

文章编号:1004-4213(2010)12-2178-5

# 基于三维傅里叶频谱的计算全息图<sup>\*</sup>

刘道金, 黄素娟<sup>†</sup>

(上海大学 特种光纤与光接入网省部共建重点实验室, 上海 200072)

**摘要:**提出了一种新的三维物体计算全息图的合成方法. 在三维傅里叶旋转抛物面获取频谱理论的基础上, 利用圆形扫描获得少量投影, 采用多个半圆提取方式获取三维物体的频谱信息并采用共轭对称延拓计算全息编码得到计算全息图. 传统方法中, 在每幅投影上仅提取一个圆形的频谱信息. 在同等投影数量的情况下, 通过半圆方式在每幅投影上提取多于一个圆形信息的方法获得频谱信息, 提高了每幅投影的信息利用率和全息图再现图像的质量. 数字再现的实验证明了该方法的有效性及优越性.

**关键词:**计算全息图; 圆形扫描投影; 半圆提取; 三维傅里叶旋转抛物面

**中图分类号:** O438.1

**文献标识码:** A

**doi:** 10.3788/gzxb20103912.2178

## 0 引言

三维全息显示能够提供人眼所有的深度线索, 因此被认为是非常有前景的三维显示技术<sup>[1]</sup>. 光学全息需要稳定的光学系统及相干光源, 对设备的要求高, 难以在实验室外进行信息的采集, 这些阻碍了全息技术进一步的发展及应用. 计算全息可以避免传统方法中的限制<sup>[2]</sup>, 目前出现了多种三维物体计算全息的研究方法. 基于干涉的算法是根据光学传播的基本规则, 通过模拟物光和参考光的干涉来产生全息图, 它需要对三维物体的每个点进行运算, Lucente 提出了查表算法 (Look-up Table, LUT)<sup>[3-4]</sup>; 即先计算每个可能点的基本干涉条纹, 通过查表方式得到最后的全息图; Xu, Pan 等<sup>[5-6]</sup>在查表算法的基础上提出了分开查表 (Split Look-up Tables, S-LUT) 算法, 该方法把点的运算转化为线的运算, 提高了计算效率. 在基于多角度投影合成计算全息图方面, Shaked 等人<sup>[7-8]</sup>提出通过微镜阵列与数字处理相结合的方法合成全息图, 并得到了实时动态三维物体的全息再现; Yatagai 等人<sup>[9]</sup>提出利用三维傅里叶旋转抛物面理论合成计算全息图的算法. 本文对文献<sup>[9]</sup>做了改进, 并提出了新的频谱数据采集理论及方法, 在每幅投影上采用多个半圆提取方式获取三维物体的频谱信息, 在同等投影数量的情况下, 提高了每幅投影的信息利用率和全息图

再现图像的质量, 数字再现的实验证明了该方法的可行性及优越性.

## 1 理论基础

本文利用在非相干光记录下的少量投影合成三维物体的计算全息图. 图 1 为记录三维物体的虚拟光学系统. 假设三维物体表面反射来自外部均匀分布的光, 物光波分布以复数的形式表达. 由于在没有

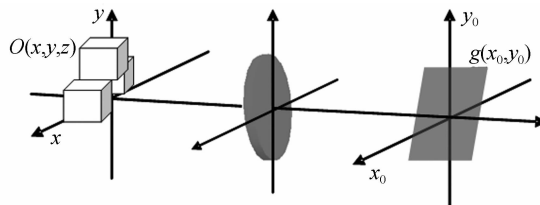


图 1 记录三维物体的虚拟光学系统

干涉的情况下, 电荷耦合器件 (Charge Coupled Device, CCD) 不能记录物体的相位信息, 此处假设物光波的相位分布是均匀不变的.  $O(x, y, z)$  表示空间相位不变物体的反射强度, 物体反射的物光波在图 1 所示的傅里叶平面上进行观察, 接收到的频谱信息分布  $g(x_0, y_0)$  如式 (1)<sup>[10]</sup>

$$g(x_0, y_0) = \iiint O(x, y, z) \exp \left\{ -\frac{i2\pi}{\lambda} \left[ \frac{x_0 x + y_0 y - (x_0^2 + y_0^2)z}{f} \right] \right\} dx dy dz \quad (1)$$

