

# 衍射效应诱导涡旋光束的偏振度变化\*

林惠川, 蒲继雄<sup>†</sup>

(华侨大学 信息科学与工程学院, 福建 泉州 362021)

**摘要:** 基于惠更斯-菲涅耳衍射原理以及部分相干光的相干与偏振的统一理论, 研究了衍射效应诱导部分相干涡旋光束的偏振度变化. 通过理论分析与数值计算表明, 部分相干涡旋光束经圆孔衍射后偏振度将发生变化, 在衍射场中光束的偏振度分布情况与入射光束的相干度、入射光束的拓扑电荷数、衍射孔径的大小等因素有关.

**关键词:** 偏振度; 部分相干涡旋光束; 圆孔衍射

**中图分类号:** O433

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1004-4213(2009)08-2087-6

## 0 引言

偏振特性是光束的一个重要特性之一, 近年来, 光束的偏振度在传输过程中的变化逐渐引起人们的兴趣<sup>[1-6]</sup>. 由于部分相干光在大气中传输时发散程度要比完全相干光小得多; 并且部分相干光束的光强比较均匀, 对散斑的灵敏度低, 因而在遥感、跟踪、远距离通信和激光核聚变等应用中有独特优势<sup>[7-11]</sup>, 同时涡旋光束所带有的轨道角动量可作为信息的载体<sup>[12-14]</sup>, 因此部分相干涡旋光束得到了人们的关注. 另一方面, 衍射作为一个基本的物理现象, 在光学工程中有广泛的应用. 然而, 圆孔衍射下光束的偏振度分布及其变化情况至今还不清楚.

本文从相干和偏振的统一理论出发<sup>[15-16]</sup>, 研究了部分相干涡旋光束在圆孔衍射下偏振度<sup>[17]</sup>的变化情况. 首先, 由惠更斯-菲涅耳原理及部分相干光的传输理论得到部分相干涡旋光束的交叉谱密度函数在圆孔衍射下的表达式; 其次, 由相干与偏振的统一理论得出衍射光束的偏振度的表达式; 最后, 通过数值模拟得出衍射光束的偏振度在不同的入射参量下的分布情况. 研究表明, 衍射光束的偏振度随着入射光束的相干长度、拓扑电荷数、孔径的大小等因素的变化而显著的变化.

## 1 理论分析

假设一部分相干涡旋光束经圆孔衍射后沿  $Z$  方向传输, 如图 1, 其中圆孔半径为  $a$ .  $\mathbf{r}$  表示圆孔处横向位置矢量,  $\rho$  表示衍射场中接收平面上的横向位置矢量.

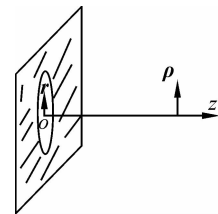


图 1 光束经圆孔衍射示意

Fig. 1 Illustrating the notation relating to diffraction of the electromagnetic beam

首先, 假设入射的部分相干涡旋光束振幅的统计平均为拉盖尔-高斯型<sup>[18]</sup>

$$A_i(r, z=0) = E_{i0} \left[ \frac{r}{\sigma_{i0}} \right]^{m_i} \exp \left[ -\frac{r^2}{\sigma_{i0}^2} \right] \exp(i\beta_i) \quad (i=x, y) \quad (1)$$

式中  $E_{i0}$  和  $\sigma_{i0}$  分别为源平面上光束的场振幅和光斑大小,  $\beta_i$  是光束的初相位.

