

文章编号:1004-4213(2010)11-2093-4

三光子纠缠 W 态隐形传输令牌总线网的保真度计算*

周小清, 邬云文

(吉首大学 物理科学与信息工程学院, 湖南 吉首 416000)

摘要: 计算了三光子 W 态隐形传输令牌总线网的保真度. 通过计算发现在整个量子网络通信过程中, 对于给定的分析角 θ , 保真度仅与系数 $|a|^2$ 有关; 随着分析角 θ 的增加, 保真度出现最大值所对应的系数 $|a|^2$ 相应减小, 取 $\theta = \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$ 时可使保真度达最大值 1, 此时对应的 $|a|^2$ 分别为 0.724、0.5 和 0.276. 对于给定的系数 $|a|$, 保真度仅与分析角 θ 有关; 若 $|a| = 0$, 则无论 θ 为何值, 保真度始终为 0; 若 $|a| = |b| = 0.7071$, 则当 $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ 时保真度达最大值 1.

关键词: 量子通信; 量子隐形传态; W 态; 保真度

中图分类号: TN915.01; TN929.1V4 **文献标识码:** A **doi:** 10.3788/gzxb20103911.2093

0 引言

量子隐形传态由 Bennett 等不同国家的六位科学家于 1993 年联名提出后^[1], 立即引起了各国科学家的广泛关注, 激发了人们研究量子隐形传态的极大兴趣. 1997 年, 由 Bouwmeester 等人利用纠缠光子对作为量子信道实现了人类历史上的第一次隐形传态^[2], 从实验上证明了量子隐形传态的客观存在. 从 1997 年到现在不过十多年的时间里, 又有一些科学家利用不同的方法实现了量子隐形传态, 并提出了多种隐形传态方法和量子通信方案. 例如裴昌幸等人提出的基于纠缠态的量子中继通信系统方案^[3], 李德超等人提出的基于混合纠缠态的概率隐形传态方案^[4], 张天鹏等人提出了一种基于多粒子纠缠态的通信方案及协议^[5], 周锐等人设计的四维二粒子超密编码的单向通信方案等^[6]. 为制作量子逻辑门, 邬云文等人还对囚禁在 Paul 阱内的二囚禁离子的纠缠态进行了研究并计算出了前 100 个位态^[7-10].

目前通信网络远不止两个终端, 这就需要更多的光子纠缠以提供不止两个终端的同时通信, 从而促使科学家研究如何制备多光子纠缠系统. 我国学者潘建伟、赵志等于 2001 年在实验室实现了四光子纠缠, 并在 2004 年首次实现了五光子纠缠^[11-12].

在 2000 年, Dür 等人在研究三光子纠缠时发

现^[13], 如果态的转化只通过随机性局域操作和经典通信来进行, 则可将任意的三光子纠缠态转换为高亮度高质量纠缠 (Greenberger-Home-Zeilinger, GHZ) 态和纠缠 W 态两种基本形式. 利用三光子纠缠 W 态, 周小清、邬云文设计出了隐形传态令牌总线通信网络^[14], 并研究了利用纠缠交换实现远程多光子纠缠^[15-16]; 此外, 我国也有较多的学者研究了密钥分配、稠密编码量子网络^[17-21], 对量子网络的发展作出了较大的贡献. 然而在上述文献中对于量子通信网络的保真度还没有考虑, 而保真度表征输入态与输出态的接近程度, 是量子通信中的一个重要物理量. 本文将在文献[14]的基础上研究三光子纠缠 W 态令牌总线网的保真度.

