/2$ 决定了莫尔条纹沿 x 轴方向变化的空间频率,即

$$f_{mx}(\theta) = \theta^2 f_0/2 \quad (8)$$

式(7)中的最低频率分量 θf_0 决定了莫尔条纹沿 y 轴方向变化的空间频率,即

$$f_{my}(\theta) = \theta f_0 \quad (9)$$

由式(8)、(9)得莫尔条纹的斜率为

$$k = -\frac{1/f_{my}}{1/f_{mx}} = -\theta/2 = -\tan \alpha \quad (10)$$

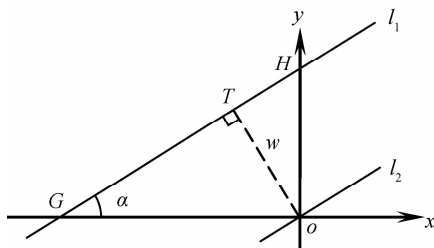


图4 莫尔条纹宽度
Fig.4 The width of moiré fringe

若观察屏 xoy 上 l_1 和 l_2 表示莫尔条纹(图4),则 $|oG| = 1/f_{mx} = 2d_0/\theta^2$, $|oH| = 1/f_{my} = d_0/\theta$, α 为莫尔条纹的倾角,则莫尔条纹的宽度为:

$$w = |oH| \cos \alpha \approx \frac{d_0}{\theta} \left(1 - \frac{\theta^2}{4}\right) \approx \frac{d_0}{\theta} \quad (11)$$

或者,

$$w = |oG| \sin \alpha \approx \frac{2d_0}{\theta^2} \frac{\theta}{2} \approx \frac{d_0}{\theta} \quad (12)$$

可见,莫尔条纹的宽度 w 与光栅付夹角 θ 成反比,与光栅常数 d_0 成正比,由于 $\theta \ll 1$,故 $w \gg d$,即莫尔条纹间距对光栅栅距有放大作用,有利于进行微小角度的测量。

2 光栅付对微小旋转角度的测量

如图5,平行光垂直入射光栅付,CCD位于光栅付后接收莫尔条纹测量光栅付的夹角.当光栅常数

$d=0.1$ mm时,若光栅付夹角 $\theta=12''$,根据式(11),莫尔条纹宽度 $w \approx 1.7$ m,条纹宽度可能超出探测器的尺寸,假设探测器使用放大率为 β 的光学系统,为适应测量的需要,栅线夹角 θ 必须引入一个初始夹角 θ_0 ,减小莫尔条纹的宽度以适应探测器的尺寸.假设栅线夹角的初始夹角 θ_0 是小角度($\theta_0 < 5^\circ$),根据式(11),得到角度变化量 $\Delta\theta$ (角秒量级)与宽度变化量 Δw 的关系

$$\Delta\theta \approx \Delta w \theta_0^2 / d_0 \quad (13)$$

可见,测角精度与条纹宽度的测量精度(取决于CCD的分辨率)、光栅常数以及光栅付的初始夹角有关.对于给定的光栅付,其测角精度取决于CCD的分辨率和光栅付的初始夹角.当角度变化量为 $\Delta\theta=3''$ 时,取不同光栅常数 d_0 和初始夹角 θ_0 ,对应的宽度变化量 Δw 如表1.

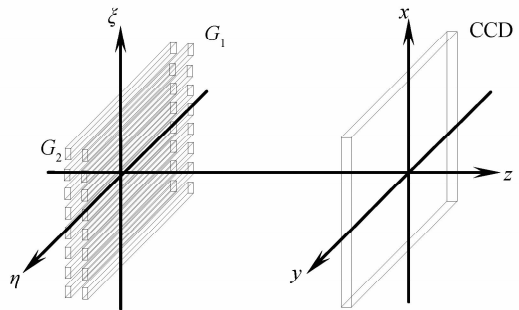


图5 光栅付微小旋转角度测量示意图
Fig.5 The sketch map of small angle measurement using moiré fringe method

表1 条纹宽度变化量

Table 1 The measurement accuracy of moiré fringe's width

$\Delta w / \mu\text{m}$	θ_0		
	$30'$	1°	2°
d_0/mm			
1.0	191.99	47.75	11.94
0.5	95.49	23.87	5.97
0.1	19.10	4.77	1.19

可见,对于给定的CCD,其像元间隔一定,若光栅付的光栅常数一定,初始夹角过大时将导致莫尔条纹宽度的变化小于一个像元尺寸而无法探测;若光栅付的初始夹角一定,光栅常数过小也将导致同样的结果^[8,13].

