文章编号:1004-4213(2010)02-0329-6

频率变化场 J-C 模型中的量子态保真度*

卢道明

(武夷学院 电子工程系,福建 武夷山 354300)

摘　要:利用 Jaynes-Cummings 模型,考虑场频率受微扰的情况,在旋波近似下研究了二能级原子与单模辐射场相互作用系统中量子态保真度的演化.利用数值计算方法给出量子态保真度随时间的演化曲线.研究了场频率随时间正弦函数形式变化对系统、光场和原子的量子态保真度演化的影响.结果表明:场频率随时间正弦函数形式变化对系统和光场的量子态保真度的演化的影响很小,但对原子的量子态保真度的演化有显著影响.

关键词:二能级原子;J-C 模型;频率变化场;量子态保真度

中图分类号:O431.2　　**文献标识码**:A　　**doi**:10.3788/gzxb20103902.0329

0　引言

在量子光学领域中,Jaynes-Cummings(J-C)模型[1]是描述光场与原子相互作用的最简单和最典型的模型.至今,人们已利用 J-C 模型对光场与原子相互作用系统的量子特性作出了大量的研究,揭示了许多非经典效应,如原子布居的崩塌和回复效应[2],原子算符的偶极压缩[3-4],光场的压缩特性和反聚束效应[5]等.另一方面,量子信息是信息科学与量子力学相结合的新兴交叉学科.为了描述量子信息领域中信息在传输过程中保持原有状态的程度,人们引入了保真度的概念.近年来,人们已对量子态保真度作了广泛的讨论[6-10].量子信息的传输过程实际上是量子态的演化过程,然而在以往关于光场与原子相互作用系统中量子态的演化的研究中,场的频率被认为是常量.事实上,场频率变化将影响原子与场的相互作用,也将影响原子和场相互作用系统的量子特性.涉及频率受微扰作用并随时间作小量变化的场与原子相互作用的研究少见报道[11-12],但至今尚未见到场频率随时间变化时量子态保真度的研究报道.本文是在 J-C 模型的基础上,在旋波近似下,对 J-C 模型进行推广,考虑光场频率受微扰情况并随时间以正弦函数形式作小量变化的情形,用数值计算的方法研究了二能级原子与频率随时间正弦函数形式变化的场相互作用系统中量子态保真度的演化规律,讨论了场频率变化对系统、光场和原子的量子态保真度演化的影响.

1　理论模型

考虑一个二能级原子通过单光子跃迁与单模辐射场相互作用系统,在旋波近似下,系统的哈密顿能量为

$$H=\omega a^{+}a+\omega_0 S_3+g(S_{+}a+a^{+}S_{-}) \tag{1}$$

式中取普朗克常量 $\hbar=1$,ω_0 是二能级原子的跃迁频率,ω 是辐射场的频率,考虑光场频率受微扰的情况,设 $\omega=\omega_0+f(t)$,ω_0 是共振情况下场的频率,g 是原子与辐射场的耦合系数 $g=g_0\sqrt{\omega/\omega_0}$,$g_0$ 是原子与辐射场共振情况下的耦合系数,$f(t)$ 为频率随时间变化的函数.考虑频率受微扰的情况,频率变化影响原子与辐射场的耦合系数,假定 $f(t)\ll\omega_0$,那么 $g\approx g_0[1+f(t)/2\omega_0]$.$S_3$,$S_+$ 和 S_- 为原子的赝自旋算符.二能级原子的基态用 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$,激发态用 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 表示,则相应的原子算符可用 Pauli 矩阵表示.

$$S_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2},0\\ 0,-\frac{1}{2}\end{pmatrix},S_{+}=\begin{pmatrix}0,1\\0,0\end{pmatrix},S_{-}=\begin{pmatrix}0,0\\1,0\end{pmatrix} \tag{2}$$

把系统的哈密顿量分解为

$$H=H_0+H_1$$
$$H_0=\omega(a^{+}a+S_3)$$
$$H_1=(\omega_0-\omega)S_3+g(S_{+}a+a^{+}S_{-}) \tag{3}$$

通过运算可得出:$[H_0,H_1]=0$.系统的时间演化算符可分解为

$$U(t)=\exp(-\mathrm{i}Ht)=\exp(-\mathrm{i}H_0t)\cdot\exp(-\mathrm{i}H_1t) \tag{4}$$