其次, 假设入射部分相干光的相干系数是高斯型的

$$C_{ij}^{(0)}(r_1, r_2) = B_{ij} \exp \left[ -\frac{(r_1 - r_2)^2}{\delta_{ij}^2} \right] \quad (2)$$

$\delta_{ij}$  是光束的相干长度,  $B_{ij}$  应满足

$$\begin{cases} B_{ij} \equiv 1, & (i=j) \\ |B_{ij}| \leq 1 & (i \neq j) \\ B_{ij}^* = B_{ji} \end{cases} \quad (3)$$

根据交叉谱密度的定义

$$W_{ij}(r_1, r_2, \omega) = \langle E_i^*(r_1, \omega) E_j(r_2, \omega) \rangle \quad (i=x, y, j=x, y) \quad (4)$$

及式(1)~(3)便可得到源平面处入射部分相干涡旋光束的交叉谱密度矩阵元为

$$W_{ij}^{(0)}(r_1, r_2, z=0) = E_{i0} E_{j0} \left[ \frac{r_1}{\sigma_{j0}} \right]^{m_i} \left[ \frac{r_2}{\sigma_{j0}} \right]^{m_j} \cdot \exp[-i(m_i \phi_1 - m_j \phi_2)] \exp \left[ -\frac{r_i^2 + r_j^2}{\sigma_{j0}^2} \right] \cdot \exp \left[ -\frac{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)}{\delta_{ij}^2} \right] \quad (j=x, y) \quad (5)$$

式(4)中  $E_i(\mathbf{r}, \omega)$  为源平面  $\mathbf{r}$  处圆频率为  $\omega$ ,  $i$  方向的

\*福建省科技计划重点项目(2007H0027)和福建省自然科学基金(A0810012)资助

<sup>†</sup> Tel: 010-62282153

Email: jixiong@hqu.edu.cn

收稿日期: 2008-11-04

修回日期: 2008-12-02

平均场分量,星号\*表示复共轭,角括号<>表示系综平均,式(5)中取了 $\sigma_{in}=\sigma_{jo}$ .

最后,在本文中假设源平面上光束的交叉谱密度矩阵的斜对角元为零,即:

$$W_{xy}^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z=0) = W_{yx}^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, z=0) = 0 \quad (6)$$

基于三种假设及光束的偏振度<sup>[15]</sup>

$$P(r) = \sqrt{1 - \frac{4\text{Det}W(r, r)}{[\text{Tr}W(r, r)]^2}} \quad (7)$$

便可得到源平面上光束的起始偏振度为

$$P^{(0)} = |I_{x0} - I_{y0}| / (I_{x0} + I_{y0}) \quad (8)$$

式(7)中 $W(r, r)$ 是交叉谱密度矩阵,Tr,Det分别是对交叉谱密度矩阵的求迹运算和求行列式运算,式(8)中 $I_{x0}$ 与 $I_{y0}$ 分别为源平面上 $x$ 向与 $y$ 向的光强.

根据广义惠更斯-菲涅耳衍射积分,衍射光束的交叉谱密度矩阵元为<sup>[18]</sup>

$$W_{ij}(\rho_1, \rho_2, z) = \left[ \frac{k}{2\pi z} \right] \iint W_{ij}^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z=0) \times \exp\left\{-i \frac{k}{2z} [(\rho_1 - r_1)^2 - (\rho_2 - r_2)^2]\right\} dr_1 dr_2 \quad (9)$$