1 三光子纠缠 W 态隐形传态方法

由文献[14]可知, 利用三光子纠缠 W 态进行隐形传态的方法为:

假设在甲地的 Alice 手中有一光子 1, 其量子态为

$$|\psi\rangle_1 = a|0\rangle_1 + b|1\rangle_1 \quad (1)$$

式中 $a^2 + b^2 = 1$. 现需要将该光子的量子态传送给在乙地的 Bob 或丙地的 Cliff, 为此, 必须在 Alice、Bob 和 Cliff 间建立量子信道进行通信, 其方法如下:

1) 建立量子信道 (制备三光子 W 态), 利用三光子 W 态纠缠源产生三纠缠光子 2, 纠缠光子 3 和纠缠光子 4, 它们的纠缠态设为

$$|\psi\rangle_{234} = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle_{234} + |010\rangle_{234} + |100\rangle_{234}) \quad (2)$$

2) 将 $|\psi\rangle_{234}$ 中的光子 2 传给 Alice, 光子 3 传给 Cliff, 光子 4 传给 Bob;

3) Alice 将手中的光子 1 和光子 2 进行联合

* 湖南省科技计划 (2008FJ3078、2010FJ3081)、教育部自然科学基金重点项目 (208099)、波谱与原子分子物理国家重点实验室基金 (T152908) 和湖南省教育厅自然科学基金重点项目 (07A057) 资助

Tel: 0743-8564492

Email: Zhouxq_jd@163.com

收稿日期: 2010-04-19

修回日期: 2010-05-04

Bell 基测量,然后将测量结果发送到公用的经典信道上;

4)Cliff 在公用的经典信道上收到 Alice 的测量结果后再进行 von Neumann 测量,并将测量结果也发送到公用的经典信道上;

5)Bob 根据 Alice 和 Cliff 的测量结果选择适当的么正变换矩阵对光子 4 进行么正变换从而得到光子 1 在传送前的量子态.

由上述隐形传态过程可以看出,量子态的传递过程如图 1. 图中 $|\psi\rangle_1$ 、 $|\psi_{00}\rangle_{34}$ 、 $|\psi_{00x}\rangle_4$ 分别为待传

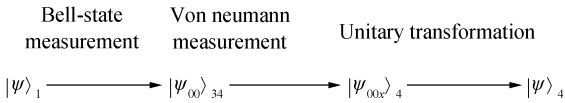


图 1 隐形传态流程
Fig. 1 Teleportation flow diagram

送光子的初态,经 Alice 进行 Bell 基测量后的量子态和进行 von Neumann 测量后的量子态

$$|\psi\rangle_4 = U_{00x}^{-1} |\psi_{00x}\rangle_4 = a|0\rangle_4 + b|1\rangle_4,$$

式中 $U_{00x}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{[14]}$.

2 隐形传态的保真度

由文献[14]可知,当 Cliff 作 von Neumann 测量时,在新基底 $|x\rangle$ 、 $|y\rangle$ 下,光子 3 的量子态可以分解为

$$|0\rangle_3 = \sin \theta |x\rangle_3 + \cos \theta |y\rangle_3 \tag{3a}$$

$$|1\rangle_3 = \cos \theta |x\rangle_3 - \sin \theta |y\rangle_3 \tag{3b}$$

式中 θ 为分析角. 又由文献[14]可得

$$|\psi_{00}\rangle_{34} = (a \sin \theta |1\rangle_4 + a \cos \theta |0\rangle_4 + b \sin \theta |0\rangle_4) |x\rangle_3 + (a \cos \theta |1\rangle_4 - a \sin \theta |0\rangle_4 + b \cos \theta |0\rangle_4) |y\rangle_3 \tag{4}$$

显然,Cliff 的测量结果有两种可能,测得 $|x\rangle_3$ 和 $|y\rangle_3$ 的几率均为 1/2; 测量后,Cliff 需将测量结果通过一经典线路传给 Bob, Bob 根据 Cliff 的测量结果进行一恰当的么正变换即可得到光子 1 的量子态. 现假设 Cliff 的测量结果为 $|x\rangle_3$, 则光子 4 的状态为

$$|\psi_{00x}\rangle_4 = a \sin \theta |1\rangle_4 + a \cos \theta |0\rangle_4 + b \sin \theta |0\rangle_4 = a \sin \theta |1\rangle_4 + (a \cos \theta + b \sin \theta) |0\rangle_4 \tag{5}$$

