

# 激发纠缠相干态的统计性质

张克福, 王中结

(安徽师范大学 物理与电子信息学院, 安徽 芜湖 241000)

**摘 要:** 将玻色湮灭算符的逆算符作用在纠缠相干态的一个模上得到激发纠缠相干态. 该量子态是玻色湮灭算符的偶次幂本征态; 由于两个场模间的纠缠, 在  $a$  模上增加光子不但可以使  $a$  模的平均光子数增加, 也可以使  $b$  模的平均光子数发生变化; 当  $a$  模上增加光子后, 两个场模的亚泊松分布特性和 Cauchy-Schwartz 不等式的破坏都得到了增强, 但模间反关联度反而减弱.

**关键词:** 玻色算符的逆算符; 纠缠相干态; 统计性质

中图分类号: O431.2

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2009)02-425-5

## 0 引言

由于光场量子态的非经典效应在量子力学、量子光学以及相关领域中具有重要的应用而倍受关注<sup>[1-2]</sup>. 光子产生算符<sup>[3]</sup>及压缩算符<sup>[4]</sup>作用于相干态均可得到具有量子特性的光场态. 其中利用 Metha<sup>[5]</sup>引入的并由范洪义<sup>[6]</sup>给出严格表述的玻色算符的逆算符  $a^{-1}$  及  $a^{+1}$ , 作用到光场量子态上从而产生新的非经典光场已有很多研究: 黄纯青等研究了增加光子对和减少光子对相干态的统计性质<sup>[7]</sup>, 杨庆怡等研究了增减光子奇偶相干态<sup>[8]</sup>.

近年来由 Sanders<sup>[9]</sup>引入的一种非正交纠缠态-纠缠相干态引起了许多关注. 王晓光<sup>[10]</sup>等对纠缠相干态的特性进行了分析计算, van Enk 和 Hirota<sup>[11]</sup>研究了纠缠相干态的消相干问题, 提出了如何利用纠缠相干态隐形传输一个薛定谔猫态的方案; 陶孟仙<sup>[12]</sup>等研究了增加光子纠缠相干态的统计性质, 得到了光子产生算符增强了纠缠相干态的非经典性质. 本文将考虑利用玻色算符的逆算符  $a^{-1}$  在纠缠相干态一个模上的激发对两个模光子量子统计的影响.

## 1 激发纠缠相干态

考虑的纠缠相干态为<sup>[13]</sup>

$$|\Psi_{\pm}(\alpha, 0)\rangle = N_{\pm}(|\alpha, \alpha\rangle \pm |-\alpha, -\alpha\rangle) \quad (1)$$

式中  $|\alpha, \alpha\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\alpha\rangle$ ,  $|\alpha\rangle$  为 Glauber 相干态<sup>[12]</sup>,  $\alpha = r \exp(i\theta)$ , 则归一化常量为

$$N_{\pm}^{-2} = 2[1 \pm \exp(-4|\alpha|^2)] \quad (2)$$

为方便起见, 把式(1)中给出的纠缠相干态的第一个模和第二个模分别称为  $a$  模和  $b$  模, 把玻色湮灭算符的逆算符  $a^{-1}$  作用到式(1)表示的量子态的  $a$  模上  $m$  次, 得到

$$|\Psi_{\pm}(\alpha, m)\rangle = N_{\pm} a^{-m}(|\alpha, \alpha\rangle \pm |-\alpha, -\alpha\rangle) \quad (3)$$

$$\text{由 } a^{-1}|n\rangle = (n+1)^{-1/2}|n+1\rangle \quad (4)$$

可得

$$a^{-m}|\alpha\rangle = \alpha^{-m} [|\alpha\rangle - \exp(-\frac{|\alpha|^2}{2}) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} |k\rangle] \quad (5)$$

通过计算可得归一化常量为

$$N_{\pm}^{-2} = 2[|\alpha|^{-2m} (1 - e^{-|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{|\alpha|^{2k}}{k!}) \pm (-|\alpha|^2)^{-m} (e^{-4|\alpha|^2} - e^{-3|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-|\alpha|^2)^k}{k!})] \quad (6)$$

于是, 式(3)可进一步表示为

$$|\Psi_{\pm}(\alpha, m)\rangle = N_{\pm} \{ \alpha^{-m} [|\alpha, \alpha\rangle - \exp(-\frac{|\alpha|^2}{2}) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} |k, \alpha\rangle] \pm (-\alpha)^{-m} [ |-\alpha, -\alpha\rangle - \exp(-\frac{|\alpha|^2}{2}) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-\alpha)^k}{\sqrt{k!}} |k, -\alpha\rangle] \} \quad (7)$$