通过运算可求出

*福建省自然科学基金计划(2008J0217)资助
Tel:0599-5136577　　Email:daominglu79@hotmail.com
收稿日期:2009-04-20　　修回日期:2009-08-05

$$U(t)=\begin{pmatrix} e^{-i\omega(a^+a+\frac{1}{2})t}(\cos At-i\frac{\Delta}{2}\frac{\sin At}{A}), & -ige^{-i\omega(a^+a+\frac{1}{2})t}a\frac{\sin Bt}{B} \\ -ige^{-i\omega(a^+a-\frac{1}{2})t}a^+\frac{\sin At}{A}, & e^{-i\omega(a^+a-\frac{1}{2})t}(\cos Bt+i\frac{\Delta}{2}\frac{\sin Bt}{B}) \end{pmatrix} \tag{5}$$

式中 $\Delta=\omega_0-\omega=-f(t)$，$A=[(\Delta/2)^2+g^2aa^+]^{1/2}$，$B=[(\Delta/2)^2+g^2a^+a]^{1/2}$.

设初始时刻($t=0$)，原子处于基态和激发态的相干迭加态，即为

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\exp(-i\varphi) \end{pmatrix},$$

而辐射场处于相干态$|\alpha>$，则系统的初态为

$$|\varphi(0)\rangle=\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}|\alpha\rangle \\ \sin\frac{\theta}{2}\exp(-i\varphi)|\alpha\rangle \end{pmatrix} \tag{6}$$

那么系统任意时刻 t 的状态可由时间演化算符$U(t)$求出

$$|\varphi(t)\rangle=U(t)|\varphi(0)\rangle=\begin{pmatrix}|\varphi_1\rangle\\|\varphi_2\rangle\end{pmatrix}$$

$$|\varphi_1\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\cos\frac{\theta}{2}\exp(-|\alpha|^2/2)\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\exp(-i(n+2^{-1})\omega t)\left(\cos\Omega^+t-i\frac{\Delta}{2}\frac{\sin\Omega^+t}{\Omega^+}\right)|n\rangle-i\sum_{n=0}^{\infty}g\sin\frac{\theta}{2}\exp(-i\varphi)\exp(-|\alpha|^2/2)\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{n!}}\cdot\exp[-i(n+2^{-1})\omega t]\frac{\sin\Omega^+t}{\Omega^+}|n\rangle$$

$$|\varphi_2\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-|\alpha|^2/2)\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\exp\{-i[(n-2^{-1})\omega t+\varphi]\}\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\Omega^-t+i\frac{\Delta}{2}\frac{\sin\Omega^-t}{\Omega^-}\right)|n\rangle-i\sum_{n=0}^{\infty}g\cos\frac{\theta}{2}\exp[-i(n+2^{-1})\omega t][n+1]^{1/2}\cdot\frac{\sin\Omega^+t}{\Omega^+}\exp(-|\alpha|^2/2)\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n+1\rangle \tag{7}$$

式中 $\Omega^+=[(\Delta/2)^2+g^2(n+1)]^{1/2}$，$\Omega^-=[(\Delta/2)^2+g^2n]^{1/2}$. 系统的态密度算符为

$$\rho_s=|\varphi(t)\rangle\langle\varphi(t)| \tag{8}$$

子系统光场和原子的约化密度算符为

$$\rho_f(t)=Tr_a\rho_s(t)\ ,\ \rho_a(t)=Tr_f\rho_s(t) \tag{9}$$

以上式中的脚标 s，f 和 a 分别表示系统、光场和原子.

2 体系的量子态保真度

为了描述信息在传输过程中保持原来状态的程度，引入了保真度的概念. 其定义为[13]

$$F(\rho_1,\rho_2)=[\mathrm{Tr}(\sqrt{\rho_1}\rho_2\sqrt{\rho_1})^{1/2}]^2 \tag{10}$$

