

文章编号:1004-4213(2010)01-0144-4

## 二维随机体系中长寿命模的研究\*

叶云霞, 姚红兵

(江苏大学 机械工程学院, 江苏 镇江 212013)

**摘要:**用时域有限差分法求解 Maxwell 方程, 数值研究了 TM 模在二维随机散射体系中传输, 通过傅里叶变换得到不同几何参量和光学参量的散射体系内长寿命模的频谱. 计算得出宽带脉冲源激励随机散射体系后, 存在于随机体系中的长寿命模频谱以分立频率窗口的形式存在. 建立了用以解释长寿命模以分立频率窗口存在的物理模型, 该模型与数值研究结果吻合较好, 论证了存在于随机散射体系中长寿命模的形成机制与传统光学谐振腔内冷腔模形成机制的相似性.

**关键词:**激光物理; 随机激光器; 多重散射; 时域有限差分法

中图分类号: O43

文献标识码: A

doi: 10.3788/gzxb20103901.0144

### 0 引言

随机散射体系中存在一些寿命较长的准态模<sup>[1-4]</sup>, 这些准态模所处的空间区域相当于支撑准态模的唯象准态腔. 在无其它损耗的情况下, 随机散射体系中准态模寿命由唯象光腔的泄漏损耗决定. 如果在随机体系中引入足以补偿泄漏损耗的增益, 则散射体系中可以产生随机激光. 因此, 充分认识无增益随机体系中模, 尤其是长寿命模, 对认识理解随机激光的形成机制以及实验现象至关重要. 前人已经对无增益随机体系中长寿命模作了不少理论研究, 发现了一些规律性现象<sup>[5-7]</sup>. 但是关于宽带源激励后随机体系中频谱特征的研究还有不完善之处, 包括: 1) 分立频率窗口位置与随机体系中散射体的尺寸、散射体的填充率等有非常明显的规律性关系, 对这种规律性关系原因尚未见有研究人员给出解释; 2) 已发现的规律性关系都是在散射体对环境的相对折射率  $n_{21}$  较大时 ( $>2$ ) 得出的, 而对  $n_{21}$  较小时, 随机散射体中模式形成规律是否与相对折射率较高时相同, 则尚无系统研究.

本文基于时域有限差分 (Finite-Difference Time-Domain, FDTD) 法研究了 TM 模在二维随机散射体系中传输, 得到不同散射体尺寸、散射体填充率以及散射体的相对折射率时, 散射体系内长寿命模频谱; 并建立了用于解释长寿命模以分立频率窗口存在的简单物理模型, 该物理模型合理得解释了出现分立频率窗口的原因以及分立频率窗口的位置

与体系中散射体尺寸、相对折射率和填充率等的关系, 论证了随机体系中的长寿命模与传统激光腔冷腔模的相似性.

### 1 物理模型

如图 1, 研究对象为在  $xy$  平面的 2D 随机体系, 体系尺寸为  $L_x \times L_y$ , 体系内均匀随机分布有半径为  $r$ , 折射率为  $n_2$  的圆形散射颗粒, 颗粒所处的环境折

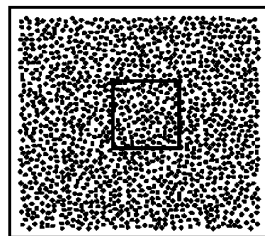


图 1 随机散射体系中散射颗粒分布

Fig. 1 Scattering particles in random media

射率为  $n_1$ ,  $n_{21} = n_2/n_1$  为散射颗粒对环境的相对折射率, 颗粒的面积填充率为  $\Phi$ , 整个随机体系置于一个无边界的开放空间中. 本文数值计算中, 随机体系总尺寸  $L_x = L_y = 5 \mu\text{m}$ , 体系的环境折射率  $n_1$  保持不变,  $n_1 = 1$ . 在介质内引入任意幅值的高斯脉冲源

$$E = E_0 \exp(-t^2/t_p^2) \quad (1)$$

式中  $t$  为时间,  $t_p$  为高斯脉冲的宽度, 取为  $1 \times 10^{-15}$  s. 脉冲源施加在随机散射体系中心部位边长为  $1 \mu\text{m}$  的方形区域, 如图 1 中散射体系中心位置处方框. 研究的电磁波取为沿  $z$  方向传输的 TM (分量有  $H_x$ ,  $H_y$  和  $E_z$ ) 模, 在无源无耗的体系中 TM 模满足的 Maxwell 方程为

$$\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (2a)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (2b)$$

\* 江苏省高校自然科学基金(08KJD43009)资助

Tel: 0511-88797244

Email: yeyunxia@ujs.edu.cn

收稿日期: 2009-09-27

修回日期: 2009-11-02

$$\epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \quad (2c)$$

式中  $\epsilon_r$  为介质相对介电常量,  $\epsilon_r = n^2$ ,  $n$  为空间折射率.  $\epsilon_0$  和  $\mu_0$  分别为真空中介电常量和真空磁导率.