可以看出, 此态  $a$  模中不包含  $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle \dots, |m-1\rangle$  这样一系列的态. 玻色湮灭算符  $b$  的  $2s$  次幂作用在式(7)的  $b$  模上, 可得

$$b^{2s} |\Psi_{\pm}(\alpha, m)\rangle = \alpha^{2s} |\Psi_{\pm}(\alpha, m)\rangle \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (8)$$

即  $|\Psi_{\pm}(\alpha, m)\rangle$  态为  $b^{2s}$  的本征态, 其本征值为  $\alpha^{2s}$ . 由此, 把态  $|\Psi_{\pm}(\alpha, m)\rangle$  称为激发纠缠相干态. 另外, 玻色湮灭算符的  $2s+1$  次幂作用在上式的  $b$  模上, 可以实现  $|\Psi_{+}(\alpha, m)\rangle$  与  $|\Psi_{-}(\alpha, m)\rangle$  之间的相互转换

$$b^{2s+1} |\Psi_{+}(\alpha, m)\rangle = \alpha^{2s+1} N_{+} N_{-}^{-1} |\Psi_{-}(\alpha, m)\rangle \quad (9)$$

$$b^{2s+1} |\Psi_{-}(\alpha, m)\rangle = \alpha^{2s+1} N_{-} N_{+}^{-1} |\Psi_{+}(\alpha, m)\rangle \quad (10)$$

由式(5), (6)和(7)可以得到

$$\langle a^p \rangle = \langle b^p \rangle = \langle a^{+p} \rangle^* = \langle b^{+p} \rangle^* = N_{\pm}^2 [\alpha^p + (-\alpha)^p] \cdot \left\{ |\alpha|^{-2m} \left[ 1 - e^{-|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{|\alpha|^{2k}}{k!} \right] \pm (-|\alpha|^2)^{-m} \cdot \left[ e^{-4|\alpha|^2} - e^{-3|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-|\alpha|^2)^k}{k!} \right] \right\} \quad (11)$$

$$\langle a^{+p} a^p \rangle = |\alpha|^{2p} \frac{1 - e^{-|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{m-p-1} \frac{|\alpha|^{2k}}{k!} \pm (-1)^{-m+p}}{1 - e^{-|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{|\alpha|^{2k}}{k!} \pm (-1)^{-m}}$$

$$\leftarrow \frac{[e^{-4|\alpha|^2} - e^{-3|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-|\alpha|^2)^k}{k!}]}{[e^{-4|\alpha|^2} - e^{-3|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-|\alpha|^2)^k}{k!}]} \quad (12)$$

$$\langle b^{+\rho} b^{\rho} \rangle = |\alpha|^{2\rho} \frac{1 - e^{-|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{|\alpha|^{2k}}{k!} \pm (-1)^{-m+\rho}}{1 - e^{-|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{|\alpha|^{2k}}{k!} \pm (-1)^{-m}}$$

$$\leftarrow \frac{[e^{-4|\alpha|^2} - e^{-3|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-|\alpha|^2)^k}{k!}]}{[e^{-4|\alpha|^2} - e^{-3|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-|\alpha|^2)^k}{k!}]} \quad (13)$$

$$\langle a^{+} a b^{+} b \rangle = |\alpha|^4 \frac{1 - e^{-|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{m-2} \frac{|\alpha|^{2k}}{k!} \pm (-1)^{-m}}{1 - e^{-|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{|\alpha|^{2k}}{k!} \pm (-1)^{-m}}$$

$$\leftarrow \frac{[e^{-4|\alpha|^2} - e^{-3|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{m-2} \frac{(-|\alpha|^2)^k}{k!}]}{[e^{-4|\alpha|^2} - e^{-3|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-|\alpha|^2)^k}{k!}]} \quad (14)$$