归一化后可得

$$|\psi_{00x}\rangle_4 = \frac{a \sin \theta |1\rangle_4 + (a \cos \theta + b \sin \theta) |0\rangle_4}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + (a \cos \theta + b \sin \theta)^2}} \tag{6}$$

又由文献[14]可知,当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时,有

$$|\psi_{00}\rangle_4 = U_{00x}^{-1} |\psi_{00x}\rangle_4 = a|0\rangle_4 + b|1\rangle_4 \tag{7}$$

其保真度为

$$F_4^1(|\psi_{00}\rangle_4, \rho_{00x4}) = {}_4\langle \psi_{00} | \rho_{00x4} | \psi_{00}\rangle_4 = {}_4\langle \psi_{00} | |\psi_{00x}\rangle_{44} \langle \psi_{00x}|$$

$$\begin{aligned} &|\psi_{00}\rangle_4 = {}_4\langle \psi_{00} | |\psi_{00x}\rangle_4|^2 = \\ &\frac{(a^2 \cos \theta + 2ab \sin \theta)^2}{a^2 \sin^2 \theta + (a \cos \theta + b \sin \theta)^2} \end{aligned} \tag{8}$$

由式(8)可以绘出保真度 F_4^1 与系数 $|a|^2$ 的曲线图(见图 2). 由式(8)和图 2 可知:若 $\theta=0$, 保真度为 $|a|^2$ 的线性函数,无极大值;若 $\theta=\pi/4$, 当 $|a|^2=0.724$ 时,保真度达到最大值 1;若 $\theta=\pi/2$, 当 $|a|^2=0.5$ 时,保真度达到最大值 1;若 $\theta=3\pi/4$, 当 $|a|^2=0.276$ 时,保真度达到最大值 1. 对于给定的分析角,保真度仅与系数 $|a|^2$ 有关,保真度取最大值的位置 $|a|^2$ 随分析角 θ 的增加而减小.

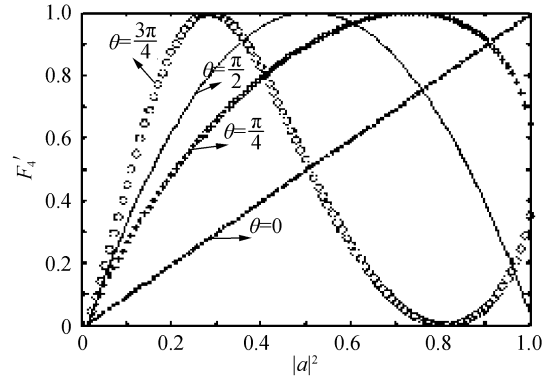


图 2 保真度 F_4^1 与系数 $|a|^2$ 的变化关系
Fig. 2 Relationship of fidelity F_4^1 and coefficient $|a|^2$

由式(8)可以绘出保真度 F_4^1 与分析角 θ 的关系图(见图 3). 由式(8)和图 3 可知,对于给定的系数 a , 保真度仅与分析角 θ 有关,若 $|a|=0$, 则不论 θ 为何值,保真度始终为 0;若 $|a|=\sqrt{2}/2$, 则当 $\theta=\pi/2$ ($=1.57$)、 $3\pi/2$ ($=4.71$) 时达最大值 1;若 $|a|=1$, 则当 $\theta=0, \pi, 2\pi$ 时保真度达最大值 1.

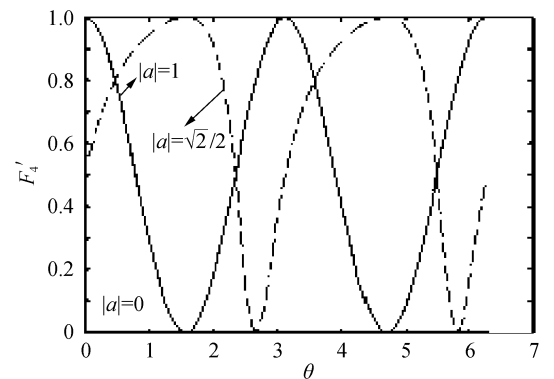


图 3 保真度 F_4^1 与分析角 θ 的变化关系
Fig. 3 Relationship of Fidelity F_4^1 and analyzer angle θ