式中  $\lambda, f$  分别是入射光的虚拟波长和透镜的焦距. 为获得  $g(x_0, y_0)$  与物光波分布  $O(x, y, z)$  的三维傅里叶频谱之间的关系, 令  $u = x_0/\lambda f, v = y_0/\lambda f$ , 式 (1) 可写为

<sup>\*</sup>上海市重点学科和科委重点实验室项目 (S30108, 08DZ2231100) 资助

<sup>†</sup> Tel: 021-56332337

Email: sjhuang@shu.edu.cn

收稿日期: 2010-05-26

修回日期: 2010-07-30

$$g(u, v) = \iiint O(x, y, z) \exp \{ -i2\pi[ux + vy - \frac{\lambda}{2}(u^2 + v^2)z] \} dx dy dz = \{ \iiint O(x, y, z) \cdot \exp [ -i2\pi(ux + vy + wz) ] dx dy dz \} |_{w = -\lambda(u^2 + v^2)/2} = F[O(x, y, z)] |_{w = -\lambda(u^2 + v^2)/2} \quad (2)$$

式中抛物面方程为

$$w = -\lambda(u^2 + v^2)/2 \quad (3)$$

$F[\cdot]$ 代表三维傅里叶变换,式(2)代表三维傅里叶空间 $(u, v, w)$ 上的旋转抛物面.因此,我们能够确定傅里叶平面上的波分布完全与 $O(x, y, z)$ 的三维傅里叶空间上的旋转抛物面等同.

## 2 信息的提取

式(2)表明,可以通过获取 $O(x, y, z)$ 的三维傅里叶空间信息间接的获取三维物体的频谱分布 $g(u, v)$ .根据三维中心切片理论<sup>[11]</sup>,物体的三维傅里叶频谱可通过物体在不同方位角的投影获得.三维中心切片理论确保了从三维物体的正交投影中获取三维傅里叶旋转抛物面信息的可行性.具体操作描述为:首先把三维物体投影到一个平面上,获得一幅正交矢量与 $z$ 轴成 $\theta$ 角的投影;然后对二维投影平面做傅里叶变换;二维投影傅里叶变换后的频谱信息与物体的三维傅里叶旋转抛物面中正交矢量与 $w$ 轴成 $\theta$ 角的部分傅里叶平面相对应.因此,能够从一幅投影的频谱中获取式(2)所表示的旋转抛物面上的部分信息.

如图2,只有二维投影的傅里叶平面与旋转抛物面相交的部分才可以从物体投影的傅里叶平面中

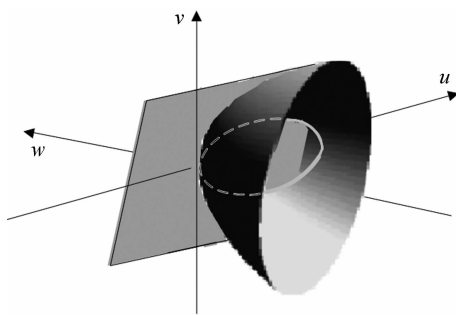


图2 旋转抛物面上的信息提取

Fig. 2 Information extraction on the paraboloid of revolution

提取出来.图2所示的二维投影的傅里叶平面方程可表示为

$$w \sin \theta = v \cos \theta \quad (4)$$

因此,可以通过求解式(3)与式(4)的方程获取相交部分的表达式.求得交点部分的方程为

$$(u - \frac{\tan \theta}{\lambda})^2 + v^2 = (\frac{\tan \theta}{\lambda})^2 \quad (5)$$

式(5)表明二维投影的傅里叶平面与三维傅里

叶旋转抛物面的相交部分为一个三维空间中的椭圆形.为了简化问题,降低抽样难度,只取它在 $u-v$ 平面上的投影值.而相交部分投影到 $u-v$ 平面上变成了一个圆形,其半径为 $\tan \theta \lambda$ ,圆的中心坐标随投影的方向变化.为了获得二维 $u-v$ 平面上所有的投影信息,只需要对三维物体进行圆形扫描,采用如图3所示方法记录,通过绕 $z$ 轴旋转( $0^\circ \leq \phi \leq 360^\circ$ )扫描获取三维物体的少量投影,并从每一幅投影的频谱平面上提取一个圆形的信息填充 $u-v$ 平面.图4(a)是方位角 $\phi = 0^\circ$ 时的一幅投影填充 $u-v$ 平面.尽管获得的投影不是十分精确的正交投影,但由于物体到CCD的距离比物体的深度大的多,可以认为获得的是三维物体的正交投影图像.