## 2 光子统计性质

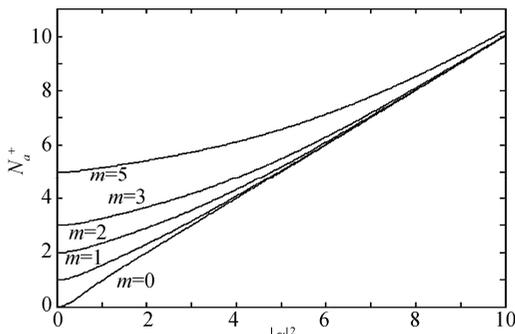
### 2.1 平均光子数分布

设  $a$  模与  $b$  模平均光子数分别为  $N_a$  和  $N_b$ . 利用式(12)和(13)可计算

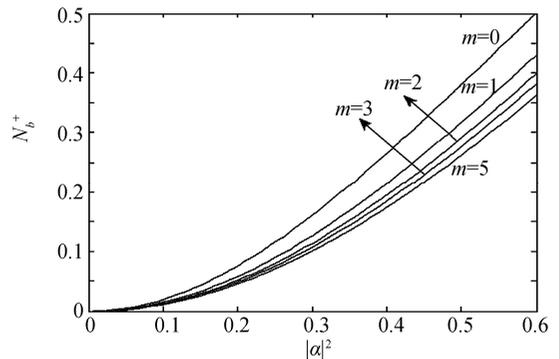
$$N_a = \langle a^{+} a \rangle \quad (15)$$

$$N_b = \langle b^{+} b \rangle \quad (16)$$

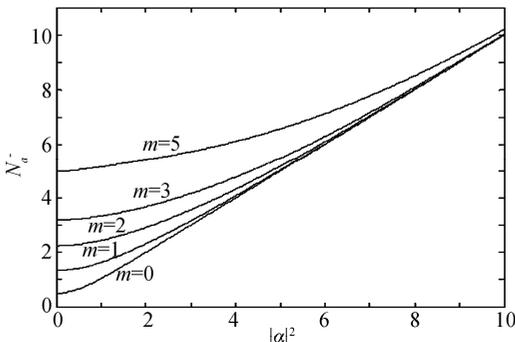
图 1 给出了相应的数值计算结果, 总体上来看两模上的平均光子数都随  $|\alpha|^2$  的增大而增大. 对于  $|\Psi_{+}(\alpha, m)\rangle$  态, 被激发的  $a$  模上的平均光子数随激发数的增大而增加, 而未激发的  $b$  模上的平均光子数却随着激发数的增大而减少; 对于  $|\Psi_{-}(\alpha, m)\rangle$  态, 从图中可以看出,  $a$  模和  $b$  模上的平均光子数均随激发数的增大而增加.



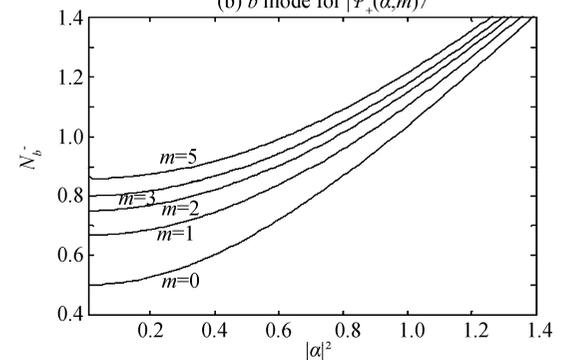
(a)  $a$  mode for  $|\Psi_{+}(\alpha, m)\rangle$



(b)  $b$  mode for  $|\Psi_{+}(\alpha, m)\rangle$



(c)  $a$  mode for  $|\Psi_{-}(\alpha, m)\rangle$



(d)  $b$  mode for  $|\Psi_{-}(\alpha, m)\rangle$

图 1  $|\Psi_{+}(\alpha, m)\rangle$  和  $|\Psi_{-}(\alpha, m)\rangle$  态两模的平均光子数与  $|\alpha|^2$  的关系

Fig. 1 Relation curve between the mean photon number and the parameter  $|\alpha|^2$  for  $|\Psi_{+}(\alpha, m)\rangle$  and  $|\Psi_{-}(\alpha, m)\rangle$

### 2.2 亚泊松光子统计

计算激发纠缠相干态的 Mandel  $Q$  参量,  $Q$  参量反应了光子数分布对泊松分布的偏离, 是一个重要的统计参量. 对于单模光场其定义为<sup>[12]</sup>

$$Q = \frac{\langle (a^{+} a)^2 \rangle - \langle a^{+} a \rangle^2}{\langle a^{+} a \rangle} \quad (17)$$

当  $Q < 1$  时, 光子是亚泊松分布的, 是光场的一种非经典效应. 对于双模光场  $a$  模与  $b$  模, 利用  $[a, a^{+}] = 1$ , 分别将  $Q_a$  和  $Q_b$  表示为

$$Q_a = \frac{\langle a^{+2} a^2 \rangle - \langle a^{+} a \rangle^2}{\langle a^{+} a \rangle} + 1 \quad (18)$$

$$Q_b = \frac{\langle (b^{+2} b^2) \rangle - \langle b^{+} b \rangle^2}{\langle b^{+} b \rangle} + 1 \quad (19)$$

式中各项可由式(13)和(14)给出.

