

文章编号:1004-4213(2010)11-2088-5

远程控制原子的纠缠特性*

卢道明

(武夷学院 电子工程系,福建 武夷山 354300)

摘 要:考虑初始处于 GHZ 态的三个二能级原子,将其中两个原子同时注入处于真空态的单模腔中,并与光场发生共振相互作用的情况.利用全量子理论和采用数值计算方法,研究了腔内原子的纠缠性质.通过对是否进行腔外原子态选择性测量和腔外原子旋转操作情况下,腔内原子间的纠缠性质的比较,讨论了对腔外原子的旋转操作和测量对腔内原子间纠缠性质的影响.研究表明:若没有对腔外原子进行旋转操作,腔内两原子是分离的;若对腔外原子进行旋转操作和选择性测量,腔内两原子是纠缠的.另一方面,腔内两原子间的纠缠性质随旋转角的变化具有对称性,其对称轴为 $\theta=\pi/2$,可通过控制旋转角度的大小来控制腔内原子间的纠缠度.

关键词:量子光学;远程控制;旋转操作;选择测量;量子纠缠

中图分类号:O431.2

文献标识码:A

doi:10.3788/gzxb20103911.2088

0 引言

量子纠缠^[1]是量子力学最显著的特征之一,它不仅可以用来验证量子力学的非局域性和 Bell 不等式,而且是量子信息领域的重要资源,它在量子信息处理的量子态隐形传输、量子编码和量子纠错等量子信息过程中具有重要应用.制备和度量纠缠态已成为量子纠缠研究和应用的关键问题,引起了广泛关注.至今人们已提出许多纠缠态的制备方案,涉及光学系统^[2]、核磁共振^[3]和量子腔电动力学^[4]等领域.人们也提出了一些关于纠缠态度量的物理量,如 Von-Neumann 熵、纠缠相对熵^[5]、密度算符之间的距离^[6]、Renyi 纠缠度^[7]和共生纠缠度^[8]等.另一方面,1997 年,Gerry 和 Ghosh^[9]提出:采用选择原子测量的方法可以加强光场的压缩效应.最近,Yang 和 Guo^[10]提出通过对腔外原子的操作会控制腔内原子的发射性质.吴怀志等人^[11]研究了双模相干场与 Λ 型三能级原子相互作用系统中的非经典性质,詹佑帮等人^[12]研究了 Kerr 介质 J-C 模型中去纠缠态的场性质.宋克慧^[13]研究了对原子的选择电离和测量对腔场压缩的影响.周原等人^[14]研究了远程控制光场的量子统计性质.但以往涉及采用选择原子测量的方法,研究原子与光场相互作用系统中,大多集中在对光场和原子的压缩效应等量子特性方面,而对原子的纠缠特性方面的研究少见报道.本文考虑初始处于 GHZ 态的三个二能级原子,将

其中两个原子同时注入处于真空态的单模腔中,与光场发生共振相互作用的情况.讨论了通过对腔外原子的旋转操作和测量对腔内原子纠缠特性的影响.

1 系统态矢的演化

考虑三个全同的初始处于 GHZ 态的二能级原子,让其中两个原子(原子 1 和原子 2)同时注入处于真空态的单模腔中,发生共振相互作用,如图 1.

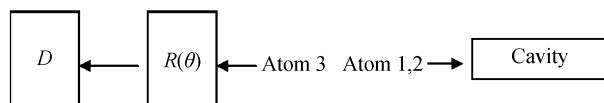


图 1 系统框图
Fig. 1 Sketch of the set-up

整个系统的初态为

$$|\varphi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|eee\rangle_{123} + |ggg\rangle_{123})|0\rangle \quad (1)$$

在旋波近似下,在相互作用表象中,原子和腔场体系的哈密顿能量为

$$V = g_1(a^+s_1^- + as_1^+) + g_2(a^+s_2^- + as_2^+) \quad (2)$$

为简单起见,设原子与光场的耦合系数 $g_1 = g_2 = g$.式中 a^+ 、 a 分别为光场的产生和湮没算符, s_i^+ 和 s_i^- ($i=1,2$) 为第 i 个原子的赝自旋算符. t 时刻整个系统态矢为

$$|\varphi(t)\rangle = A_1(t)|ggg\rangle_{123}|0\rangle + A_2(t)|eee\rangle_{123}|0\rangle + A_3(t)|gee\rangle_{123}|1\rangle + A_4(t)|ege\rangle_{123}|1\rangle + A_5(t)|gge\rangle_{123}|2\rangle \quad (3)$$