3 结论

在整个量子网络通信过程中,对于给定的分析角,保真度仅与系数 $|a|^2$ 有关,保真度取最大值的位置 $|a|^2$ 随分析角 θ 的增加而减小,且当 $\theta=\pi/4, \pi/2, 3\pi/4$ 时可使保真度达最大值 1, 此时对应的 $|a|^2$ 分别为 0.724、0.5 和 0.276. 对于给定的系数

$|a|$, 保真度仅与分析角 θ 有关;若 $|a|=0$, 则不论 θ 为何值, 保真度始终为 0;若 $|a|=|b|=\sqrt{2}/2$, 则当 $\theta=\pi/2, 3\pi/2$ 时达最大值 1.

参考文献

- [1] BENNETT C H, BRASSARD G, CREPEAU C, *et al.* Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels[J]. *Phys Rev Lett*, 1993, **70**(13): 1895-1898.
- [2] BOUWMEESTER D, PAN J W, MATTLE K, *et al.* Experimental quantum teleportation[J]. *Nature*, 1997, **390**(6660): 575-579.
- [3] PEI Chang-xing, YAN Yi, LIU Dan, *et al.* A quantum repeater communication system based on entanglement[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2008, **37**(12): 2422-2426.
裴昌幸, 阎毅, 刘丹, 等. 一种基于纠缠态的量子中继通信系统[J]. *光子学报*, 2008, **37**(12): 2422-2426.
- [4] LI De-chao, SHI Zhong-ke. The probabilistic teleportation via bi-particle mixed state[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2009, **38**(4): 983-986.
李得超, 史忠科. 基于混合纠缠态的概率隐形传态[J]. *光子学报*, 2009, **38**(4): 983-986.
- [5] ZHANG Tian-peng, NIE Min, PEI Chang-xing. Research on multi-particle entangled state QTDM communication scheme and QMU protocol[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2009, **38**(4): 987-991.
张天鹏, 聂敏, 裴昌幸. 多粒子纠缠态 QTDM 通信方案及 QMU 协议[J]. *光子学报*, 2009, **38**(4): 987-991.
- [6] ZHOU Rui, ZHU Yu-lan, NIE Yi-you. One-way communication scheme based on superdense coding of four dimension two particles[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2010, **39**(1): 156-159.
周锐, 朱玉兰, 聂义友. 四维二粒子超密编码的单向通信方案[J]. *光子学报*, 2010, **39**(1): 156-159.
- [7] WU Yun-wen, HAI Wen-hua. Exact quantum motions of two ions in a two-dimensional paul trap[J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, **55**(11): 5721-5727.
邬云文, 海文华. 共面两囚禁离子体系精确的量子运动[J]. *物理学报*, 2006, **55**(11): 5721-5727.
- [8] WU Yun-wen, HAI Wen-hua. Energy eigenstates' s of two ions in a two-dimensional paul trap[J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, **55**(7): 3315-3321.
邬云文, 海文化. Paul 阱中共面两离子系统的能量本征态[J]. *物理学报*, 2006, **55**(7): 3315-3321.
- [9] WU Yun-wen, HAI Wen-hua, CAI Li-hua. Energy band structure of two ions in a one- dimensional paul trap[J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, **55**(2): 583-589.
邬云文, 海文化, 蔡丽华. Paul 阱中一维两离子系统的能带结构[J]. *物理学报*, 2006, **55**(2): 0583-0589.
- [10] WU Yun-wen, HAI Wen-hua. A dimension energy eigenstates s character of two Bi⁺ in Paul trap[J]. *Journal of Atomic and Molecular Physics*, 2006, **23**(3): 437-443.
邬云文, 海文华. Paul 阱中两个 Bi⁺ 共线的能量本征态性质[J]. *原子分子物理学报*, 2006, **23**(3): 437-443.
- [11] PAN J W, DANIELL M, GASPARONI S *et al.* Experimental demonstration of four-photon[J]. *Phys Rev Lett*, 2001, **86**(20): 4435-4439.
- [12] ZHAO Z. Experimental demonstration of five-photon entanglement and open-destination teleportation[J]. *Nature*, 2004, **430**(6995): 54-58.
- [13] DUR W, VIDAL G, CIRAC J I. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways[J]. *Phys Rev A*, 2000, **62**(6): 062314.