图 2 给出了激发纠缠相干态  $|\Psi_{+}(\alpha, m)\rangle$  和  $|\Psi_{-}(\alpha, m)\rangle$  的 Mandel  $Q$  参量  $Q_a$  和  $Q_b$  随  $|\alpha|^2$  变化规律. 其中图 2(a) 图和图 2(b) 分别对应于激发纠缠相干态的  $a$  模和  $b$  模.  $m=0$  时对应纠缠相干态. 在图 2(a) 中, 此时的  $a$  模光子未出现亚泊松分布. 在  $a$

模上增加光子时, 出现了  $Q_a$  值小于 1 的区域, 即被激发的  $a$  模光子出现亚泊松分布, 随着光子激发数  $m$  的增加,  $Q_a$  的值依次减小, 即光子亚泊松分布增强. 在图 2(b) 中, 整个图中的  $Q_b$  的值均未出现小于 1 的情况, 说明  $|\Psi_+(\alpha, m)\rangle$  态的  $b$  模光子未出现亚泊松分布. 在图 2(c) 中看到  $|\Psi_-(\alpha, 0)\rangle$  态的  $a$  模光

子已存在亚泊松分布的区域. 随着激发数的增加亚泊松分布随之增强, 且亚泊松分布的区域明显增大. 从图 2(d) 中可以看出,  $|\Psi_-(\alpha, 0)\rangle$  态的  $b$  模上光子也有明显的亚泊松分布, 随着激发数的增加, 对应的亚泊松分布随之增强, 只是亚泊松分布区域较小, 强度也有所减小.