若光栅付的光栅常数 $d_1 = d_2 = d_0$,CCD像元间隔是 l ,CCD靶面尺寸是 L ,为测量条纹宽度的变化,靶面上至少包含有3条莫尔条纹明纹(或暗纹),此时的条纹间隔为 $L/2$,则条纹宽度 w 应满足:

$$\frac{l}{\beta} < w \approx \frac{d_0}{\theta_0} < \frac{L}{2\beta} \quad (14)$$

光栅付夹角变化 $\Delta\theta$ 时,莫尔条纹宽度随之发生变化,为了使CCD能够探测,条纹宽度变化量 Δw 应满足

$$\frac{l}{\beta} < \Delta w \approx \frac{d_0 \Delta \theta}{\theta_0^2} < \frac{L}{2\beta} \quad (15)$$

由式(14)、(15),当式(16)满足时,得到初始夹角 θ_0 应满足式(17)

$$\frac{2l^2 \Delta \theta}{\beta L} < d_0 < \frac{l \Delta \theta}{\beta} \quad (16)$$

$$\sqrt{\frac{2\beta d_0 \Delta \theta}{L}} < \theta_0 < \frac{\beta d_0}{l} \quad (17)$$

由式(14)、(15),当式(18)满足时,得到初始夹角 θ_0 应满足式(19)

$$\frac{l \Delta \theta}{\beta} < d_0 < \frac{L \Delta \theta}{2\beta} \quad (18)$$

$$\sqrt{\frac{2\beta d_0 \Delta \theta}{L}} < \theta_0 < \sqrt{\frac{\beta d_0 \Delta \theta}{l}} \quad (19)$$

由式(14)、(15),当式(20)满足时,得到初始夹角 θ_0 应满足式(21)

$$\frac{L \Delta \theta}{2\beta} < d_0 < \frac{L^2 \Delta \theta}{4\beta l} \quad (20)$$

$$\frac{2\beta d_0}{L} < \theta_0 < \sqrt{\frac{\beta d_0 \Delta \theta}{l}} \quad (21)$$

对于 1/2 inch 面阵 CCD,靶面尺寸为 6.4 mm × 4.8 mm,取 $L=4.8$ mm,像元为 795(H) × 596(V),像元间隔约 8 μm ,若采用 CCD 细分技术达到 2 μm ,取 $l=2$ μm ,假设光学系统放大率 $\beta=1 \times$,则为能实现对 $\Delta \theta=3''$ 的角度变化量的测量,由式(16)得光栅常数满足 $2.4 \times 10^{-8} \mu\text{m} < d_0 < 2.9 \times 10^{-5} \mu\text{m}$,已失去应用的可能;由式(18)得光栅常数满足 $2.9 \times 10^{-5} \mu\text{m} < d_0 < 0.035 \mu\text{m}$,已失去应用的可能;由式(20)得光栅常数满足 $0.035 \mu\text{m} < d_0 < 41.9 \mu\text{m}$,取 $d_0=20 \mu\text{m}$,由式(21)得初始角度满足 $29' < \theta_0 < 1^\circ 13'$.可见,为了达到一定的测量精度,应根据 CCD 的尺寸、分辨率和光学系统放大率选择合适的光栅付,进一步选择合适的光栅付初始角度。

3 结论

本文利用光波传播过程相当于空不变系统作用的原理,将入射光和出射光视为系统输入和输出函数,从菲涅耳衍射频域入手,分析得到了莫尔条纹的复振幅分布和莫尔条纹测量小角度的近似公式,较好地揭示了莫尔条纹形成的实质.模拟结果表明,莫尔条纹是光栅付拍现象的最低频率含量,莫尔条纹内含有大量高次谐波.在 CCD 所用光学系统放大率一定的条件下,为了通过测量莫尔条纹宽度的变化进而测量角度的微小变化,必须根据测角精度、探测器的尺寸和分辨率选择合适的光栅付,同时使光栅付引入一个合适的初始角度。

