

# 基于数学形态学的金字塔图像去噪

向静波<sup>1,2</sup>, 苏秀琴<sup>1</sup>

(1 中国科学院西安光学精密机械研究所, 西安 710119)

(2 中国科学院研究生院, 北京 100049)

**摘要:**提出了一种自适应提升拉普拉斯金字塔变换与数学形态算子相结合的图像去噪方法. 首先对图像进行分解, 采用自适应提升拉普拉斯金字塔, 然后利用自适应提升拉普拉斯金字塔变换后系数能量的分布特性以及尺度内和尺度间的依赖性, 结合数学形态算子的特点, 利用数学形态算子对变换系数进行处理, 使得重要变换系数与非重要变换系数分离, 分别对两个不同的子集采用不同的阈值进行处理后, 再将两个子集合起来, 进行逆变换重建. 实验结果表明, 该算法具有良好的去噪效果, 同时保留了图像的细节信息, 获得了较高的图像信噪比.

**关键词:**拉普拉斯金字塔变换; 图像去噪; 数学形态学; 自适应提升

**中图分类号:** TN911.7

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1004-4213(2009)02-457-4

## 0 引言

小波分析在时域和频域中都具有良好的局部化性质. 因此对于图像信息的噪音处理, 小波阈值<sup>[1-2]</sup>方法成为了众多的图像去噪算法中的佼佼者, 它通过把阈值以下的小波系数去掉而达到去噪的效果. 虽然这样能够达到降低噪音的效果, 但却破坏了图像细节.

尽管小波能够有效地逼近平滑信号. 但是在实际中遇到的图像信号常常是非平稳的时变信号, 而经典小波变换对于突变信号难以提前预测, 因此可以采用自适应方法来俘获短时变化的信号<sup>[3-6]</sup>.

本文结合数学形态算子的特点, 提出一种基于数学形态学的自适应提升拉普拉斯金字塔图像去噪算法. 在变换后的系数中利用数学形态算子, 使得重要变换系数与非重要变换系数分离成两个子集, 然后分别对两个不同的子集采用不同的阈值进行处理后, 最后在两个子集合起来, 进行逆变换重建. 将本方法应用于图像去噪, 得到了优于传统小波变换的结果. 该方法能更有效地保留图像的细节和纹理, 获得更好的视觉效果和更高的峰值信噪比 (Peak Signal to Noise Ratio, PSNR).

## 1 拉普拉斯金字塔变换

拉普拉斯金字塔给出了一种多分辨率表示的方法<sup>[7]</sup>. 它可以获得图像中的不连续点. 拉普拉斯金字塔的框图如图 1. 首先将输入信号  $X$  分解为一个近似信号和细节信号, 近似信号  $C$  是通过低通滤波器

和下采样后得到. 近似信号通过上采样和滤波得到一个预测信号  $d$ , 与原始信号相减得到一个预测误差. 在合成中, 将预测误差与近似信号相加, 就得到了重建信号  $\hat{X}$ .

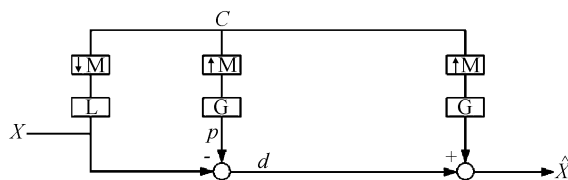


图 1 拉普拉斯金字塔框

Fig. 1 Laplacian pyramid scheme

Do 和 Vetterli 采用框架理论来研究拉普拉斯金字塔算法<sup>[8]</sup>. 标准拉普拉斯金字塔算法的重建算法在有噪音的情况下, 重建的图像不是最优的.

Minh N. No<sup>[8]</sup> 提出了可以将拉普拉斯金字塔看作为一个过采样滤波器组. 但是在框架金字塔中的双正交滤波器将会在低分辨率图像中造成严重的混淆现象, 因此文中利用低通滤波器替代双正交滤波器, 它可以有效抑制混淆现象的出现, 保持图像中的细节特征.

## 2 自适应提升拉普拉斯金字塔

在拉普拉斯金字塔中, 引入一个自适应提升步骤. 得到的自适应提升拉普拉斯金字塔框图如图 2. 输入信号通过滤波器和下采样分离成一个逼近信号  $x$  和一个细节信号  $y$ . 判定映射  $D$  根据梯度矢量来计算,  $D$  将梯度矢量  $v \in IR^N$  映射为一个二值输出  $D(v) \in \{0, 1\}$ . 输入信号减去预测信号, 输出一个高分辨率的差分信号. 在合成端中, 更新信号用来产生一个低分辨率低子带. 这个方案对于任何滤波器都满足可逆性和完美重建性. 这是因为提升结构. 在

自适应情况中,算子的选择取决于逼近信号和细节信号的局部信息.这种选择有所谓的判定映射  $D$  来控制,其中的  $D$  由下面的式子来决定.