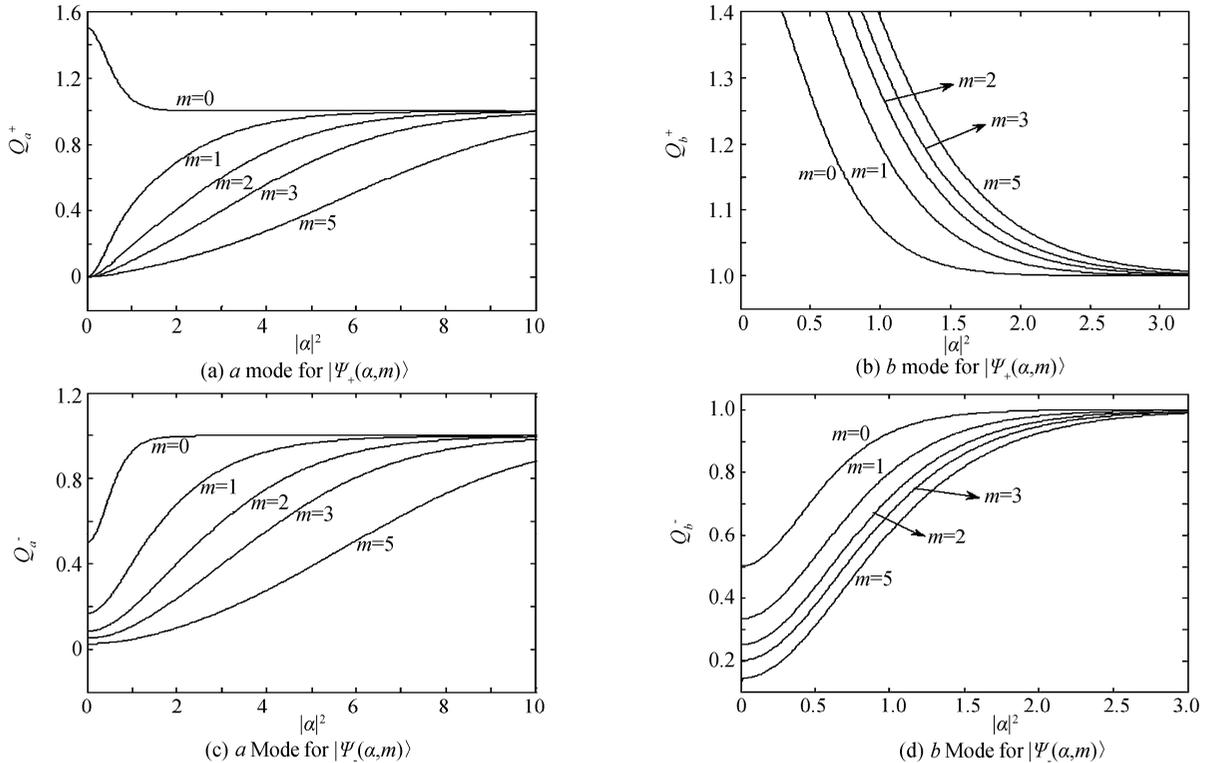


图 2  $|\Psi_+(\alpha, m)\rangle$  和  $|\Psi_-(\alpha, m)\rangle$  态两模的 Mandel Q 参与与  $|\alpha|^2$  的关系

Fig. 2 Reliution curve between Mandel Q and the parameter  $|\alpha|^2$  for  $|\Psi_+(\alpha, m)\rangle$  and  $|\Psi_-(\alpha, m)\rangle$

### 2.3 交叉关联函数

这里讨论此态两个模的交叉反关联特性. 交叉关联函数为<sup>[15]</sup>

$$G_{ab} = \frac{\langle a^+ ab^+ b \rangle}{\langle a^+ a \rangle \langle b^+ b \rangle} \quad (20)$$

若对于一个态的交叉关联函数  $G_{ab} < 1$ , 那么称  $a$  模与  $b$  模是反关联的, 否则它们是正关联的, 即光场具有非经典性质. 图 3 中给出的是交叉关联函数  $G_{ab}$  随  $|\alpha|^2$  的变化规律.

从图 3(a) 中可以看出,  $|\Psi_+(\alpha, m)\rangle$  态的两模间总是正关联的, 尽管  $G_{ab}$  的值随激发数  $m$  的增大而有明显的减小, 但  $G_{ab}$  值均大于 1. 从图 3(b) 中看到  $G_{ab}$  的值随着激发数  $m$  的增大而增大, 但其值均小于 1, 说明  $|\Psi_-(\alpha, m)\rangle$  态的两模间总是反关联的,  $m$  为 0 时对应纠缠相干态, 此时态的两模间反关联程度最大. 即光子的激发却使此态的两模间反关联程度减弱.

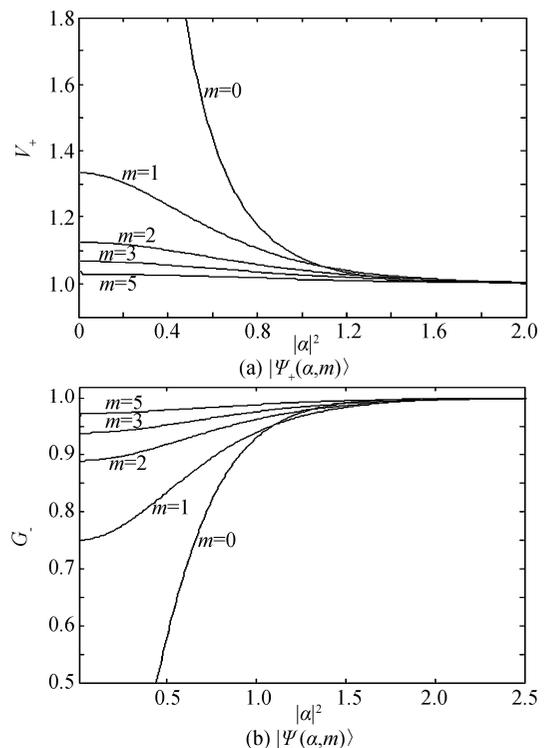


图 3 交叉关联函数  $G_{ab}$  与  $|\alpha|^2$  的关系

Fig. 3 Reliution curve between  $G_{ab}$  and the parameter  $|\alpha|^2$

## 2.4 Cauchy-Schwartz 不等式

双模场的 Cauchy-Schwartz 不等式定义为<sup>[16]</sup>

$$\langle a^{+2} a^2 \rangle \langle b^{+2} b^2 \rangle \geq \langle a^+ a b^+ b \rangle^2 \quad (21)$$

Cauchy-Schwartz 不等式的破坏象征着强烈的非经典的关联. 为了便于观察, 取

$$V = \langle a^+ a b^+ b \rangle^2 - \langle a^{+2} a^2 \rangle \langle b^{+2} b^2 \rangle \quad (22)$$

如果  $V > 0$  成立, 则表明 Cauchy-Schwartz 不等式的破坏, 即光场两模间为非经典关联, 否则为经典关联. 图 4 中给出了  $V$  随着  $|\alpha|^2$  的规律, 图 4(a) 对应于态  $|\Psi_+(\alpha, m)\rangle$ , 图 4(b) 对应于态  $|\Psi_-(\alpha, m)\rangle$ .