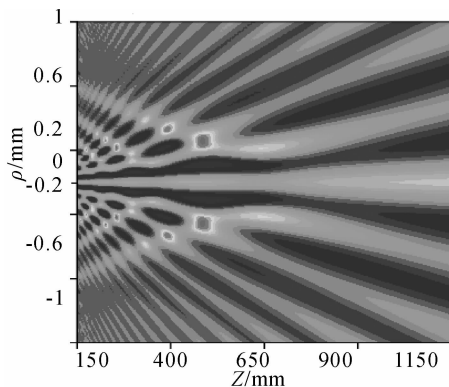
把式(5)代入式(9),则有

$$W_{ij}(\rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2, z) = I_{j0} \left[ \frac{k}{2\pi z} \right]^2 \cdot \exp\left[-i \frac{k}{2z} (\rho_1^2 - \rho_2^2)\right] \iint \left[ \frac{r_1}{\sigma_{j0}} \right]^{m_j} \times \left[ \frac{r_2}{\sigma_{j0}} \right]^{m_i} \cdot \exp\left[-\left[\frac{1}{\sigma_{j0}^2} + \frac{1}{\delta_{ij}^2}\right] (r_1^2 + r_2^2)\right] \exp\left[\frac{ik}{2z} (r_1^2 - r_2^2)\right] \cdot \exp\left[\frac{ikr_1 p_1}{z} \cos(\theta_1 - \varphi_1)\right] \exp\left[-\frac{ikr_2 p_2}{z} \cos(\theta_2 - \varphi_2)\right] \cdot \exp\left[\frac{1}{\delta_{ij}^2} r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right] \exp[-im_j(\phi_1 - \phi_2)] r_1 r_2 dr_1 dr_2 d\varphi_1 d\varphi_2 \quad (10)$$

式中 $I_{j0} = E_{j0}^2$ .用式(11)<sup>[19]</sup>

$$\exp\left[\frac{ikrp}{z} \cos(\theta - \varphi)\right] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} i^l J_l\left[\frac{krp}{z}\right] \exp[i l(\theta - \varphi)] \quad (11a)$$

$$\int_0^{\pi} \exp[-im\varphi_1 + \frac{2r_1 r_2}{\delta^2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] d\varphi_1 = 2\pi \cdot$$



(a)  $m_x = m_y = 1$

$$\exp(-im\varphi_2) I_m \left[ \frac{2r_1 r_2}{\delta^2} \right] \quad (11b)$$

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \exp(in\varphi) d\varphi = 2\pi, \text{若 } n=0 \\ \int_0^{2\pi} \exp(in\varphi) d\varphi = 0, \text{若 } n \neq 0 \end{cases} \quad (11c)$$

对式(10)进行化简可得到

$$W_{ij}(\rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2, z) = I_{j0} \left[ \frac{k}{z} \right]^2 \exp\left[-\frac{ik}{2z} (\rho_1^2 - \rho_2^2)\right] \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^a \int_0^a \left[ \frac{r_1}{\sigma_{j0}} \right]^{m_j} \times \left[ \frac{r_2}{\sigma_{j0}} \right]^{m_j} \exp\left[-\left[\frac{1}{\sigma_{j0}^2} + \frac{1}{\delta_{ij}^2}\right] (r_1^2 + r_2^2)\right] \cdot \exp\left[\frac{ik}{2z} (r_1^2 - r_2^2)\right] \times J_l\left[\frac{kr_1 \rho_1}{z}\right] J_l\left[\frac{kr_2 \rho_2}{z}\right] I_{l+m_j} \left[ \frac{1}{\delta_{ij}^2} 2r_1 r_2 \right] \cdot \exp[-il(\theta_1 - \theta_2) r_1 r_2 dr_1 dr_2 \quad (12)$$

则由式(8)和式(12)可知衍射光束的偏振度为

$$P(\rho, \theta, z) = \frac{|W_{xx}(\rho, \rho, \theta, \theta, z) - W_{yy}(\rho, \rho, \theta, \theta, z)|}{|W_{xx}(\rho, \rho, \theta, \theta, z) + W_{yy}(\rho, \rho, \theta, \theta, z)|} \quad (13)$$

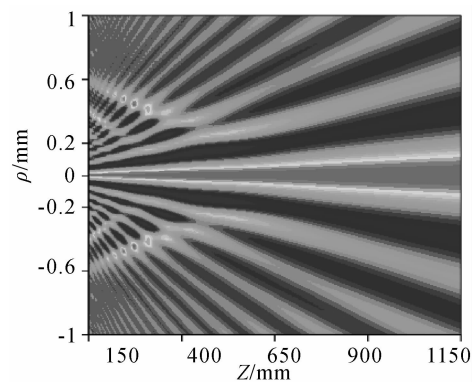
由式(12)和(13)便可算出衍射光束的偏振度,而式(12)和(13)可知道衍射效应将对入射光束的偏振度产生影响,不同的入射光束受到衍射效应的影响不同.随着入射光束自身参量的改变或衍射系统的改变,衍射光束的偏振度分布将随之改变.