在相互作用绘景中,态矢演化满足薛定谔方程

$$i\hbar \frac{\partial |\varphi(t)\rangle}{\partial t} = V|\varphi(t)\rangle \quad (4)$$

*福建省自然科学基金(2008J0217)资助

Tel:0599-5136577 Email:daominglu79@hotmail.com

收稿日期:2010-04-16

修回日期:2010-07-01

取 $\hbar=1$, 为简单起见, 将 $A_i(t)$ 简写为 $A_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$, 将式(2)、(3)代入式(4), 得

$$\begin{aligned} i\dot{A}_1 &= 0, \quad i\dot{A}_2 = g(A_3 + A_4), \\ i\dot{A}_3 &= g(A_2 + \sqrt{2}A_5), \quad i\dot{A}_4 = g(A_2 + \sqrt{2}A_5), \\ i\dot{A}_5 &= \sqrt{2}g(A_3 + A_4) \end{aligned} \quad (5)$$

利用初始条件 $A_1(0) = A_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, A_3(0) = A_4(0) = A_5(0) = 0$, 解式(5)得出

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad A_2 = \frac{\sqrt{2}}{6} \cos Bt + \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad A_3 = A_4 = \\ &-\frac{\sqrt{3}}{6} i \sin Bt, \quad A_5 = \frac{1}{3} \cos Bt - \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (6)$$

式中 $B = \sqrt{6}g$. 对原子 3 和腔场 1、2 求迹, 可得原子 1 和原子 2 的密度矩阵为

$$\rho = \begin{pmatrix} |A_2|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |A_3|^2 & |A_3|^2 & 0 \\ 0 & |A_3|^2 & |A_3|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |A_1|^2 + |A_5|^2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

2 原子间纠缠的演化

两原子间的纠缠特性可用 Negativity 熵来描述^[15], 即对于用密度矩阵 ρ 表示的两个子系统, 纠缠可用部分转置矩阵 ρ^T 的负本征值来定义

$$N = -2 \sum_i \lambda_i \quad (8)$$

式中 λ_i 是部分转置矩阵 ρ^T 的负本征值. 对于用 $|ee\rangle, |eg\rangle, |ge\rangle, |gg\rangle$ 为基矢的希耳伯特空间中, 部分转置矩阵 ρ^T 为

$$\rho^T = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{31} & \rho_{32} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{41} & \rho_{42} \\ \rho_{13} & \rho_{14} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{23} & \rho_{24} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix} \quad (9)$$

$N=0$ 表示两子系统是分离的; $N=1$ 表示两子系统处于最大纠缠态; $0 < N < 1$ 表示两子系统是纠缠的; 利用式(7)可得到原子 1 和原子 2 间的纠缠量为

$$N = \max(0, \sqrt{(|A_1|^2 + |A_5|^2 - |A_2|^2)^2 + 4|A_3|^4} - (|A_1|^2 + |A_5|^2 + |A_2|^2)) \quad (10)$$

式(10)数值计算结果为 $N=0$, 表明腔内原子 1 和原子 2 是分离的. 若利用场电离技术对原子 3 进行测量, 测得原子 3 处于态 $|g\rangle$, 那么由原子 1 和原子 2 和腔场构成的系统的态塌缩为

$$|\varphi(t)\rangle = |gg\rangle_{12} |0\rangle \quad (11)$$

两原子 1、2 也是分离的. 若测得原子 3 处于态 $|e\rangle$,

那么, 由原子 1、原子 2 和腔场构成的系统的态塌缩为

$$|\varphi(t)\rangle = \sqrt{2}(A_2 |ee\rangle_{12} |0\rangle + A_3 |ge\rangle_{12} |1\rangle + A_4 |eg\rangle_{12} |1\rangle + A_5 |gg\rangle_{12} |2\rangle) \quad (12)$$

对腔场求迹, 可得原子 1 和原子 2 的密度矩阵为

$$\rho = 2 \begin{pmatrix} |A_2|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |A_3|^2 & |A_3|^2 & 0 \\ 0 & |A_3|^2 & |A_3|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |A_5|^2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

利用式(13)可得到两原子 1、2 的纠缠量为

$$N = \max(0, 2(\sqrt{(|A_5|^2 - |A_2|^2)^2 + 4|A_3|^4} - (|A_5|^2 + |A_2|^2))) \quad (14)$$

利用式(6)和(14), 可计算原子 1 和原子 2 间的纠缠量 N 随时间的演化, 如图 2. 从图 2 可见: 两原子间纠缠量 $N=0$, 表明腔内两原子 1、2 是分离的. 所以, 对原子 3 直接进行选择测量并不改变原子 1 和原子 2 间的纠缠量特性.