本文用 FDTD 法数值解上述方程,用完全匹配边界层(Perfect Matched Layer, PML)仿真开放的边界.为了减小计算过程中的数值色散和保证 FDTD 计算的稳定性<sup>[8]</sup>,计算过程中空间步长满足关系  $\Delta x, \Delta y < \lambda/10$ ,  $\lambda$  为电磁波波长,时间步长  $\Delta t$  取为

$$\Delta t = \frac{0.9}{c_0 \sqrt{(1/\Delta x^2 + 1/\Delta y^2)}} \quad (3)$$

式中  $c_0$  为真空中光速 299 792 458.0 m/s,文中未特别注明时  $\Delta x = \Delta y = 10$  nm,根据式(3), $\Delta t$  大约为  $2.12 \times 10^{-17}$  s.

通过记录不同时刻随机体系中电磁场分布,可以直观得出随机体系中长寿命模形成和演化过程.对所得的随时间变化的电场分量进行傅里叶变换,可以得到滞留于随机体系内电磁场的频谱分布,如果将整个时间段分为多个时间窗口,分别对各时间窗口的电场进行傅里叶变换可以得到随机体系内长寿命模的演化形成过程.本文计算时间步数为 65 536 步,大约为  $1.39 \times 10^{-12}$  s,由于本文主要讨论对象为泵浦脉冲源结束后,随机散射体系内寿命较长模的频谱分布特征,因此我们将时间窗口分为两部分,对 32 769~65 536 时间步内的电场幅值进行傅里叶转换,所得模式为寿命较长的模式.

## 2 理论结果

当散射体相对折射率  $n_{21}$ , 填充率  $\Phi$  一定时,频谱中分立窗口的位置与颗粒半径  $r$  的关系如图 2(a);图 2(b)给出了当颗粒半径  $r$  和填充率  $\Phi$  一定时,分立频率窗口位置与相对折射率  $n_{21}$  的关系.当颗粒的相对折射率  $n_{21}$  和颗粒尺寸  $r$  一定时,分立窗口的位置与填充率  $\Phi$  的关系如图 2(c).为便于下文讨论,频谱的横坐标取为  $kr(\sqrt{1-\Phi} + n_{21}\sqrt{\Phi})$ ,  $k$  为真空中电磁波波氏.

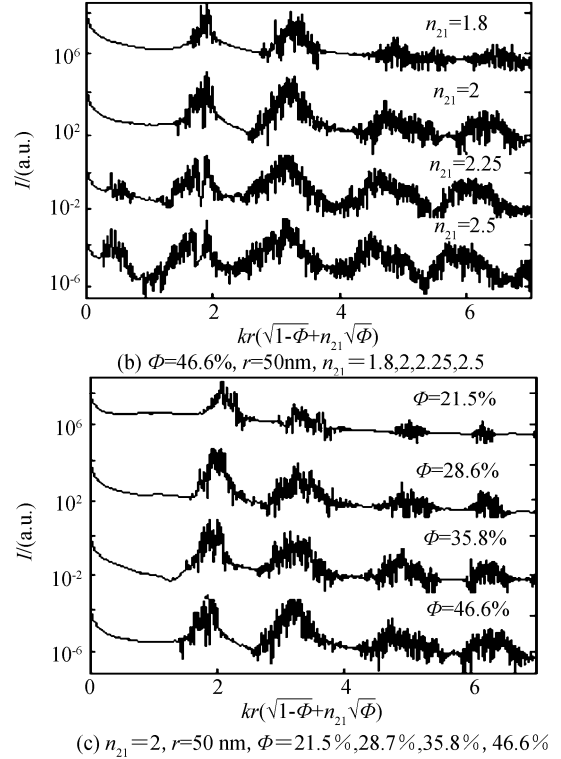
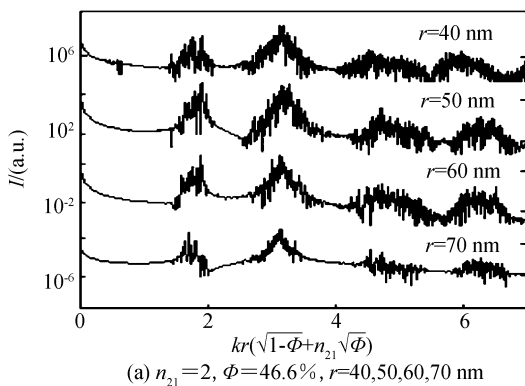