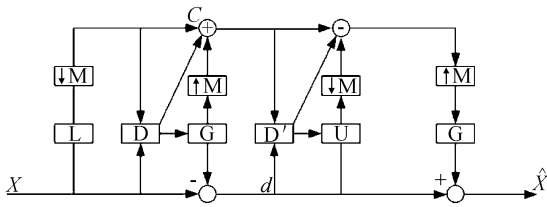


图2 自适应提升拉普拉斯金字塔  
Fig.2 Adaptive lifting Laplacian pyramid scheme

$$D(x,y)(n) = \begin{cases} -1 & \text{if } |x(n) - y(n-1)| < |x(n) - y(n)| \\ 1 & \text{if } |x(n) - y(n-1)| > |x(n) - y(n)| \\ 0 & \text{if } |x(n) - y(n-1)| = |x(n) - y(n)| \end{cases} \quad (1)$$

则  $U_d, d \in D$

$$U_d(y)(n) = \begin{cases} y(n-1) & \text{if } d = -1 \\ \frac{1}{2}(y(n-1) + y(n)) & \text{if } d = 0 \\ y(n) & \text{if } d = +1 \end{cases} \quad (2)$$

### 3 数学形态算子

数学形态学的理论虽然很复杂,但它的基本思想却简单而完美.它最基本的思想是把图像看成是点的集合,用结构元素(又称结构矩阵)对其进行移位、交、并等集合运算就构成形态学的各种处理算法.

数学形态学的基本运算有4个:膨胀、腐蚀、开运算和闭运算<sup>[9-10]</sup>.它们在二值图像中和灰度图像中各有特点.基于这些基本运算还可以推导和组合成各种数学形态学实用算法.

形态学中运算对象是集合,一般设为  $A$  为输入图像信号,  $B$  为结构元素.

膨胀:图像  $A$  被结构元素  $B$  膨胀记为  $A \oplus B$ , 它的定义为

$$A \oplus B = \cup \{ B + X, X \in A \} \quad (3)$$

式(3)表明将结构元素  $B$  对图像  $A$  的所有像素做平移,然后对平移得到的结果做并运算,便可得到膨胀运算的结果.

腐蚀:图像  $A$  被结构元素  $B$  腐蚀记为  $A \ominus B$ , 定义为

$$A \ominus B = \{ X; X + B \subset A \} \quad (4)$$

式(4)表明腐蚀运算由将  $B$  平移  $X$ ,但仍然包含在  $A$  内的所有点  $X$  组成.

腐蚀变换的结果是  $A$  的子集,是一种收缩变换.这种变换使目标肢体收缩,消除图像中小的部分.

在“膨胀”和“腐蚀”两个基本运算的基础上,可以构造出两个形态学组合运算:开运算和闭运算.

$$\text{开运算: } A \circ B = (A \ominus B) \oplus B \quad (5)$$

开运算具有反扩张性:  $A \circ B \subseteq A$ , 即开运算的结果总是包含在原图像中.

$$\text{闭运算: } A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B \quad (6)$$

### 4 基于数学形态学的金字塔图像去噪方法

在阈值收缩算法中,阈值的选择是关键.因为阈值过小的话,就会引入许多噪音,造成图像重建的质量下降,阈值过大的话,则会丢失不少的细节信息,造成伪影和模糊.常用的阈值方法有 Donoho 等人提出的 Visu shrinkage 方法<sup>[11]</sup>

$$\lambda = \sigma_n \sqrt{2 \cdot \log N} \quad (7)$$

式中,  $\sigma_n$  是噪音标准差,  $N$  为系数个数.

基于 stein 无风险估计的 Sure shrinkage 方法<sup>[1]</sup>

$$\lambda = \arg \min_{0 \leq \lambda \leq \sqrt{2 \log N}} N - 2|\omega|_{|\omega| < \lambda} + \sum \min(|\omega|, \lambda)^2 \quad (8)$$

以及 Chang 等人<sup>[1]</sup>提出的最小化 Bayes 风险的 Bayes shrinkage 方法.其中的  $\sigma_s$  为信号标准差.

$$\lambda = \sigma_n^2 / \sigma_s \quad (9)$$

不同尺度的噪音方差

$$\hat{\sigma}_n^2(l) = \hat{\sigma}_n^2(l=1) e^{1-l \cdot 2} \quad (10)$$

最细尺度上的小波系数的噪音方差可以用文献 [12]中所用到的估计得到

$$\hat{\sigma}_n = \text{Median}(|\omega_{ij}|) / r \quad (11)$$

式中:  $r$  一般取 0.6745,  $\omega_{ij}$  为含噪图像分解后的第一层内的高频系数.