## 2 数值计算结果

对衍射光束的偏振度进行数值计算时所用到的两个重要参量入射光斑的大小和入射光波的波长取为: $\sigma_0 = 5 \text{ mm}$ ,  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ .

### 2.1 不同拓扑电荷数下衍射光束的偏振度的分布情况

图2是部分相干涡旋光束在不同的拓扑电荷数下经圆孔衍射之后偏振度的分布情况.模拟参量为 $P^{(0)} = 0.5$ ,  $a = 1 \text{ mm}$ ,  $\delta_{xx} = 1 \text{ mm}$ ,  $\delta_{yy} = 25 \text{ mm}$ .由图2可知:在近场偏振度存在一些极大点;随着拓扑电荷数的增加, $z$ 轴上的偏振度逐渐增大;而在四种不同的情况下,衍射光束的偏振度都沿着径向有起伏的振荡变化,尤其在远场这种沿着径向的起伏分布更



(b)  $m_x = m_y = 2$

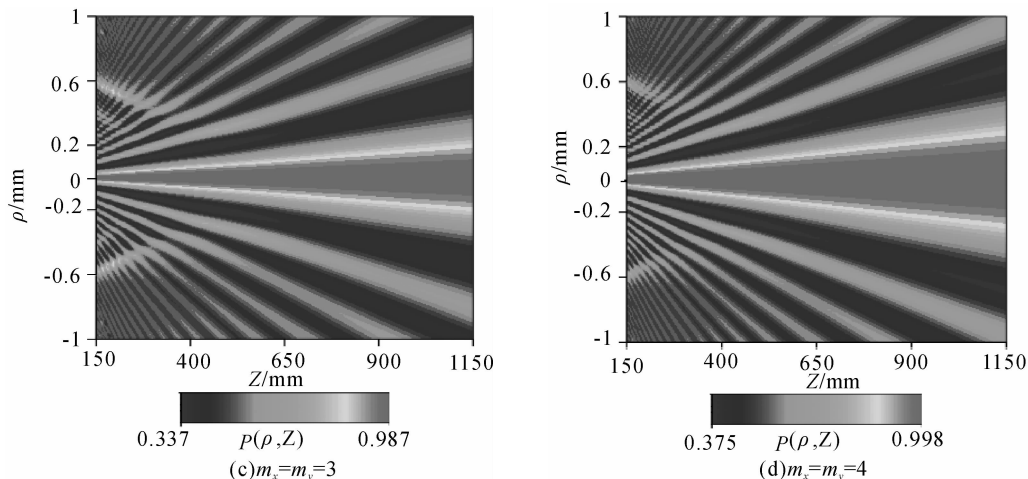


图 2 不同拓扑电荷数下衍射光束的偏振度分布  
 Fig. 2 Plots of the degree of polarization in the diffraction field for different values of  $m_x$  and  $m_y$ .

加明显, 衍射光束的偏振度相对于光轴具有轴对称性. 图 3 是横截面上衍射光束的偏振度沿着径向的分布曲线, 模拟参量  $z=480$  mm, 其余与图 2 相同, 从图 3 可以看出衍射光束的偏振度在近轴处沿着径向的变化比非近轴处要大的多, 而偏振度的曲线分

着拓扑电荷数的增加, 轴上的偏振度越来越大, 而偏振度的对称中心范围也越来越宽.