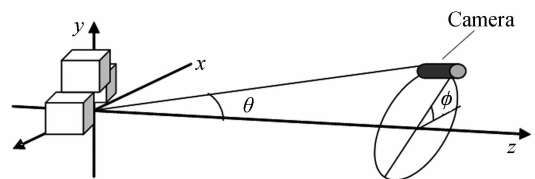
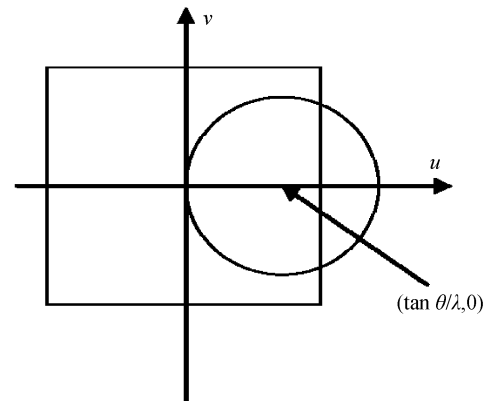
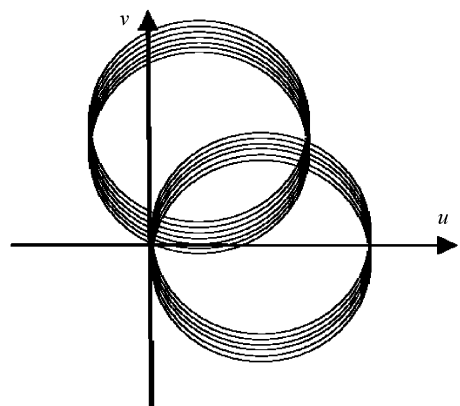


图3 记录三维物体投影

Fig. 3 A recording optical system



(a) A circular extraction from one projection



(b) More information extraction from each projection

图4  $u-v$ 平面上的频谱提取

Fig. 4 Extractive area on the  $u-v$  plane

高质量的全息图需要许多的投影用于充分提取三维傅里叶旋转抛物面上的信息,因此增加了采集的难度,降低了合成三维物体计算全息图的效率.在获取少量三维物体二维投影的情况下,若要获得足

够的三维场景信息,必须充分提取每幅投影频谱上的信息.由式(5),当  $u$  为一定值时,可以得到

$$v = \pm \sqrt{\left(\frac{\tan \theta}{\lambda}\right)^2 - \left(u - \frac{\tan \theta}{\lambda}\right)^2} \quad (6)$$

式中  $v$  为非整数,由于二维傅里叶平面上的数值是离散的,从二维傅里叶平面上提取圆形信息的时候,需要把  $v$  的值由非整数变化成整数,因此存在量化误差.如果仅提取一个圆形的频谱信息,会造成一部分信息的丢失,所以我们可以同时取分别满足  $[v \pm 0.5]$  的部分,其中  $[\ ]$  表示四舍五入求整.同时,为了更有效地在每幅投影上提取更多的信息,还可以取  $[v \pm 0.5] \pm 1$ 、 $[v \pm 0.5] \pm 2$  的近似点信息共同填充  $u-v$  平面,如图 4(b),根据一幅投影的傅里叶变换平面提取更多的圆填充二维  $u-v$  平面.设  $u_0$  为定值,当提取  $v_0 + 1$  的信息时,设  $w$  轴上对应的值为  $w_1$ .由式(3),得

$$\begin{aligned} w_1 &= -\lambda[u_0^2 + (v_0 + 1)^2]/2 = -\lambda(u_0^2 + v_0^2 + \\ &2v_0 + 1)/2 = -\lambda(u_0^2 + v_0^2)/2 - \lambda v_0 - \lambda/2 = \\ &w_0 - \lambda v_0 - \lambda/2 \end{aligned} \quad (7)$$

由式(7)可知,  $w_1$  与  $w_0$  有差异,实际上也就是提取到的两个圆形信息所对应的三维傅里叶旋转抛物面有差异.如果要获得准确的点信息填充二维  $u-v$  平面,则必须满足  $w_1 \approx w_0$  的条件.由于  $w_1$  中  $v_0$  的平方项比  $v_0$  变化快的多,因此可以近似认为在整个  $u-v$  平面内都满足  $w_1 \approx w_0$  的条件.