式中 ρ_1 和 ρ_2 为两种态所对应的态密度算符. $F(\rho_1,\rho_2)$取值范围在 0－1 之间. 当 $F(\rho_1,\rho_2)=0$ 时，表示信息(量子态)在传输过程中完全失真，表明初态和末态正交. 而当 $F(\rho_1,\rho_2)=1$ 时，表示为理想信息传输过程，表明初态和末态相同. 一般情况下，$0<F(\rho_1,\rho_2)<1$，表示信息在传输过程中存在失真. 利用式(6)、(7)、(8)、(9)和(10)，容易得出系统、光场和原子的量子态保真度表达式

$$F_s=|\cos\frac{\theta}{2}\langle\alpha|\varphi_1\rangle+\sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}\langle\alpha|\varphi_2\rangle|^2,$$

$$F_f=|\langle\alpha|\varphi_1\rangle|^2+|\langle\alpha|\varphi_2\rangle|^2$$

$$F_a=\sum_{n=0}^{\infty}[\cos^2\frac{\theta}{2}|\langle n|\varphi_1\rangle|^2+\frac{1}{2}\sin\theta e^{-i\varphi}\langle n|\varphi_1\rangle\cdot\langle\varphi_2|n\rangle+\frac{1}{2}\sin\theta e^{i\varphi}\langle n|\varphi_2\rangle\langle\varphi_1|n\rangle+\sin^2\frac{\theta}{2}|\langle n|\varphi_2\rangle|^2] \tag{11}$$

由式(11)可得到不同参量条件下系统、光场和原子的量子态保真度的演化规律. 下面通过数值计算讨论场频率随时间变化对系统、光场和原子的量子态保真度的影响.

3 数值计算与分析

为了方便讨论系统、光场和原子的量子态保真度的演化，取 $\varphi=0$，光场 $\alpha=|\alpha|e^{i\beta}$，取 $\beta=0$，$|\alpha|=\sqrt{n_0}$，n_0 为光场平均光子数. 设 $f(t)=u\sin(wt)$，u 为场频率变化的幅值，w 为变化的角频率，由式(4)可得出

$$\langle\alpha|\varphi_1\rangle=\cos\frac{\theta}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-|\alpha|^2)\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\exp[-i(n+2^{-1})\omega t]\left(\cos\Omega^+t-i\frac{\Delta}{2}\frac{\sin\Omega^+t}{\Omega^+}\right)-i\sin\frac{\theta}{2}\sum_{n=0}^{\infty}g\exp(-|\alpha|^2)\frac{|\alpha|^{2n+1}}{n!}\exp[-i(n+2^{-1})\omega t]\frac{\sin\Omega^+t}{\Omega^+}$$

$$\langle\alpha|\varphi_2\rangle=\sin\frac{\theta}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left(-|\alpha|^2\right)\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\exp\left[-\mathrm{i}(n-2^{-1})\omega t\right]\left(\cos\Omega^- t+\mathrm{i}\frac{\Delta}{2}\frac{\sin\Omega^- t}{\Omega^-}\right)-$$
$$\mathrm{i}\cos\frac{\theta}{2}\sum_{n=0}^{\infty}g\exp\left(-|\alpha|^2\right)\frac{|\alpha|^{2n+1}}{n!}\exp\left[-\mathrm{i}(n+2^{-1})\omega t\right]\frac{\sin\Omega^+ t}{\Omega^+}$$
$$\langle n|\varphi_1\rangle=\cos\frac{\theta}{2}\exp\left(-|\alpha|^2/2\right)\frac{|\alpha|^n}{\sqrt{n!}}\exp\left[-\mathrm{i}(n+2^{-1})\omega t\right]\left(\cos\Omega^+ t-\mathrm{i}\frac{\Delta}{2}\frac{\sin\Omega^+ t}{\Omega^+}\right)-$$
$$\mathrm{i}g\sin\frac{\theta}{2}\exp\left(-|\alpha|^2/2\right)\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{n!}}\exp\left[-\mathrm{i}(n+2^{-1})\omega t\right]\frac{\sin\Omega^+ t}{\Omega^+}$$
$$\langle n|\varphi_2\rangle=\sin\frac{\theta}{2}\exp\left(-|\alpha|^2/2\right)\frac{|\alpha|^n}{\sqrt{n!}}\exp\left[-\mathrm{i}(n-2^{-1})\omega t\right]\left(\cos\Omega^- t+\mathrm{i}\frac{\Delta}{2}\frac{\sin\Omega^- t}{\Omega^-}\right)-$$
$$\mathrm{i}g\cos\frac{\theta}{2}\exp\left(-|\alpha|^2/2\right)\frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{n!}}n\exp\left[-\mathrm{i}(n-2^{-1})\omega t\right]\frac{\sin\Omega^- t}{\Omega^-}\qquad(12)$$

在应用式(12)进行计算过程中，由于相位检测并不对应快速原子频率的响应，而只对应于缓变波包的演化，所以，在计算保真度时可忽略快速谐振因子，即含 ω 的项. 为比较起见，以下各图中曲线分别表示保真度 F_s，F_f+1 和 F_a+2 随规范时间 g_0t 的演化.