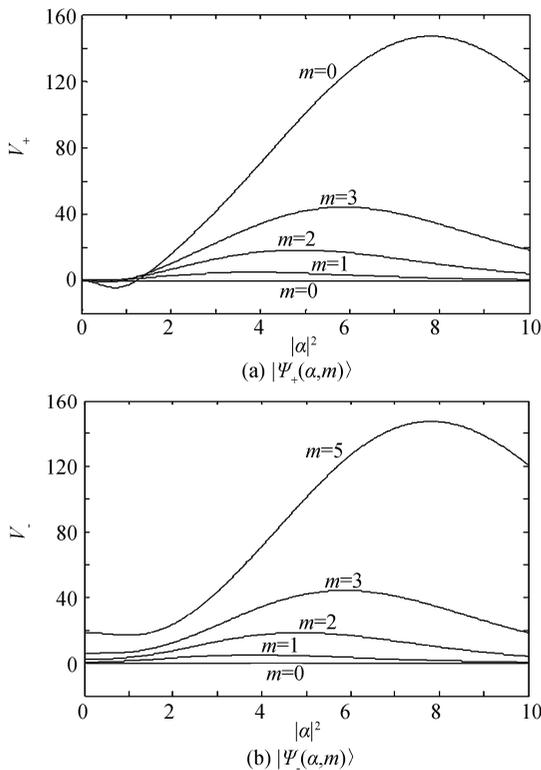


图 4  $V$  与  $|\alpha|^2$  的关系

Fig. 4 Relation curve between  $V$  and the parameter  $|\alpha|^2$

对于  $|\Psi_+(\alpha, m)\rangle$  态,  $V$  值在  $|\alpha|^2$  较小时出现了小于 0 的情况,  $|\alpha|^2$  较大时  $V$  值明显大于 0, 即为 Cauchy-Schwartz 不等式被破坏. 对于每一个激发数  $m$ , 对应的曲线都存在一个峰, 这些峰随着光子激发数  $m$  的增加向右移, 而峰的高度随光子激发数  $m$  的增加也是增大的. 表明光子激发使光场两模间呈现出明显的非经典关联, 激发次数增多, 这种非经典关联增强, 每一个激发都有一个最大非经典关联的出现. 对于  $|\Psi_-(\alpha, m)\rangle$  态, 也有类似的规律, 只是对应的  $V$  值全部大于 0, 即 Cauchy-Schwartz 不等式完全被破坏, 光子的激发使 Cauchy-Schwartz 不等式破坏程度增强.

## 3 结论

研究了玻色算符的逆算符  $a^{-1}$  作用在由互为反相的双相干态的叠加态而构成的纠缠态的一个模上

所得到的量子态的量子统计性质. 发现, 在纠缠相干态的  $a$  模上加入光子, 使  $a$  模的平均光子数增加的同时也使  $b$  模的平均光子数发生变化: 对于  $|\Psi_+(\alpha, m)\rangle$  态,  $b$  模的平均光子数减少, 对于  $|\Psi_-(\alpha, m)\rangle$  态,  $b$  模的平均光子数增加. 我们还同时讨论了激发纠缠相干态的 Mandel  $Q$  参量, 交叉关联函数和 Cauchy-Schwartz 不等式的破坏. 结果表明, 光子激发使得亚泊松分布特性, 模间反关联度和 Cauchy-Schwartz 不等式的破坏都得到了增强, 且这些现象因激发数的增大随之增强.