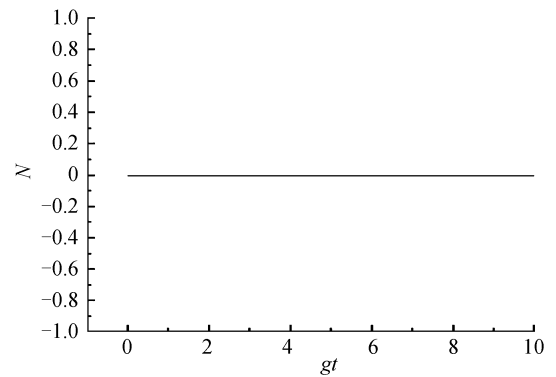


图 2 原子 3 处于态 $|e\rangle$ 时两原子纠缠量 N 随时间的演化
Fig. 2 Time evolution of two-atom entanglement N when the atom 3 is detected in state $|e\rangle$

另一方面, 若对原子 3 进行探测之前, 先对原子 3 进行旋转操作, 经操作后原子 3 的状态演化为

$$\begin{aligned} |g\rangle_3 &\rightarrow \cos \theta |g\rangle_3 + \sin \theta |e\rangle_3 \\ |e\rangle_3 &\rightarrow \cos \theta |e\rangle_3 - \sin \theta |g\rangle_3 \end{aligned} \quad (15)$$

θ 为旋转角, 经旋转操作后整个系统态矢演化为

$$\begin{aligned} |\varphi(t)\rangle &= A_1 |gg\rangle_{12} |0\rangle (\cos \theta |g\rangle_3 + \sin \theta |e\rangle_3) + \\ &(A_2 |ee\rangle_{12} |0\rangle + A_3 |ge\rangle_{12} |1\rangle + A_4 |eg\rangle_{12} |1\rangle + \\ &A_5 |gg\rangle_{12} |2\rangle) (\cos \theta |e\rangle_3 - \sin \theta |g\rangle_3) \end{aligned} \quad (16)$$

若利用场电离技术对原子 3 进行测量, 测得原子 3 处于态 $|g\rangle$, 那么由原子 1、原子 2 和腔场构成的系统状态塌缩为

$$\begin{aligned} |\varphi(t)\rangle &= \sqrt{2}\{A_1 |gg\rangle_{12} |0\rangle \cos \theta - \\ &\sin \theta (A_2 |ee\rangle_{12} |0\rangle + A_3 |ge\rangle_{12} |1\rangle + \\ &A_4 |eg\rangle_{12} |1\rangle + A_5 |gg\rangle_{12} |2\rangle)\} \end{aligned} \quad (17)$$

利用式(17)可得到原子 1 和原子 2 的密度矩阵为

$$\rho = 2 \begin{pmatrix} |A_2|^2 \sin^2 \theta & 0 & 0 & -\frac{1}{2} A_2^* A_1 \sin 2\theta \\ 0 & |A_3|^2 \sin^2 \theta & |A_3|^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & |A_3|^2 \sin^2 \theta & |A_3|^2 \sin^2 \theta & 0 \\ -\frac{1}{2} A_1^* A_2 \sin 2\theta & 0 & 0 & |A_1|^2 \cos^2 \theta + |A_5|^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (18)$$

其部分转置矩阵为

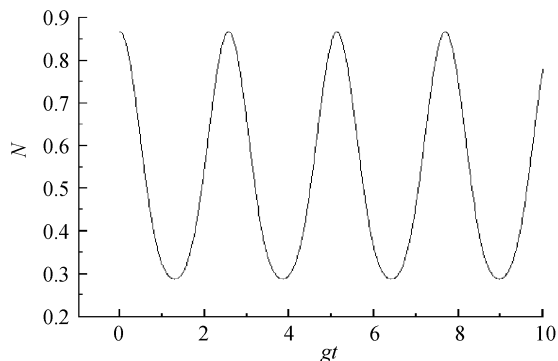
$$\rho^T = \begin{pmatrix} 2|A_2|^2 \sin^2 \theta & 0 & 0 & 2|A_3|^2 \sin^2 \theta \\ 0 & 2|A_3|^2 \sin^2 \theta & -A_1^* A_2 \sin 2\theta & 0 \\ 0 & -A_2^* A_1 \sin 2\theta & 2|A_3|^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 2|A_3|^2 \sin^2 \theta & 0 & 0 & 2(|A_1|^2 \cos^2 \theta + |A_5|^2 \sin^2 \theta) \end{pmatrix} \quad (19)$$