参考文献

- [1] QIAO Yan-feng, WANG Cheng-long, LI Xiang-rong, et al. Measurement of torsion angular distortion based on Moire fringe[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2008, **16**(11): 2132-2139.
乔彦峰,王成龙,李向荣,等.莫尔条纹测量扭转变形角的方案研究[J]. *光学精密工程*, 2008, **16**(11): 2132-2139.
- [2] ZOU Wan-jun, ZHU Guo-li, WU Xue-bing. Angle measuring system of laser based on array CCD [J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2006, **33**(10): 91-95.
邹万军,朱国力,吴学兵.基于面阵 CCD 的激光角度测量系统的研究[J]. *光电工程*, 2006, **33**(10): 91-95.
- [3] YUAN Jie, LONG Xing-wu. CCD-area-based autocollimator for precision small-angle measurement[J]. *Sci Instrum*, 2003, **74**(3): 1362-1365.
- [4] HUANG P S, KIYONO S, KAMADA O. Angle measurement based on the internal-reflection effect: a new method[J]. *Appl Opt*, 1992, **31**(28): 6047-6055.
- [5] LI Zhi-gang, LIU Qing-gang. Method of micro angle measurement based on internal-reflection effect and application in precision measurement [J]. *Aviation Precision Manufacturing Technology*, 2003, **39**(6): 22-25.
李志刚,刘庆纲.光学内反射测角方法及其在精密测试中的应用[J]. *航空精密制造技术*, 2003, **39**(6): 22-25.
- [6] IKRAM M, HUSSAIN G. Michelson interferometer for precision angle measurement[J]. *Appl Opt*, 1999, **38**(1): 113-120.
- [7] TAÜBNER A, von MARTENS H J. Measurement of angular accelerations, angular velocities and rotation accelerations, angular velocities and rotation angles by grating interferometry [J]. *Measurement*, 1998, **24**(1): 21-32.
- [8] REN Jing-bin, ZHANG Yao-yu, LI Xiang-rong, et al. Research on hull transverse twist measurement based on Moire fringe [J]. *Computer Measurement & Control*, 2008, **16**(7): 939-942.
任静斌,张尧禹,李向荣,等.基于莫尔条纹的船体横扭角测量方法研究[J]. *计算机测量与控制*, 2008, **16**(7): 939-942.
- [9] LI Xiang-rong, QIAO Yan-feng, LIU Wei, et al. Autocollimation inerferometry method for boats' three-dimensional distortion[J]. *Optical Technique*, 2005, **31**(5): 761-763.
李向荣,乔彦峰,刘微,等.船体三维角度变形的自准直干涉测量方法[J]. *光学技术*, 2005, **31**(5): 761-763.
- [10] DUAN Cun-li, CHEN Fang, QI Rui-li, et al. A new Moiré stripe method of measuring 3-D object shapes [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2008, **37**(7): 1425-1428.
段存丽,陈芳,祁瑞利,等.利用莫尔条纹测量物体三维形貌新方法研究[J]. *光子学报*, 2008, **37**(7): 1425-1428.
- [11] SU Xian-yu, LI Ji-tao. Information optics [M]. Beijing: Science Press, 1999: 196-200.
苏显渝,李继陶.信息光学[M].北京:科学出版社,1999: 196-200.
- [12] ZHANG Shan-zhong. Metrology grating technology [M]. Beijing: China Machine Press, 1985: 8-55.
张善锺.计量光栅技术[M].北京:机械工业出版社,1985: 8-55.
- [13] LI Xiang-rong. High precision subdivision of Moire fringe[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2007, **34**(11): 74-77.
李向荣.莫尔条纹的高精度细分技术研究[J]. *光电工程*, 2007, **34**(11): 74-77.

Frequency Domain Analysis of Small Angle Measurement with Moire Fringe

FANG Jing-yue^a, QIN Shi-qiao^b, WANG Xing-shu^a, HUANG Zong-sheng^a, ZHENG Jia-xing^a

(a. College of Optoelectric Science and Technology, National University of Defense Technology;

b. College of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The moire fringe's amplitude distribution is analyzed by using the frequency domain analyses of Fresnel diffracting. The formula of small angle measurement using the grating pair composed of the same gratings is gained. The formulas gained by frequency domain analysis are the same with those gained by geometrical method. The results show that moire fringe is composed of lots of vertical small fringes. To measure the small angle directly by the change of the width of the moire fringe, a initial angle is needed, and it's value is decided by the magnification of detector's optical system, the angle measuring precision, the size and the resolution of the detector.

Key words: Measurement; Small angle; Frequency domain analysis; Moire fringe; Grating pair



FANG Jing-yue was born in 1983. Now he is pursuing the Ph. D. degree, and his research interests focus on photoelectric detection.



QIN Shi-qiao was born in 1963. He received the Ph. D. degree in physics from National University of Defense Technology in 1993. Now he works as a professor, and his research interests focus on photoelectric instrument, measurement and control.