- [14] ZHOU Xiao-qing, WU Yun-wen. Discussion on building the net of quantum teleportation using three-particle entangled states[J]. *Acta Physica Sinica*, 2007, **56**(4): 1881-1887.
周小清, 邬云文. 利用三光子纠缠态建立量子隐形传态网络的探讨[J]. *物理学报*, 2007, **56**(4): 1881-1887.
- [15] ZHAO Han, ZHOU Xiao-qing, YANG Xiao-lin. Establishment of multi-user quantum channel of entangled multi-atom based on cavity QED[J]. *Acta Physica Sinica*, 2009, **58**(9): 5970-5977.
赵晗, 周小清, 杨小琳. 基于腔 QED 的多用户间的多原子量子信道的建立[J]. *物理学报*, 2009, **58**(9): 5970-5977.
- [16] ZHAO Han, ZHOU Xiao-qing, YANG Xiao-lin. Generation of remote multi-photon entangled state from Einstein - Podolsky-Rosen photon pairs[J]. *Opt Commun*, 2010, **283**: 2472-2475.
- [17] XU Fang-xing, CHEN Wei, WANG Shuang, *et al.* Field experiment on a robust hierarchical metropolitan quantum cryptography network[J]. *Chinese Science Bulletin*, 2009, **54**(17): 2991-2997.
- [18] WEI Da-xiu, YANG Xiao-dong, LUO Jun, *et al.* NMR experimental implementation of three-parties quantum superdense coding[J]. *Chinese Science Bulletin*, 2004, **49**(5): 423-426.
- [19] ZENG B, LIU X S, LI Y S, *et al.* High dimensional multi-particle cat-like state teleportation[J]. *Commun Theor Phys*, 2002, **38**(11): 537-540.
- [20] WANG Wan-ying, WANG Chuan, WEN Kai, *et al.* Quantum key distribution network with differential phase shift[J]. *Chinese Physics Letters*, 2007, **24**(6): 1463-1466.
- [21] DENG F G, LIU X S, MA Y J, *et al.* A theoretical scheme for multiuser quantum key distribution with N Einstein-Podolsky- Rosen Pairs in a passive optical network [J]. *Chinese Physics Letters*, 2002, **19**(7): 893-898.

Token-bus Network Fidelity of Quantum Teleportation by Three-photon Entangled W State

ZHOU Xiao-qing, WU Yun-wen

(College of Physics Science and Information Engineering, Jishou University, Jishou, Hunan 416000, China)

Abstract: The fidelity of three-photon W state teleportation token bus network is calculated. The calculation indicates that, for a given analysis angle θ , the fidelity are related only with the coefficient $|a|^2$ s during the processes of quantum network communication. With the increase of analysis angles, the maximum fidelity of the corresponding coefficient $|a|^2$ s correspondingly reduced. When $\theta=\pi/4, \pi/2, 3\pi/4$, the fidelity are up to the maximum 1, and the corresponding $|a|^2$ s are 0.724, 0.5, and 0.276, respectively. For a given coefficient $|a|$, the fidelity are related only with the analysis angles θ . If $|a|=0$, the fidelity is always 0 regardless of the value of θ . When $|a|=|b|=0.7071$ and $\theta=\pi/2, 3\pi/2$, the fidelity are up to the maximum 1.

Key words: Quantum communication; Quantum teleportation; W state; Fidelity



ZHOU Xiao-qing was born in 1963. He is a professor at College of Physics Science and Information Engineering, Jishou University. His major research interests focus on quantum information.