### 2.2 不同的相干长度下衍射光束的偏振度分布情况

图 4 是不同的相干长度下衍射光束偏振度的分布情况, 模拟参量  $p^{(0)}=0.5, a=1$  mm,  $m_x=m_y=1$ . 图 4 衍射光束的偏振度分布与图 2 相似. 而对四图进行比较可以知道: 当  $x$  向的相干长度变大时衍射场的偏振度有明显的变化, 特别是轴上偏振度,  $x$  向的相干长度逐渐大于  $y$  向的相干长度时其偏振度先变小后变大. 图 5 是不同相干长度下衍射光束横截面上偏振度分布的曲线图, 模拟参量为  $z=480$  mm, 其余与图 4 相同. 从图 5 也可以看出, 四种情况下偏振度分布都具有轴对称性, 而在近轴处偏振度的起伏变化要比非近轴的情况下大得多. 而随着相干长度的变化, 当逐渐增大并超过时轴上的偏振度先减小后增大.

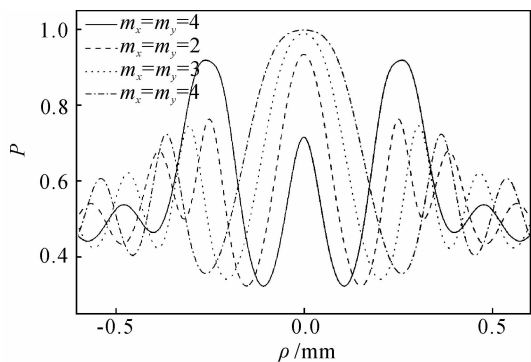
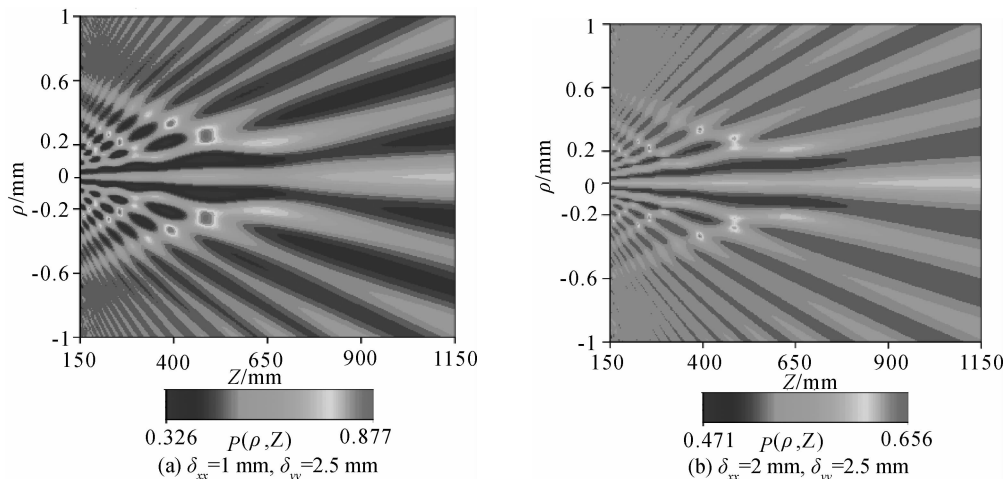


图 3 横截面上不同拓扑电荷数下衍射光束偏振度的分布曲线  
 Fig. 3 Curve of the degree of polarization in cross section of the diffraction field for different values of  $m_x$  and  $m_y$