其本征值为

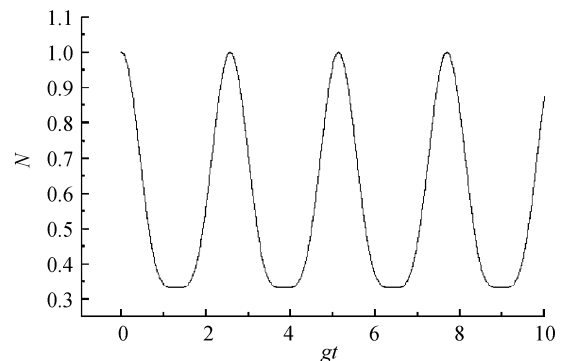
$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_1 &= 2|A_3|^2 \sin^2 \theta + |A_1 A_2 \sin 2\theta| \\ \lambda_2 &= 2|A_3|^2 \sin^2 \theta - |A_1 A_2 \sin 2\theta| \\ \lambda_3 &= |A_2|^2 \sin^2 \theta + |A_1|^2 \cos^2 \theta + |A_5|^2 \sin^2 \theta + \\ &\quad [(|A_2|^2 \sin^2 \theta - |A_1|^2 \cos^2 \theta - |A_5|^2 \sin^2 \theta)^2 + \\ &\quad 4|A_3|^4 \sin^4 \theta]^{1/2} \\ \lambda_4 &= |A_2|^2 \sin^2 \theta + |A_1|^2 \cos^2 \theta + |A_5|^2 \sin^2 \theta - \\ &\quad [(|A_2|^2 \sin^2 \theta - |A_1|^2 \cos^2 \theta - |A_5|^2 \sin^2 \theta)^2 + \\ &\quad 4|A_3|^4 \sin^4 \theta]^{1/2} \end{aligned} \right. \quad (20)$$

由式(20)中的 λ_2 和 λ_4 可计算出部分转置矩阵的负本征值,将其代入式(8)就可得出对原子 3 进行旋转

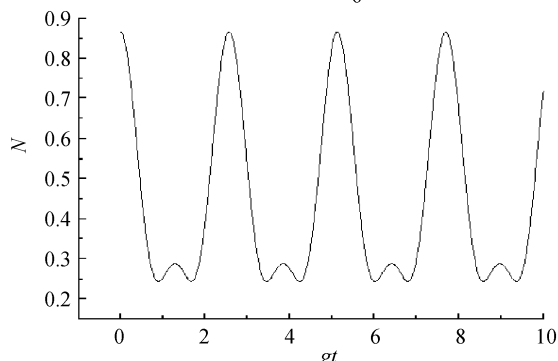
操作和选择测量后,原子 1 和原子 2 的纠缠量 N 随时间的演化. 旋转角 θ 分别取不同值时,两原子纠缠量 N 随时间的演化曲线见图 3. 从图 3 可见:纠缠量 N 随时间作周期性演化,旋转角 θ 在 $[0, \pi]$ 区间变化时,纠缠量 N 的时间演化曲线随 θ 变化具有对称性,其对称轴为 $\theta = \pi/2$, 如 $\theta = \pi/6$ 与 $\theta = 5\pi/6$, $\theta = \pi/3$ 与 $\theta = 2\pi/3$, $\theta = \pi/4$ 与 $\theta = 3\pi/4$ 有相同的演化规律;另一方面,纠缠量 N 受旋转角 θ 的控制,选择适合的旋转角和原子与光场的相互作用时间,可实现腔内原子间的高纠缠度. 进一步研究表明,若测得原子 3 处于 $|e\rangle$ 态,原子 1 和原子 2 间的纠缠量演化与处于 $|g\rangle$ 态的结果一致.