如图 4(b),随着投影幅数的增加,以及每幅投影上提取圆数目的增加,会有大量的信息重叠,而信息重叠会造成噪音.因此,在每幅投影的频谱上,采用多个半圆方式代替全圆方式提取频谱信息填充二维  $u-v$  平面.

为了产生三维物体的计算全息图,采用共轭对称延拓计算全息编码<sup>[12]</sup>得到计算全息图.在这个方法中,考虑一个由物光波  $f_0(m, n)$  共轭对称延拓后得到的复振幅分布  $f(m, n)$ ,令  $M$  和  $N$  均为偶数,则

$$f(m, n) = \begin{cases} f_0(m, n) & (m=1, 2, \dots, M/2-1, \\ & n=1, 2, \dots, N-1) \\ f_0^*(M-m, N-n) & (m=M/2+1, \dots, M-1, \\ & n=1, 2, \dots, N-1) \\ 0 & (m=0, \text{ or } m=M/2, \\ & \text{ or } n=0) \end{cases} \quad (8)$$

式中上标“\*”表示复共轭.其二维离散 Fourier 变换为

$$F(\mu, \nu) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cdot$$

$$\exp \left[ -j2\pi \left( \frac{m\mu}{M} + \frac{n\nu}{N} \right) \right] \quad (\mu=0, 1, \dots, M-1) \\ (\nu=0, 1, \dots, N-1) \quad (9)$$

把物光波复振幅表示为  $f_0(m, n) = A(m, n) \cdot \exp[j\varphi(m, n)]$  的形式,可以获得

$$F(\mu, \nu) = \frac{2}{MN} \sum_{m=1}^{M/2-1} \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ A(m, n) \cos \left[ 2\pi \left( \frac{m\mu}{M} + \frac{n\nu}{N} - \varphi(m, n) \right) \right] \right\} \quad (\mu=0, 1, \dots, M-1, \\ \nu=0, 1, \dots, N-1) \quad (10)$$

实值函数  $F(\mu, \nu)$  被线性映射至非负实数  $[0, 255]$  之间,用数字方法制作灰度全息图.该计算全息图算法的具体描述参考文献<sup>[12]</sup>.获得的二维实值函数  $F(\mu, \nu)$  包含了物光波的幅度  $A(m, n)$  和相位信息  $\varphi(m, n)$ .

### 3 实验及分析

实验中用 3D MAX 软件在计算机中产生一个三维物体,采用如图 3 所示的全圆扫描方式等间隔 ( $8^\circ$ ) 获取 45 幅二维投影,图 5 是其中间隔为  $72^\circ$  的五幅投影,每幅投影的大小为  $256 \times 256$  像素,投影与视轴  $z$  的夹角  $\theta = 17^\circ$ .三维物体中字母 G、C、H 的前表面距坐标中心距离分别为  $-0.4$  cm,  $0.3$  cm,  $0.6$  cm,采用不同的方式提取 45 幅投影的傅里叶频谱填充二维  $u-v$  平面,利用共轭对称延拓计算全息编码把抽样结果编码成计算全息图并数字再现.



图 5 不同角度下的五幅投影

Fig. 5 Five projections at different angles

首先采用传统的方法,每幅投影上提取一个全圆频谱,获得  $u-v$  平面上的抽样结果如图 6,合成三维物体的计算全息图,在其对应距离处的数字再现如图 7;然后每幅投影上提取三个全圆频谱,获得