图 2 长寿命模频谱分布

Fig. 2 Spectra of long-life modes

## 3 分析及讨论

### 3.1 随机体系分立频率窗口随着 $r, \Phi$ 和 $n_{21}$ 的变化规律

由图 2 可见,宽带脉冲源入射到随机散射体系中,经过一段时间以后体系内频谱分布迅速演变为分立的频率窗口,这些分立的频率窗口所处位置随散射体系参量变化而呈现类周期性的变化.其中,文献<sup>[5-7]</sup>已经作了频谱分布随散射体尺寸参量  $r$  和散射体的面积填充率  $\Phi$  的变化规律的有关计算,本文的计算结果与之一致,如图 2(a)和(c),当横坐标取为  $kr(\sqrt{1-\Phi} + n_{21}\sqrt{\Phi})$  时,各频率窗口的位置以及相邻频率窗口之间的间隔几乎不随散射体尺寸  $r$  和散射体填充率  $\Phi$  的变化而变化.

除此以外,我们还计算了当随机散射体尺寸参量  $r$  和散射体的面积填充率  $\Phi$  保持不变,改变散射体的相对折射率时,随机散射体系内的频谱变化规律,如图 2(b),各频率窗口的位置几乎不随散射体相对折射率  $n_{21}$  的变化而变化.另外,由图 2(b)可见,随着散射体相对折射率的增大,初始能够观察到的频率窗口向长波方向移动,其原因是当散射体相对折射率取某一值时,散射体对长波方向散射较弱,因此长波局域模的局域化长度较大,随机体系整体尺寸一定时,长波泄漏损耗较大,在图 2(b)中,当相对折射率为 1.8 时,长波长局域模因已经完全泄漏而观察不到,随着相对折射率的增大,长波散射逐渐

加强,局域化长度减小,泄漏损耗减小,长波处频率窗口逐渐能够被观察到.因此,当散射体对环境相对折射率  $n_{21}$  较小时,体系中仍旧存在长寿命模,但是相对于  $n_{21}$  较大的情况,能够被观察的长寿命模逐渐向短波方向移动.

### 3.2 对随机体系频谱中分立频率窗口的解释

由图 2 可见,随机体系中出现由分立的频率窗口构成的频谱,这类似于普通光腔中的频率梳.普通光腔的频率梳中分立频率  $\nu_q$  和相邻频率的间隔  $\Delta\nu_q$  是由腔长  $l$  和腔内介质折射率  $n$  决定

$$\nu_q = q(c_0/nl) \quad (q \text{ 为整数}) \quad (4)$$

$$\Delta\nu_q = c_0/nl \quad (5)$$

随机体系中,光子在散射体多重散射作用下,有可能回到同一位置,进而形成循环散射,而构成一个类光腔结构,这就是光局域化的粒子描述<sup>[9]</sup>.因此,与普通光腔类似,如果要保证循环路径中,往返光波能够相干增强而局域化,形成长寿命准态模,必然要满足与普通光腔驻波类似的干涉条件,因此仿照普通光腔,定义随机体系中的由循环散射而形成的唯象光腔腔长  $l$  为

$$l = n_1 l_1 + n_2 l_2 \quad (6)$$

式中  $n_2 l_2$  和  $n_1 l_1$  为散射体和环境对腔长的贡献,对于散射体均匀分布的二维随机体系,当面积填充率为  $\Phi$  时,任意长度内  $l_1$  和  $l_2$  平均值之间存在确定的关系为