3.1　场频率振荡的幅值 u 变化对保真度演化的影响

取 $\omega_0=1\ 000\ g_0$，考虑场频率随时间正弦形式变化 $f(t)=u\sin(wt)$，取 $w=1.0g_0$，$\theta=0$ 即原子初态处于激发态. 1) $n_0=1$，场频率随时间变化的幅值 u 分别取 $0g_0$，$5g_0$，$10g_0$，$20g_0$ 时，系统、光场和原子的量子态保真度的演化规律见图 1；2) $n_0=5$，场频率随时间变化的幅值 u 分别取 0，$10g_0$，$20g_0$，$40g_0$ 时，系统、光场和原子的量子态保真度的演化规律见图 2. 从图 1、2 可见：场频率随时间变化对系统和光场的量子态保真度的演化影响很小，系统和光场的量子态保真度在 0 附近很小的值范围内振荡，表明系统和光场的量子态在演化过程中失真大. 另一方面，当 u 较小时，场频率随时间变化对原子的量子态保真度的演化的影响不大. 随幅值 u 的增大，场频率随时间变化对原子的量子态保真度的演化的影响增

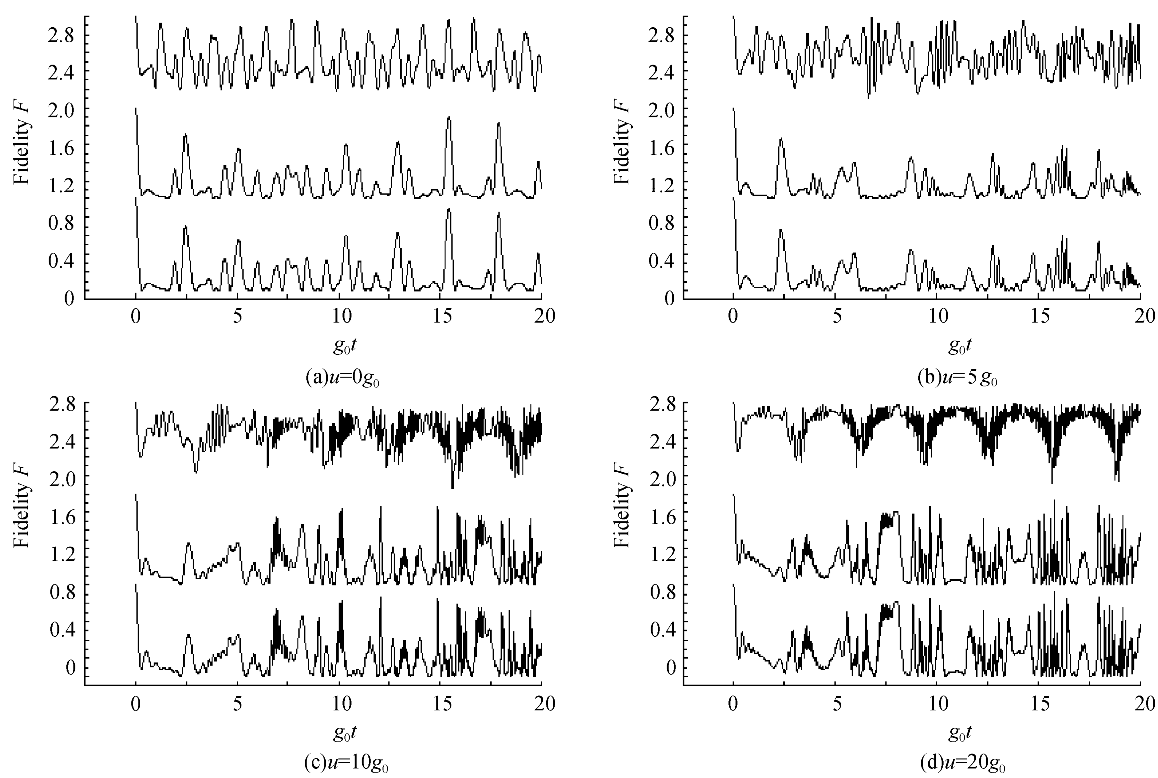


图 1　保真度 F_s，F_f+1 和 F_a+2 随时间 g_0t 的演化 $\theta=0$，$n_0=1$，$w=g_0$

Fig. 1　Time evolution of F_s，F_f+1 and F_a+2 where $\theta=0$，$n_0=1$ and $w=g_0$