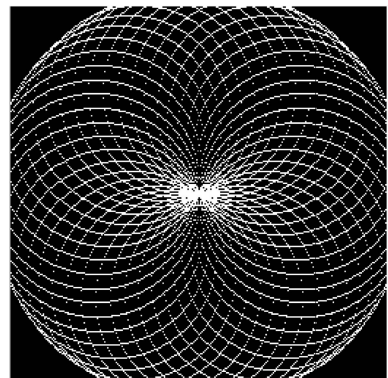


图 6 每幅提取一个全圆频谱时的抽样结果

Fig. 6 Sampling result of extraction one circle spectrum from each projection

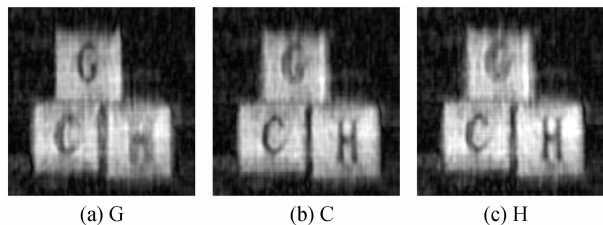


图 7 每幅提取一个全圆频谱时的数字再现  
Fig. 7 Numerical reconstruction of extraction one circle spectrum from each projection

$u-v$  平面上的抽样结果如图 8,合成三维物体的计算全息图,在其对应距离处的数字再现如图 9;最后每幅投影上提取六个半圆频谱信息,获得  $u-v$  平面上的抽样结果如图 10,合成三维物体的计算全息图,在其对应距离处的数字再现如图 11.

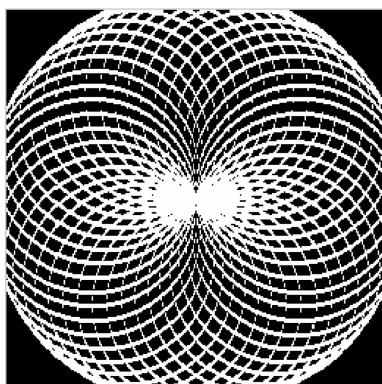


图 8 每幅提取三个全圆频谱时的抽样结果  
Fig. 8 Sampling result of extraction three circles spectrum from each projection

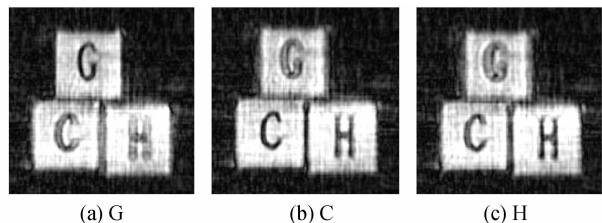


图 9 每幅提取三个全圆频谱时的数字再现  
Fig. 9 Numerical reconstruction of extraction three circles spectrum from each projection

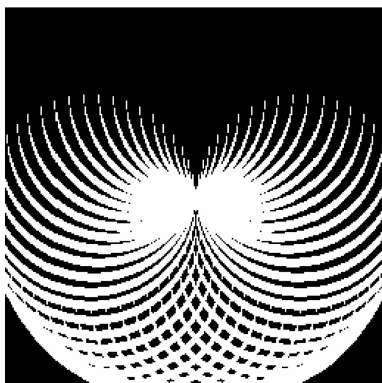


图 10 每幅提取六个半圆信息时的抽样结果  
Fig. 10 Sampling result of extraction six semi-circles spectrum from each projection

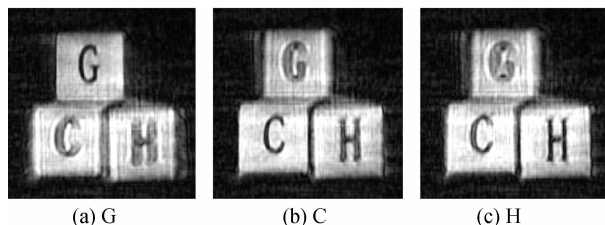


图 11 每幅提取六个半圆信息时的数字再现  
Fig. 11 Numerical reconstruction of extraction six semi-circles spectrum from each projection

通过比较图 7 与图 9 可知,随着每幅投影上提取圆形个数的增加,有效信息逐渐增加,合成全息图的再现质量明显提高.比较图 9 与图 11 可知,采用多个半圆提取方法合成三维物体的计算全息图,避免了部分信息的重叠,有效地降低了合成全息图再现图像的噪音,能够较好地再现三维物体的深度信息,显著地提高了三维物体图像的再现质量.