本文就是在 Bayes shrinkage 方法的基础上提出的基于数学形态算子的金字塔图像去噪方法.图像信号的变换系数值必然大于那些能量分散且幅值较小的噪音的变换系数值,只要选择一个合适的阈值,对变换系数进行阈值处理,就可以达到去除噪音保留信号的目的.

利用形态膨胀算子将变换系数分成两个子集:重要系数和非重要系数,然后对不同的子集采用不同的阈值来处理.阈值处理有两种阈值函数方法,即软阈值(Soft threshold)函数和硬阈值(Hard threshold)函数.其中软阈值函数为

$$\eta_s(x) = \begin{cases} x & (|x| > \lambda) \\ 0 & (|x| \leq \lambda) \end{cases} \quad (12)$$

硬阈值函数为

$$\eta_h(x) = \begin{cases} \text{sign}(x) * |\text{abs}(x) - \lambda| & (|x| \geq \lambda) \\ 0 & (|x| < \lambda) \end{cases} \quad (13)$$

式中: $x$  是小波系数, $\lambda$  是阈值,sign 和 abs 分别为符号函数和绝对值函数.

硬阈值函数可以很好地保留图像中的细节信息,但在  $\lambda$  处缺乏连续性,这样就会引入奇异点.软阈值函数处理结果相对平滑的多,视觉效果也更好.本文采用的是软阈值函数.因为金字塔变换可以保留图像细节特征.

本文提出的基于数学形态学的金字塔图像去噪方法具体步骤为:1)对含噪图像进行自适应提升拉普拉斯金字塔变换;2)利用形态膨胀算子对变换系数进行分类,分为重要系数和非重要系数两个子集;3)估计两个子集的标准偏差  $\hat{\sigma}_n$ ;4)用软阈值函数对两个子集中的不同尺度和不同方向子带内的高频系数进行处理;5)利用软阈值处理系数后,再进行金字塔逆变换,重建图像,得到去噪后的图像.

## 5 实验结果

根据以上算法,用它对大小为  $512 \times 512$  的含噪灰度图像 Barbara 进行去噪.在图像中加入零均值白噪声.实验中采用了 9/7 双正交滤波器,并对原始图像进行 4 级分解.表 1 是本文算法和拉普拉斯金字塔变换,传统小波对 Barbara 图像去噪效果的峰值信噪比对比结果.其中峰值信噪比定义为

$$\text{PSNR} = 20 * \log_{10}^{(255/\text{RMSE})} \quad (13)$$

式中 RMSE 为原始图像和去噪恢复图像的均方误差.从表 1 可以看出,无论是传统的拉普拉斯金字塔变换去噪,还是自适应提升拉普拉斯金字塔去噪,其去噪效果都明显要好于传统小波去噪的效果,但自适应提升拉普拉斯金字塔去噪具有更高的 PSNR.

表 1 有噪图像和去噪图像的 PSNR

含噪图像	传统小波去噪	拉普拉斯变换去噪	改进的去噪算法
19.41	20.62	21.15	21.58
19.03	19.59	20.62	20.85
17.89	19.41	19.67	19.94
16.88	19.34	19.47	19.74
15.97	19.08	19.13	19.48

图 3 为各种图像去噪算法的效果.输入信噪比为 14.34 dB,去噪算法中都采用软阈值去噪.图 3(d)对 Barbara 图像用基于数学形态学的金字塔去噪算法进行去噪处理后,噪音得到了有效抑制,图像边缘特征基本保留,峰值信噪比增益为 4.34 dB.采用传统的小波进行去噪时,峰值信噪比增益为 4.01 dB.这说明了基于数学形态学的金字塔去噪算法的去噪效果要好于传统小波的效果.