$$l_1/l_2 = \sqrt{1-\Phi}/\sqrt{\Phi} \quad (7)$$

且

$$l_2 \propto r \quad (8)$$

综合式(6),(7)和(8),支撑长寿命模的唯象光腔腔长为

$$l = ar(n_1 \sqrt{1-\Phi} + n_2 \sqrt{\Phi}) \quad (9)$$

式中  $a$  为引入的系数,因此,由式(4)和式(9)可得,随机体系内长寿命模表示为

$$\nu_q = q \frac{c_0}{ar(n_1 \sqrt{1-\Phi} + n_2 \sqrt{\Phi})} \quad (10)$$

经过整理后得

$$kr(n_1 \sqrt{1-\Phi} + n_2 \sqrt{\Phi}) = q \cdot 2\pi/a \quad (11)$$

当体系的环境折射率  $n_1$  不变时,上式进一步整理为

$$kr(\sqrt{1-\Phi} + n_{21}\sqrt{\Phi}) = q \cdot 2\pi/b \quad (12)$$

式中  $b = a/n_1$ , 为另一常量. 以  $kr(\sqrt{1-\Phi} + n_{21}\sqrt{\Phi})$  为度量单位,随机体系内能够通过相干反馈存留下来的共振模的间隔为

$$\Delta[kr(\sqrt{1-\Phi} + n_{21}\sqrt{\Phi})] = 2\pi/b \quad (13)$$

由式(12)和式(13)分析可得,当横坐标取为  $kr$

( $\sqrt{1-\Phi} + n_{21}\sqrt{\Phi}$ )时,频率窗口的位置和相邻频率窗口之间的间隔不随散射体尺寸  $r$ 、相对折射率  $n_{21}$  和散射体填充率  $\Phi$  的变化而变化. 由图 2 可见,与式(12)和(13)描述的规律均吻合非常好,这充分说明随机体系中长寿命模的形成机制完全类似于传统光腔内腔模形成机制,是由多重散射和干涉综合作用形成,支撑该模的“光腔”是一种类似于传统激光腔的准态腔.

图 2 展示了当体系宏观尺寸  $L_x \times L_y$  保持不变时,相邻频率窗口之间间隔不随  $r$ 、 $n_{21}$  和  $\Phi$  的变化而变化. 为了进一步论证体系的宏观尺寸对相邻频率窗口间隔的影响,计算了保持  $r$ 、 $\Phi$  和  $n_{21}$  不变,改变整个随机体系的宏观尺寸  $L_x$  和  $L_y$  时长寿命模频谱分布,如图 3(a). 由图可见,频率窗口间隔不随  $L_x \times L_y$  改变而改变,这进一步说明随机体系中长寿命模是由散射体系内部多重散射和干涉综合作用而形成.

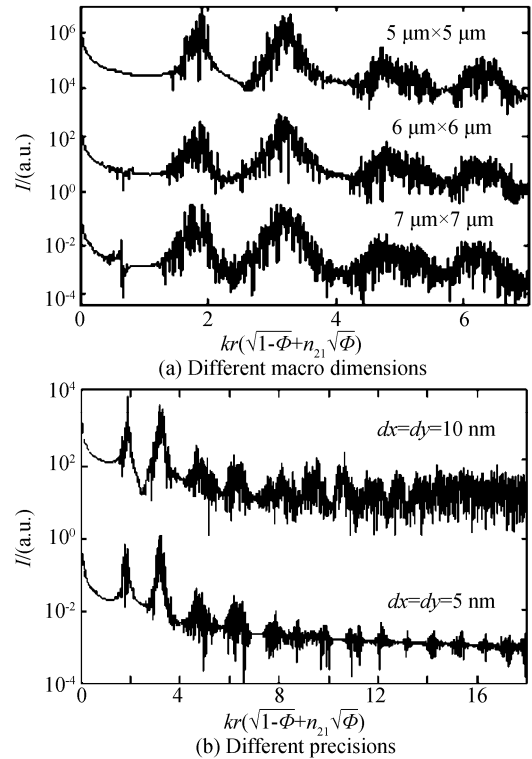


图 3 随机体系宏观尺寸和数值计算准确度对长寿命模频谱的影响

Fig. 3 Spectra of long-life modes with different macro dimensions of random media and different precisions

### 3.3 高频区域频谱

在本文数值研究过程中,发现在高频部分没有频率窗口,文献[6]指出可能是由于在高频部分,波长与数值计算过程中网格长度差距变小,而使高频部分频率窗口没有足够高的准确度显示出来,但是文中并未给出实际证明. 鉴于此,将网格细分后计算同样的体系,发现网格细分后,能够清楚显示频率窗