布与图 2 的偏振度分布相似都显示了衍射光束的偏振度具有轴对称性, 沿着径向有起伏的振荡变化, 随



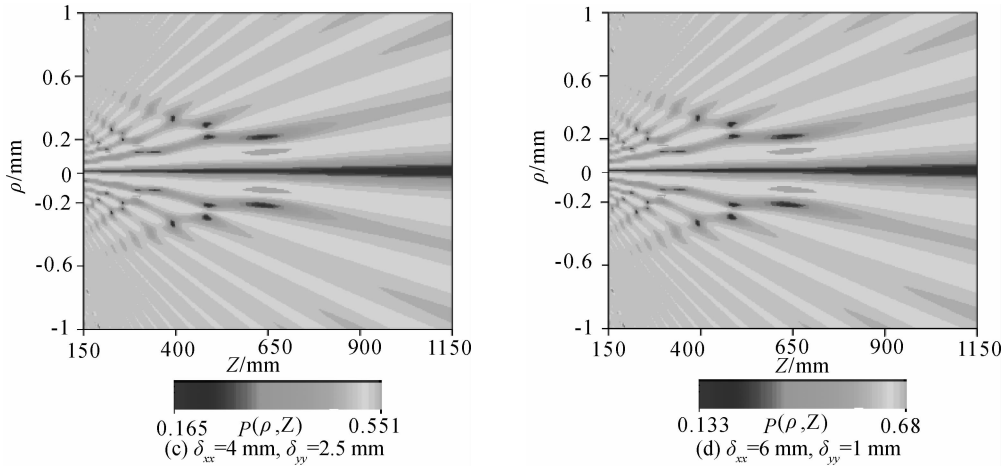


图4 不同的相干长度下行射光束偏振度的分布  
Fig. 4 Plots of the degree of polarization in the diffraction field for different values of  $\delta_{xx}$  and  $\delta_{yy}$ .

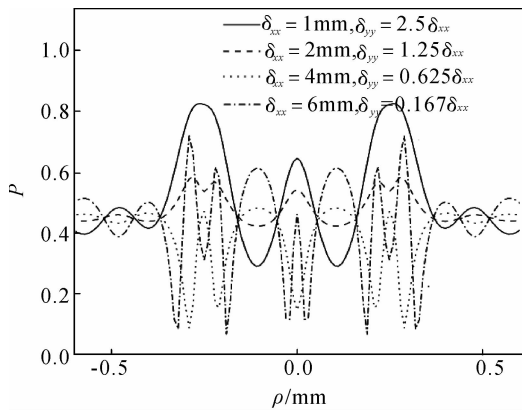


图5 横截面上不同相干长度下行射光束偏振度分布的曲线  
Fig. 5 Curve of the degree of polarization in cross section of the diffraction field for different values of  $\delta_{xx}$  and  $\delta_{yy}$ .

### 2.3 不同的衍射孔径下行射光束的偏振度的分布情况

图6是在不同的衍射孔径下行射光束的偏振度的分布模拟参量为  $p^{(0)} = 0.5$ ,  $\delta_{xx} = 1$  mm,  $\delta_{yy} = 2.5$  mm. 图6衍射光束的偏振度分布与图2及图4相似. 而对图6四图进行比较可知: 随着孔径的减小近场的范围越来越小, 同时其轴上的偏振度也越大; 而当衍射孔径小到一定程度时(例如孔径直径为0.8 mm)偏振度的最大值分布在光轴上. 图7是不同衍射孔径下行射光束横截面上偏振度分布的曲线图, 模拟参量为  $z = 480$  mm, 其余与图6相同. 从图7也可以看出, 衍射光束的偏振度分布具有轴对称性, 而沿着径向有着起伏的振荡变化. 随着衍射孔径的减小轴上的偏振度逐渐增大.