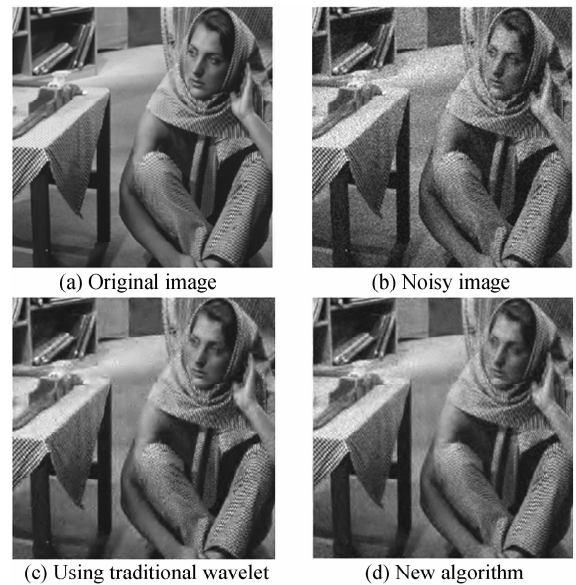


图 3 几种方法去噪图像的对比

Fig. 3 Comparison of de-noising via different approaches

## 6 结论

本文提出的基于形态学的自适应提升拉普拉斯金字塔去噪算法不仅能够有效地抑制噪音,而且能在去噪的同时保留更多的图像细节信息.实验结果显示该方法能更好地去除图像中的零均值白噪音,更有效地保留图像的细节和纹理.与传统小波变换阈值去噪方法相比,该方法更好的平滑了噪音,保持了更多的边缘和纹理细节,视觉效果也更好.

### 参考文献

- [1] DONOHO D L. De-noising by soft-thresholding [J]. *IEEE Trans on Information Theory*, 1995, **41**(3): 613-627.
- [2] ZHANG Bin, WANG Weiwei, SHANG Xiaoqing, et al. The noise removal of image based on interval biorthogonal wavelet [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(8): 981-984.  
张彬,王卫卫,尚晓清,等.基于区间双正交小波的图像去噪[J]. *光子学报*, 2003, **32**(8): 981-984.
- [3] JIN Wei, WEI Biao, PAN Yingjun, et al. A novel method of neutron radiography image denoising using contourlet transform [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2006, **35**(5): 981-984.
- [4] PIELLA G, HEIJMANS H J A M. Adaptive lifting schemes with perfect reconstruction [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, **50**(7): 1620-1630.
- [5] HEIJMANS H J A M, BEATRICE P P, PIELLA G. Building nonredundant adaptive wavelets by update lifting [R]. Research Report PNA-R02xx, CWI, Amsterdam, 2002.
- [6] DING Xuing, ZHU Rihong, LI Jianxin. An adaptive wavelet transform via lifting for image compression [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(2): 225-228.
- [7] BURT P J, ADELSON E H. The Laplacian pyramid as a compact image code [J]. *IEEE Transactions on Communications*, 1983, **31**(4): 532-540.

- [8] MINH N D, MARTIN V. Framing pyramids [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2003, **51**(9): 2329-2342.
- [9] SCHULZE M A, JOHN A. Morphological image processing techniques in thermo graphic image [J]. *Biomedical Sciences Instrumentation*, 1993, **29**(2-3): 227-234.
- [10] SERRA J. Image analysis and mathematical morphology- Volume II: theoretical advances [M]. London: Academic, 1988.
- [11] DONOHO D L, JOHNSTONE I M. Ideal spatial adaption by wavelet shrinkage [J]. *Biometrika*, 1994, **81**(3): 425-455.
- [12] YUAN X H, BUCKLES B P. Subband noise estimation for adaptive wavelet shrinkage [C]. *Proceedings of the 17<sup>th</sup> International Conference on Pattern Recognition*. 2004, **4**(8): 858-888.

## A Pyramid Transform of Image Denoising Algorithm Based on Morphology

XIANG Jing-bo<sup>1,2</sup>, SU Xiu-qin<sup>1</sup>

(1 *Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710119, China*)

(2 *Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China*)

Received date: 2007-04-03

**Abstract:** An image de-noising algorithm based on adaptive-lifting laplacian pyramid transform and mathematical morphology was proposed. The source image was decomposed by the adaptive lifting Laplacian Pyramid. According to the statistics of the transform coefficients of natural image, the morphological dilation operator was applied to extract the clustered significant coefficients in each subband resulting in the partitioning of each subband into significance clusters and insignificance space. The smoothing image of the input image was obtained using the wavelet threshold-denoising method whose threshold was different in different subsets. Two subsets, and reconstruction image were combined. The experiment results demonstrate that the algorithm can denoise effectively, and keep the detail information. The method can improve the signal-to-noise ratio.

**Key words:** Laplacian pyramid; Image denoising; Mathematical morphology; Adaptive lifting



**XIANG Jing-bo** was born in 1976. Now, he is studying for his Ph. D. degree at Xi'an Institute of Optics & Precision Mechanics, Chinese Academy of Sciences, and his research interests focus on image compression and wavelet transform.