## 参考文献

- [1] ZHANG Min, JIANG Jun-qin. High power squeezing of the photon-added even and odd q-coherent states [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2002, **31**(12): 1436-1438.  
张敏, 江俊勤. 增加光子奇偶 q 相干态的高阶压缩效应[J]. 光子学报, 2002, **31**(12): 1436-1438.
- [2] HUANG Chun-qing, LU Hong. Statistical properties of photon-added and photon-subtracted pair coherent state [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2000, **29**(6): 481-486.  
黄纯青, 路洪. 增加光子对和减少光子对相干态的统计性质 [J]. 光子学报, 2000, **29**(6): 481-486.
- [3] SHEN Hua-jia. Equal-order Y-squeezing Effects of the Excited Pair Coherent State [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(7): 879-881.  
沈华嘉. 激发对相干态的等价 Y 压缩效应 [J]. 光子学报, 2003, **32**(7): 879-881.
- [4] HILLERY M. Amplitude-squared squeezing of the electromagnetic field [J]. *Phys Rev A*, 1987, **36**(8): 3796-3802.
- [5] MATHA C L, ROY A K, SAXENA G M. Eigenstates of two-photon annihilation operators [J]. *Phys Rev A*, 1992, **46**(3): 1565-1572.
- [6] FAN H Y. Inverse operator in Fock space studied via a coherent-state approach [J]. *Phys Rev A*, 1993, **47**(5): 4521-4523.
- [7] WEI L F, WANG S J, JIE Q L. Excited states of coherent state and their nonclassical properties [J]. *Chin Sci Bull*, 1997, **42**(20): 1686-1688.
- [8] YANG Qing-yi, WEI Lian-fu, DING Liang-en. Anti-bunching Effects of the Photon-added Squeezed Vacuum States [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2005, **34**(11): 1745-1747.  
杨庆怡, 韦联福, 丁良恩. 增光子压缩真空态的反群聚效应 [J]. 光子学报, 2005, **34**(11): 1745-1747.
- [9] SANDERS B C. Entangled coherent states [J]. *Phys Rev A*, 1992, **45**(9): 6811-6815.
- [10] WANG X, SANDERS B C. Multipartite entangled coherent states [J]. *Phys Rev A*, 2002, **65**(1): 0123031-0123037.
- [11] van ENK S J, HIROTA O. Entangled coherent states: Teleportation and decoherence [J]. *Phys Rev A*, 2001, **64**(4): 0223131-0223138.
- [12] TAO Meng-xian, LU Hong, SHE Wei-long. Statistical properties of photon-added entangled coherent states [J]. *Acta Phys Sin*, 2002, **51**(9): 1996-2001.  
陶孟仙, 路洪, 余卫龙. 增加光子纠缠相干态的统计性质 [J].

- 物理学报,2002,**51**(9):1996-2001.
- [13] XU L, KUANG L M. Single-mode entangled coherent states [J]. *Phys A Math Gen*, 2006, **39**: L191 - L198.
- [14] MANDEL L. Nonclassical properties of photon-added pair coherent states[J]. *Opt Lett*, 1979, **4**(1):205.
- [15] LAI W K, BUEK V, KNIGHT P L. Dynamics of a three-level atom in a two-mode squeezed vacuum[J]. *Phys Rev A*, 1991, **44**(9):6043-6056.
- [16] LU H, GUO G C. Nonclassical properties of photon-added pair coherent states[J]. *Acta Physica Sinica*, 1999, **8**(8):577-582.

## Statistical Properties of Excited Entangled Coherent States

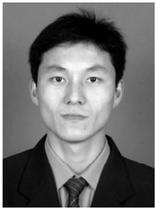
ZHANG Ke-fu, WANG Zhong-jie

(College of Physics and Electrical Information, Anhui Normal University, Wuhu, Anhui 241000, China)

Received date: 2007-09-24

**Abstract:** A new kind of entangled coherent states-excited entangled coherent states was obtained by acting boson inverse operators on some mode of entangled coherent states. The result shows that the new states are eigenstates of the  $2k$ -th power of the annihilation operator. Because of the entanglement between the modes of the field, the mean number of mode  $a$  increased, and the mean number of mode  $b$  changed by photon-adding. After adding photons, sub-poissonian photon statistics and violation of the Cauchy-Schwartz inequality of the fields can be enhanced obviously, but the degree of intermode anticorrelation was weakened by the photon excitations.

**Key words:** Boson inverse operators; Entangled coherent states; Statistical properties



**ZHANG Ke-fu** was born in 1980. He graduated from Physics Department of Anhui Normal University in 2002. Now he is pursuing the M. S. degree in optics at Anhui Normal University, and his research interests focus on the quantum optics and quantum information.