口的范围向高频方向延伸,如图 3(b),证明了高频部分没有频率窗口不是物理原因而是数值计算准确度问题,如果进一步细分网格的话,更高频率范围内的频谱会以分立频率窗口的形式存在。

## 4 结论

本文用 FDTD 方法计算了宽带脉冲源激励下随机散射体系内长寿命模频谱,得到了由分立频率窗口组成的频谱结构。仿照普通无源腔驻波模的形成条件,建立了随机体系中长寿命准态模应该满足的干涉条件关系式。根据该干涉条件合理得解释了数值计算所得分立频率窗口的位置与随机散射体系中散射体尺寸、相对折射率、填充率和体系宏观尺寸的关系,结果充分证明随机体系中长寿命模是由散射体系内部多重散射和干涉综合作用而形成,支撑长寿命模的空间区域类似于普通无源腔。文中还通过数值计算,分析了数值计算所得频谱在高频区域频率窗口不清楚是由数值计算准确度造成,而非物理原因,只要数值计算过程中空间网格能够进一步细分,高频部分也会出现分立频率窗口。

### 参考文献

[1] SCHWARTZ T, FISHMAN S, SEGEV M. Localization of light in disordered lattices[J]. *Electron Lett*, 2008, **44**(3): 165-168.

- [2] JACOPO B, STEFANO G, DIEDERIK S W. Optical necklace states in Anderson localized 1D system[J]. *Phys Rev Lett*, 2005, **94**: 113903-1-4.
- [3] REGINE F, ANDREAS L, JOHANN K. Theory of strong localization effects of light in disordered loss or gain media[J]. *Phys Rev B*, 2006, **73**: 245107-245111.
- [4] WANG Hui-qin, LIU Zheng-dong, LENG Xin-li. Dynamical propagation process of light in 2D random mediums[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2009, **38**(3): 709-712.  
王慧琴,刘正东,冷新丽.光在二维无序介质中的动态传播过程[J]. *光子学报*, 2009, **38**(3): 709-712.
- [5] LIU Jin-song, WANG Hong. Influence of spatial localization on the threshold of quasi-state cavities in random lasers[J]. *Acta Physica Sinica*, 2004, **53**(12): 4224-4228.  
刘劲松,王宏.随机激光器中准态腔的阈值与其局域化程度的关系[J]. *物理学报*, 2004, **53**(12): 4224-4228.
- [6] SEBBAH P, VANNESTE C. Random laser in localized regime [J]. *Phys Rev B*, 2002, **66**: 144202-1-9.
- [7] VANNESTE C, SEBBAH P. Localized modes in random arrays of cylinders[J]. *Phys Rev E*, 2005, **71**: 026612-1-7.
- [8] HAN Yan-ling, WANG Hong. The study on spatial distribution of electromagnetic wave in the random materials [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(11): 1405-1408.  
韩艳玲,王宏.随机介质中电磁波空间分布特性研究[J]. *光子学报*, 2003, **32**(11): 1405-1408.
- [9] CAO H. Random lasers-development, features and applications [J]. *Optics&Photonics News*, 2005: 24-29.

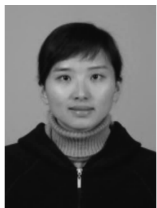
## Research on Long-life Modes in 2D Random Scattering Media

YE Yun-xia, YAO Hong-bing

(College of Mechanical Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang, Jiangsu 212013, China)

**Abstract:** The transport of transverse magnetic (TM) mode in 2-dimension random scattering media is numerically investigated with finite-difference time-domain methods. And through Fourier transformation, the spectra of long-life localized modes in random media with different parameters are obtained. The spectra of long-life modes in random media are regularly grouped in distinct frequency windows after the broad-band excitation. A simple physical model is established to elucidate the phenomena of distinct frequency windows reasonably. The research results indicate that the forming mechanism of long-life modes in random media is totally similar to that of cold modes in traditional standing-wave cavity.

**Key words:** Laser physics; Random laser; Multiple scattering; Finite-difference time-domain method



**YE Yun-xia** was born in 1978 and got her Ph. D. degree from Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics in 2007. Now she is a lecturer of Jiangsu University, and her research interest focus on laser technology.