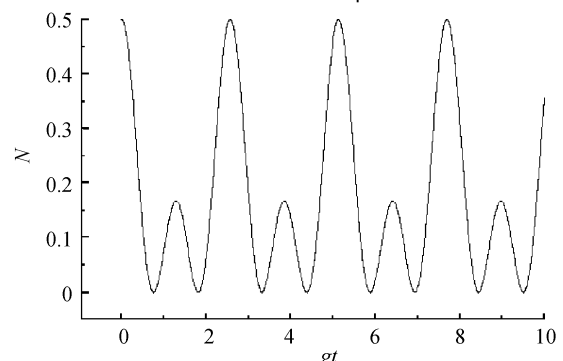
(a) $\theta = \frac{\pi}{6}$



(b) $\theta = \frac{\pi}{4}$



(c) $\theta = \frac{\pi}{3}$



(d) $\theta = \frac{5\pi}{12}$

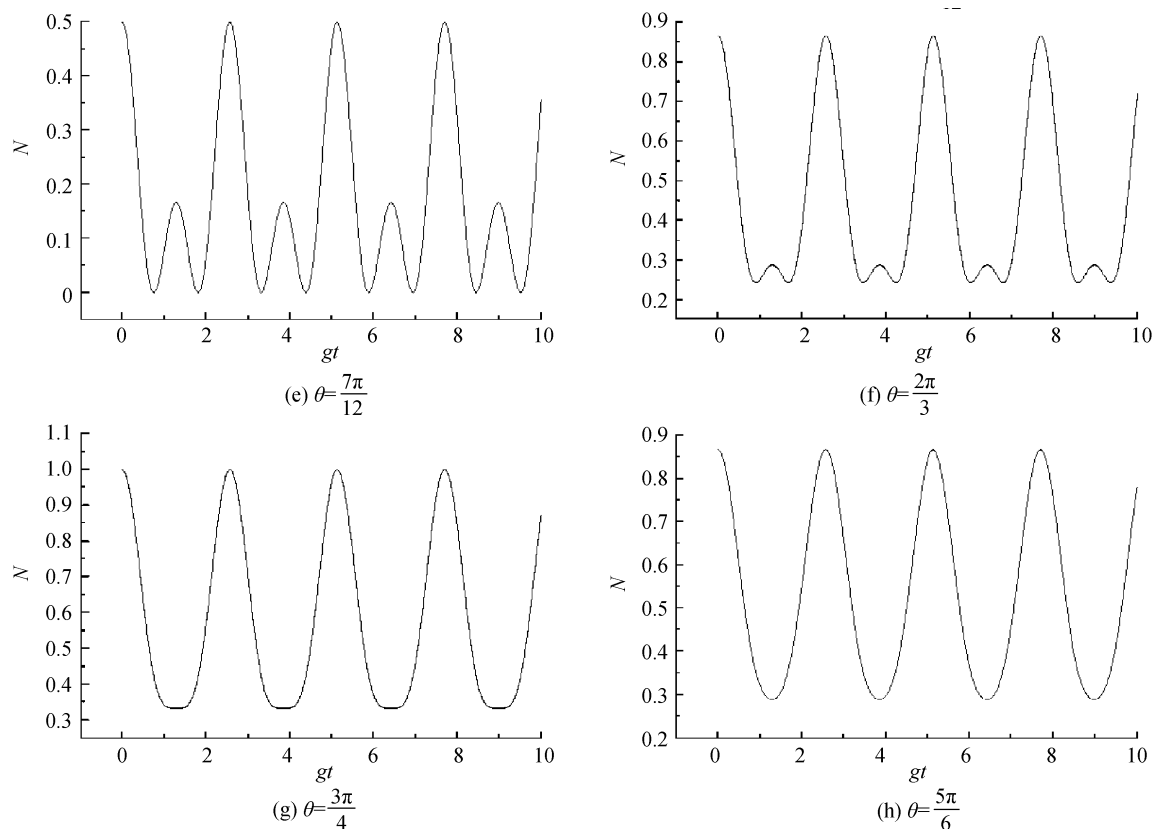


图3 原子3处于态 $|g\rangle$ 时两原子纠缠量 N 随时间的演化

Fig. 3 Time evolution of two-atom entanglement N when atom 3 is detected in state $|g\rangle$

3 结论

本文运用 Negativity 熵来描述原子间的纠缠. 将初始处于 GHZ 态的三个二能级原子中的两个原子同时注入处于真空态的单模腔中, 腔内原子与光场发生共振相互作用, 而另一原子处于腔外. 采用数值计算方法, 研究了对腔外原子的旋转操作和测量对腔内原子纠缠性质的影响. 研究表明: 若对腔外原子直接进行选择测量, 并不改变腔内原子间的纠缠特性; 若对腔外原子先进行旋转操作, 然后进行选择测量, 则可通过控制旋转角度来控制腔内原子间的纠缠特性. 另一方面, 选择适合的旋转角和原子与光场的相互作用时间, 可实现腔内原子间的高纠缠度, 增强腔内原子间的纠缠性质.