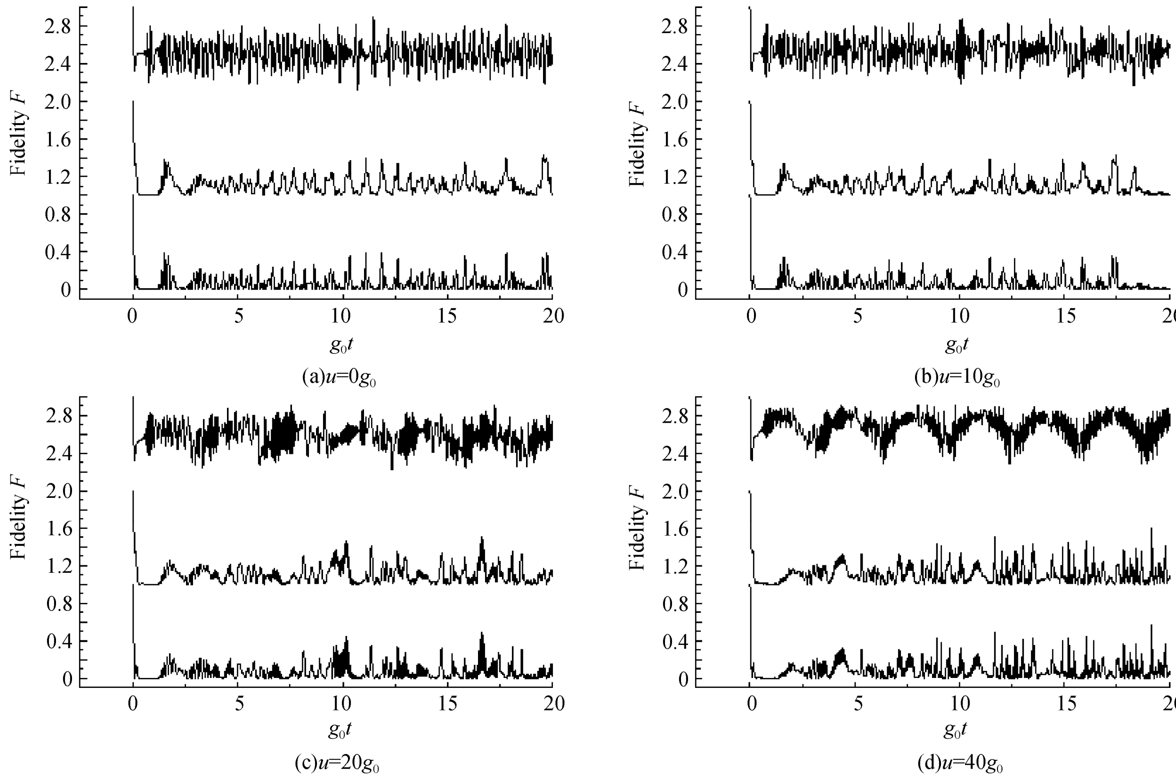


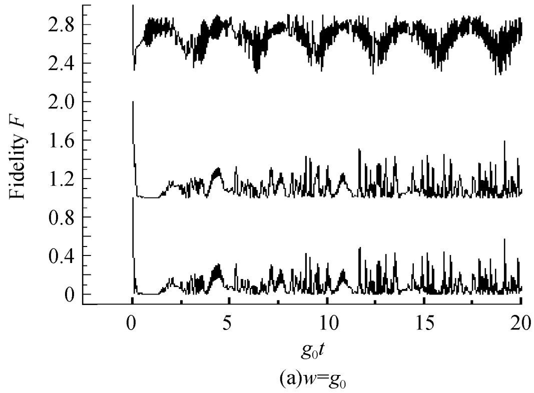
图 2 保真度 F_s，F_f+1 和 F_a+2 随时间 g_0t 的演化 $\theta=0$，$n_0=5$，$w=g_0$