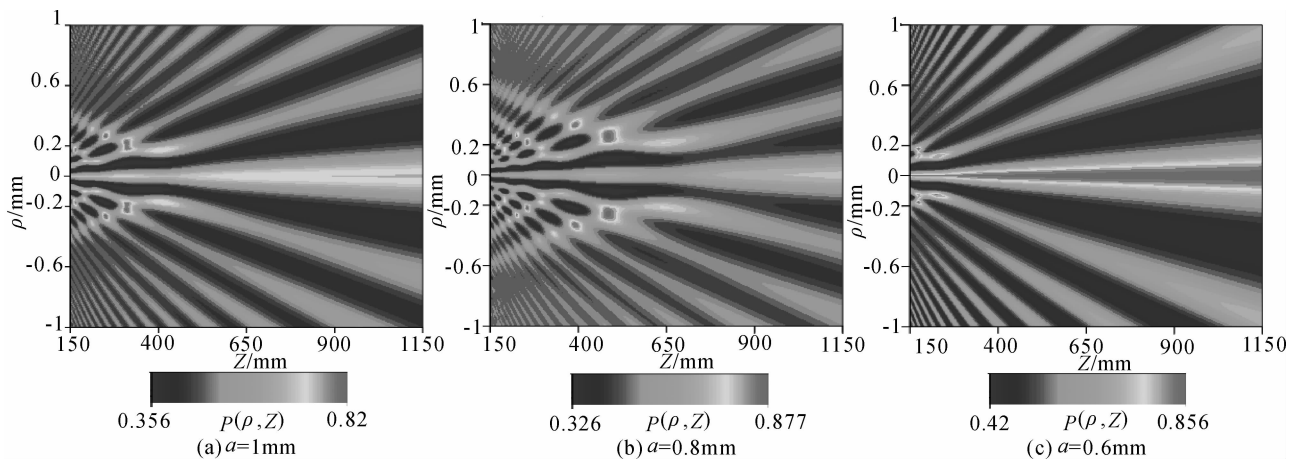


图6 不同衍射孔径下行射光束的偏振度分布  
Fig. 6 Plot of the degree of polarization in the diffraction field for different values of aperture

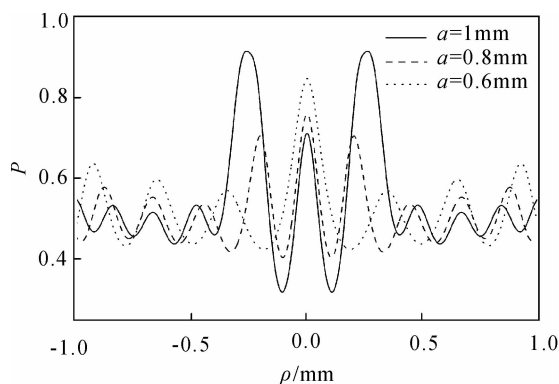


图7 不同衍射孔径下衍射光束横截面上偏振度分布的曲线图  
Fig.7 Curve of the degree of polarization in cross section of the diffraction field for different values of aperture

### 3 结论

采用相干性与偏振性统一理论,研究了衍射效应诱导光束偏振度的变化,研究结果表明经圆孔衍射后光束的偏振度分布相对于 $z$ 轴即光的传播方向有轴对称性,而沿着光束横向截面的径向,衍射光束的偏振度有着起伏的振荡变化,这种对称性体现了整个光学系统相对于光轴具有轴对称性,而偏振度的起伏振荡变化正是衍射所起的作用。同时,从衍射光束的偏振度的分布情况可知道,不同的入射光束所受到的衍射诱导作用是不同的,同样的衍射孔径下不同相干长度的入射光束在衍射场中偏振度的分布情况是不同的,不同的拓扑电荷数下衍射光束的偏振度分布也不相同,而同一束入射光在不同的衍射孔径下的偏振度分布也不一样。衍射光束的偏振度还与入射光束的起始偏振度 $p^{(0)}$ 、衍射场中观察点的位置坐标等因素有关。

#### 参考文献

[1] JAMES D F V. Change of polarization of light beams on propagation in free space[J]. *JOSA A*, 1994, **11**:1641-1643.  
 [2] KOROT KOVA O, WOLF E. Change in the state of polarization of a random electromagnetic beam on propagation [J]. *Opt Commun*, 2005, **246**:35-43.  
 [3] ELLIS J, DOGARIU A, PONOMARENKO S, *et al.* Degree of polarization of statistically electromagnetic fields[J]. *Opt Commun*, 2005, **248**:333-337.  
 [4] WOLF E. Correlation-induced changes in the degree of random electromagnetic beams on propagation[J]. *Opt Lett*, 2003, **28**:1078-1180.  
 [5] CHEN Zi-yang, PU Ji-xiong. Degree of polarization in Young's double-slit interference experiment formed by stochastic