参考文献

[1] EINSTEIN A, PODOLSKY B, ROSEN N. Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete? [J]. *Phys Rev.*, 1935, **47**(10): 777.
 [2] WEINFURTER H, ZUKOWSKI M. Four-photon entanglement from down-conversion[J]. *Phys Rev A*, 2001, **64**(1): R010102-R010105.
 [3] KING B E, WOOD C S, MYATT C J, *et al.* Cooling the collective motion trapped ions to initialize a quantum register [J]. *Phys Rev Lett*, 1998, **81**(7): 1525-1528.
 [4] SONG K H, GUO G C. Preparation of entangled atomic states via atoms interaction with the cavity-field in $SU(1,1)$ coherent state[J]. *Chinese Physics Letters*, 1999, **16**(3): 161-162.
 [5] ZHENG S B, GUO G C. Efficient scheme for two-atom

entanglement and quantum information processing in cavity QED[J]. *Phys Rev Lett*, 2000, **85**(11): 2392-2395.
 [6] ZHENG S B. One-step synthesis of multiatom Greenberger-Horne-Zeilinger states [J]. *Phys Rev Lett*, 2001, **87**(23): 230404-1.
 [7] VEDRAL V, PLENIN M B, RIPPIN M A, *et al.* Quantifying entanglement[J]. *Phys Rev Lett*, 1997, **78**(12): 2275-2279.
 [8] KNOLL L, ORLOWSKI A. Distance between density operators; Applications to the Jaynes-Cummings model [J]. *Phys Rev A*, 1995, **51**(2): 1622-1630.
 [9] GERRY C C, GHOSH H. Squeezing enhancement in the Jaynes-Cummings model via selective atomic measurements [J]. *Phys Lett A*, 1997, **229**(1): 17-22.
 [10] YANG C P, GUO G C. Controllable emission properties of an atom inside a cavity by manipulating the atom outside the cavity[J]. *Phys Lett A*, 1999, **255**(3): 129-132.
 [11] WU Huai-zhi, SU Wan-jun. Nonclassical properties in the resonant interaction of a three level Λ -type atom with two-mode field in coherent state[J]. *Chinese Physics*, 2007, **16**(1): 106-110.
 [12] ZHAN You-bang, ZHOU Ping. Properties of the field of the de-entangled state in the J-C model with Kerr-Like medium [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics*, 1999, **16**(5): 398-405.
 詹佑邦, 周平. K 介质中 J-C 模型去纠缠态的场性质[J]. *量子电子学报*, 1999, **16**(5): 398-405.
 [13] SONG Ke-hui. Comparison of squeezing properties of a cavity field via selective different atomic ionization and measurement [J]. *Acta Optica Sinica*, 1999, **19**(12): 1599-1603.
 宋克慧. 不同原子的选择电离和测量产生腔场压缩的比较 [J]. *光学学报*, 1999, **19**(12): 1599-1603.
 [14] ZHOU Yuan, ZHANG Ying-jie, XIA Yun-jie. Remote control of quantum statistical properties of light field[J].

Acta Optica Sinica, 2007, **27**(6):1122-1128.

周原, 张英杰, 夏云杰. 远程控制光场的量子统计性质[J].

光学学报, 2007, **27**(6):1122-1128.

[15] AKHTARSHENAS S J, FARSI M. Negativity as

entanglement degree of the Jaynes-Cummings model [J].

Physica Scripta, 2007, **75**(5): 608-614.

Remote Control Entanglement Properties of Two-atom Inside Cavities

LU Dao-ming

(*Department of Electronic Engineering, Wuyi University, Wuyishan, Fujian 354300, China*)

Abstract: Considering three two-level atoms initially in the GHZ state, two atoms of the three atoms are put into initially empty cavity and made resonant interaction. The two-atom entanglement properties inside cavities are investigated by means of the quantum theory and numerical calculations. Through comparing the results if a rotation operation and direct selective measurement is performed or not, the influences of a rotation operation and state-selective measurement of the atom outside the cavity on the two-atom entanglement evolution inside cavities are discussed. The results obtained using the numerical method show that the two-atom entanglement properties inside cavities is controlled by manipulating the atom outside the cavity, and it can be strengthened by selecting suitable rotation angle.

Key words: Quantum optics; Remote control; Rotation operation; State-selective measurement; Entanglement



LU Dao-Ming was born in 1963. Now he works as a professor in physics at Wuyi University, and his research interests focus on quantum optics.