Fig. 2 Time evolution of F_s，F_f+1 and F_a+2 where $\theta=0$，$n_0=5$ and $w=g_0$

强，原子量子态保真度的演化曲线受场频率随时间周期性变化的调制，u 大于一定值后，原子量子态保真度的演化曲线呈现准周期性振荡特性；并且随幅值 u 的增大，曲线中心上移，原子量子态保真度增大．这是因为随幅值 u 的增大，失谐量增大，原子与光场的相互作用减弱，它们之间的能量交换减少，所以原子量子态保真度增大．

3.2 场频率振荡的角频率 w 变化对保真度的影响

考虑 $\omega_0=1\ 000\ g_0$，$n_0=5$，$u=40g_0$，角频率 w 分别取 g_0 和 $2g_0$ 时，对应 $\theta=0$ 原子初态处于激发态时，系统、光场和原子的量子态保真度的演化规律见图 3．从图 3 可见：场频率振荡的角频率 w 变化对系统和光场的量子态保真度的演化影响很小．但频率 w 的变化影响原子量子态保真度演化的频率，角频率 w 越大，其准周期性演化的频率也越快，角频率 w 增大一倍，原子量子态保真度准周期性演化频率也增大一倍．



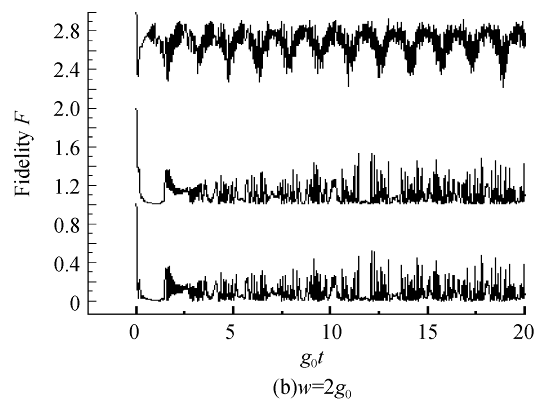


图 3 保真度 F_s，F_f+1 和 F_a+2 随时间 g_0t 的演化 $\theta=0$，$n_0=5$，$w=g_0$

Fig. 3 Time evolution of F_s，F_f+1 and F_a+2 where $\theta=0$，$n_0=5$ and $u=40g_0$

4 结论

本文利用 J-C 模型，考虑场频率受微扰的情况，并且光场频率随时间以正弦函数形式作小量变化的情形，在旋波近似下，研究了二能级原子与单模辐射场相互作用系统中量子态保真度的演化．利用数值计算方法给出量子态保真度随时间的演化曲线．研究结果表明：a）系统和光场的量子态保真度有相同

的演化规律,其保真度在 0 附近很小的值范围内振荡,表明系统和光场的量子态在演化过程中失真大,而原子的量子态保真度明显比系统和光场的量子态保真度大,表明原子的量子态在演化过程中失真小,稳定性好;b)场频率随时间正弦函数形式变化对系统和光场的量子态保真度的演化的影响很小,可以忽略;但对原子的量子态保真度的演化有显著影响.原子的量子态保真度的演化受场频率变化的调制,场频率振荡的幅值 u 越大调制作用越强,在场频率振荡的幅值 u 大于一定值后,量子态保真度将按场频率周期性的变化规律作周期性振荡.角频率 w 增大一倍,原子的量子态保真度周期性演化频率也增大一倍.

参考文献

[1] JAYNES E T,CUMMINGS F W. Comparison of quantum and semiclassical radiation theory with application to the beam maser[C]. *IEEE*,1963,**51**:89-109.

[2] ZHOU P,HU Z L,PENG J S. Effect of atomic coherence on the collapses and revivals in some generalized Jaynes-Cummings models[J]. *J Mod Opt*,1992,**39**(1):39-62.

[3] GUO Hong,PENG Jin-sheng. The relations of atomic dipole squeezing and two mode radiation field squeezing in a generalizeded two mode Jaynes Cummings model[J]. *Acta Optica Sinica*,1998,**18**(2):135-140.
郭红,彭金生.双模 Jaynes-Cummings 模型中原子偶极压缩与双模光场压缩间的关联[J].光学学报,1998,**18**(2):135-140.