electromagnetic beams [J]. *JOSA A*, 2007, **24**(7): 2043-2048.  
 [6] ROYCHHOWDHURY H, WOLF E. Young's interference experiment with light of any state of coherence and of polarization[J]. *Opt Commun*, 2005, **252**:268-274.  
 [7] PU Ji-xiong, LIU Xiao-yun, NEMOTO S. Partially coherent bottle beams[J]. *Opt Commun*, 2005, **252**:7-11  
 [8] GREG G, TACO D, VISSER. Can spatial coherence effects produce a local minimum of intensity at focus[J]. *Opt Lett*, 2003, **28**(18):1627-1629.  
 [9] PU Ji-xiong, NEMOTO S, LIU Xiaoyun. Beam shaping of focused partially coherent beams by use of the spatial coherent effect [J]. *Appl Opt*, 2004, **43**(28):5281-5286.  
 [10] GBUR G, WOLF E. Spreading of partially coherent beams in random media[J]. *JOSA A* 2002, **19**(8):1592-1598.  
 [11] RAO Lian-zhou, QU Biao, CHEN Zi-yang, *et al.* The spectral changes of partially coherent light diffracted by a slit [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2007, **36**(3):467-470.  
 饶连周, 渠彪, 陈子阳, 等. 部分相干光经单缝衍射后的光谱变化[J]. *光子学报*, 2007, **36**(3):467-470.  
 [12] GIBSON G, COURTIA A J, PADGETT M J, *et al.* Free-space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum[J]. *Opt Express*, 2004, **12**(22):5448-5456.  
 [13] PATERSON C. Atmospheric Turbulence and Orbital Angular Momentum of Single Photons for Optical Communication[J]. *Phys Rev Lett*, 2005, **94**:153901.  
 [14] CELECHOVSKY R, BOUCHAL Z. Optical implementation of the vortex information channel[J]. *New J Phys*, 2007, **9**:328.  
 [15] WOLF E. Unified theory of coherence and polarization of random electromagnetic beams[J]. *Phys Lett A*, 2003, **312**:263-267.  
 [16] TOMOHIRO S, WOLF E. Correlations between intensity fluctuations in stochastic electromagnetic beams of any state of coherence and polarization[J]. *Opt Commun*, 2007, **272**:289-292.  
 [17] DING H B, PANG W N, Liu Y B, *et al.* Photon polarization modulation with liquid crystal variable retarder [J]. *Acta Photonica Sinica* 2006, **35**(9):1397-1399.  
 丁海兵, 庞文宁, 刘义保, 等. 液晶相位可变延迟器对光偏振态的调制[J]. *光子学报*, 2006, **35**(9):1397-1399.  
 [18] SALEM M, KOROTKOVA O, DOGARIU A, *et al.* Polarization changes in partially coherent electromagnetic beams propagating through turbulent atmosphere[J]. *Waves in Random Media*, 2004, **14**:513.  
 [19] GRADSHTEYN I S, RYZHIK I M. Table of integrals, series, and products[M]. 1st ed. Academic Press, 1980.

## Change of Polarization of Vortex Beams Induced by Diffraction Effect

LIN Hui-chuan, PU Ji-xiong

(*Department of Electronic Science & Technology, Huaqiao University, Quanzhou, Fujian 362021, China*)

**Abstract:** Based on the Huygens-Fresnel Principle and the unified theory of coherence and polarization of partially coherent beams, the degree of polarization of partially coherent vortex beams transmitted through the circular aperture has been investigated. It is found that the degree of polarization will change after the beam transmitted through the circular aperture, and the degree of polarization of the diffractive beam is related with the coherence of source, the topological charges of the source, and the size of the circular aperture.

**Key words:** Degree of polarization; Partially coherent vortex beams; Circular aperture diffraction



**Lin hui-chuan** is now a postgraduate of Huaqiao University. His research interests include coherence light, propagation of beams and photoelectric technology.