## 4 结论

仅需对三维物体进行全圆扫描获取投影,从一幅投影的傅里叶变换平面上提取多于两个半圆的频谱信息,利用物体少量的二维投影就能够合成高质量的三维物体计算全息图.因此,这种方法有效地降低了获取三维物体信息的难度,提高了合成计算全息图的效率.实验结果证明了所提方法和理论的有效性及其优越性,为下一步三维物体计算全息图的动态再现奠定了良好的基础.

### 参考文献

- [1] SLINGER C W, CAMERON C D, STANLEY M. Computer-generated holography as a generic display technology [J]. *IEEE Computer*, 2005, **38**(8): 46-53.
- [2] LOHMANN A W, PARIS D P. Binary fraunhofer holograms, generated by computer[J]. *Appl Opt*, 1967, **6**(10): 1739-1748.
- [3] KIM S C, KIM E S. Effective generation of digital holograms of three-dimensional objects using a novel look-up table method [J]. *Appl Opt*, 2008, **47**(19): D55-D62.
- [4] LUCENTE M. Interactive computation of holograms using a look-up table[J]. *Electronic Imaging*, 1993, **2**(1): 28-34.
- [5] XU X, SOLANKI S, LIANG X, et al. Computer-generated holography for dynamic display of 3D objects with full parallax [J]. *The International Journal of Virtual Reality*, 2009, **8**(2): 33-38.
- [6] PAN Y, XU X, SOLANKI S, et al. X Liang. Fast CGH computation using S-LUT on GPU[J] *Opt Lett*, 2009, **21**(17): 18543-18555.
- [7] SHAKED N T, ROSEN J, STERN A. Integral holography: white-light single-shot hologram acquisition[J]. *Opt Express*, 2007, **15**(9): 5754-5760.
- [8] SHAKED N T, KATZ B, ROSEN J. Review of three-dimensional holographic imaging by multiple viewpoint projection based methods[J]. *Appl Opt*, 2009, **34**(48): 120-136.
- [9] SANDO Y, ITOH M, YATAGAI T. Full-color computer-generated holograms using 3-D Fourier spectra [J]. *Opt*

- Express, 2004, **12**(25): 6246-6251.
- [10] SANDO Y, ITOH M, YATAGAI T. Holographic three-dimensional display synthesized from three-dimensional Fourier spectra of real existing objects[J]. *Opt Lett*, 2003, **28**(24): 2518-2520.
- [11] CHIU M Y, BARRETT H H, SIMPSON R G. Three-dimensional reconstruction from planar projections [J]. *JOSA*, 1980, **70**(7): 755-762.
- [12] HUANG Su-juan, WANG Shuo-zhong, YU Ying-jie. Computer generated holography based on Fourier transform using conjugate symmetric extension [J]. *Acta Physica Sinica*, 2009, **58**(2): 952-958.
- 黄素娟,王朔中,于瀛洁. 共轭对称延拓傅里叶计算全息[J]. *物理学报*, 2009, **58**(2):952-958.

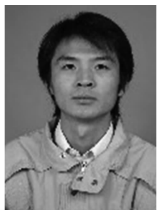
## Computer Generated Holography Based on 3-D Fourier Spectra

LIU Dao-jin, HUANG Su-juan

(Key Laboratory of Specialty Fiber Optics and Optical Access Networks, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

**Abstract:** A new method was proposed to synthesize computer-generated hologram of three-dimensional object. According to the principles of paraboloid of revolution in three-dimensional Fourier space, spectra information of three-dimensional object was gathered. A series of projection images of three-dimensional object was recorded by circular scanning method, then the information of the projection spectra in several semi-circles form was extracted and encoded into computer-generated hologram based on conjugate-symmetric extension. In the traditional method, the spectrum information is extracted in a circular form from each projection. In the case of an equal number of projections, the proposed method can extract more spectrum information. So it can effectively improve utilization of each projection, and the quality of reconstructed image from computer-generated hologram. Experimental results validate the proposed method and its good performance.

**Key words:** Computer-generated hologram; Circular scanning projections; Semi-circle extraction; Paraboloid of revolution in 3D Fourier space



**LIU Dao-jin** was born in 1984. Now he is a M. S. degree candidate at Shanghai University, and his research interests focus on computer-generated hologram of 3D objects.



**HUANG Su-juan** was born in 1968, and received her Ph. D. degree from Shanghai University in communication and information system, in 2009. Now she is a senior engineer and her research interests focus on computer-generated holography and image processing.