[4] ZHAN You-bang. Atomic dipole squeezing in off-resonance two-photon Jaynes-Cummings model[J]. *Acta Physica Sinica*,1994,**43**(6):31.
詹佑邦.非共振双光子 Jaynes-Cummings 模型中原子的偶极压缩[J].物理学报,1994,**43**(6):31.

[5] WANG Xiao-guang, YU Rong-jin, YU Hua. Antibunching effect in the time-dependent Jaynes-Cumming model[J]. *Acta Photonica Sinica*,1998,**27**(4):304-308.
王晓光,于荣金,于桦.依赖于时间的 Jaynes-Cummings 模型中的反聚束效应[J].光子学报,1998,**27**(4):304-308.

[6] DUAN Lu-ming,GUO Guang-can. Perturbative expansions for the fidelities and spatially correlated disspation of quantum bits[J]. *Phys Rev*,1997,**A56**(6):4466-4470.

[7] WANG Xiang-bin, OH C H, KWEK L C. Bures fidelity of squeezed thermal states[J]. *Phys Rev*, 1998, **A58**(5): 4186-4190.

[8] LIU Tang-kun, WANG Ji-suo, ZHAN Ming-sheng. The fidelities of quantum states of system in Jaynes-Cummings model containing atomic motion[J]. *Chinese Journal of Atomic and Molecular Physics*,2001,**18**(1):58-63.
刘堂昆,王继锁,詹明生.含原子运动的 Jaynes-Cummings 模型中的量子态保真度[J].原子与分子物理学报,2001,**18**(1):58-63.

[9] ZHANG Deng-yu,GUO Ping,GAO Feng. Fidelity of two-level atoms' quantum states in a strong thermal radiation field[J]. *Acta Physica Sinica*,2007,**56**(4):1906-1910.
张登玉,郭萍,高峰.强热辐射环境中两能级原子量子态保真度[J].物理学报,2007,**56**(4):1906-1910.

[10] ZHANG Deng-yu,GAO Feng. Fidelity of a pair of atoms by dipole-dipole interaction quantum states in thermal radiation field[J]. *Acta Photonica Sinica*,2008,**37**(3):600-603.
张登玉,高峰.热辐射中存在偶极相互作用的原子量子态保真度研究[J].光子学报,2008,**37**(3):600-603.

[11] YANG Ya-ping, XU Jing-ping, LI Gao-xiang, *et al*. Interactions of a two-level atom and a field with a time-varying frequency[J]. *Phys Rev*,2004,**A69**(6):053406.

[12] LU Dao-Ming. Evolution of field entropy with a time-varying frequency in the multiphoton Jaynes-Cummings model[J]. *Acta Photonica Sinica*,2006,**36**(11):2142.
卢道明.原子与频率随时间变化场相互作用系统中场熵的演化[J].光子学报,2006,**36**(11):2142.

[13] JOZSA R. Fidelity for mixed quantum states[J]. *J Mod Opt*,1994,**41**(12):2315-2323.

Fidelity of Quantum States in the Jaynes-Cummings Model with a Time-varying Frequency Field

LU Dao-Ming

(*Department of Electronic Engineering*, *Wuyi University*, *Wuyishan*, *Fujian* 354300, *China*)

Abstract: Using the Jaynes-Cummings model, the dynamical properties of the fidelity of quantum states in the system that consists of a two-level atom interacting with a single-mode field are studied. The frequency of the field varying with time in the form of sine is considered. The results obtained by numerical calculations show that the time-evolution behavior of the fidelities of field and system are not influenced by the frequency variation of field, but the time-evolution behavior of the fidelity of atom is modulated by the frequency variation of field. The larger the amplitude of the field frequency variance u is, the stronger modulation interaction of the field frequency variance is. When the amplitude u is larger than a fixed value, the time-evolution behavior of the fidelity of atom will display periodic oscillation behavior. Its oscillation period is in agreement with the period of frequency varying.

Key words: Two-level atom; Jaynes-Commings model; Frequency of field varying with time; Fidelity of quantum states

LU Dao-ming was born in 1963. He is a professor and his research interests focus on quantum optics.