

# 双频光栅傅里叶变换轮廓术频谱混叠研究\*

乔 闹 生<sup>1</sup>, 赵 华 君<sup>2</sup>, 姚 春 梅<sup>1</sup>, 蔡 新 华<sup>1</sup>, 彭 光 含<sup>1</sup>

(1 湖南文理学院 物理与电子科学学院, 湖南 常德 415000)

(2 重庆文理学院 物理与信息工程系, 重庆 402168)

**摘 要:**讨论了用双频光栅方法对包含突变成份的物体产生的变形条纹进行傅里叶变换时,可能会出现频谱混叠问题. 推出了低频光栅的频谱  $f_1$  与高频光栅的频谱  $f_2$  不相互混叠的条件,分析了探测器非线性会引起同一光栅间频谱发生混叠情况. 考虑到通常情况下低频光栅频谱  $f_1$  与高频光栅频谱  $f_2$  的混叠起主要作用,因此在该情况下用计算机仿真与实验验证了:当  $f_2 < 2f_1$  时,  $f_1$  与  $f_2$  相互混叠,物体面形难以恢复;当  $f_2 > 2f_1$  时,  $f_1$  与  $f_2$  不相互混叠,物体面形恢复得很好.

**关键词:**傅里叶变换轮廓术;双频光栅;频谱混叠;探测器非线性;抽样

中图分类号:O438.2

文献标识码:A

文章编号:1004-4213(2009)02-356-5

## 0 引言

自 Takeda M 等<sup>[1]</sup>提出傅里叶变换轮廓术测量方法以来,许多学者对其测量准确度的提高进行了研究<sup>[2-8]</sup>,而消除频谱混叠是提高其测量准确度、准确恢复物体面形的有效方法之一<sup>[2-3]</sup>. 对于测量包含突变成份的物体相位时,由于需要去包裹处理(既相位展开),文献[4]提出了用软件方法生成含两种不同频率的复合光栅,将双频光栅应用于傅里叶变换轮廓术中,从而准确恢复物体面形. 但用该方法对物体的变形条纹进行傅里叶变换时,可能会使低频光栅的频谱与高频光栅的频谱发生混叠,或者因探测器非线性引起同一光栅间频谱发生混叠,从而影响物体面形的准确恢复.

本文理论推导了低频光栅的频谱与高频光栅的频谱不相互混叠的条件,讨论了探测器非线性会引起同一光栅间频谱发生混叠. 考虑到实际情况下低频光栅频谱与高频光栅频谱的混叠起主要作用,用计算机仿真与实验验证了该情况下频谱不相互混叠的条件.

## 1 基本原理

对双频光栅产生的变形光强进行傅里叶变换时,产生的频谱可能会出现混叠,因而在滤波时可能会使包含物体高度信息的一级频谱难以滤出,影响物体的高度恢复. 双频光栅傅里叶变换轮廓术中引起的频谱混叠主要有两种.

### 1.1 低频光栅与高频光栅间引起的频谱混叠

投影双频光栅产生的变形条纹的光强分布为

$$g(x, y) = a(x, y) + b_1(x, y) \cos [2\pi f_1 x + \varphi_1(x, y)] + b_2(x, y) \cos [2\pi f_2 x + \varphi_2(x, y)] \quad (1)$$

式(1)中  $a(x, y)$  为背景光强,  $f_1$  为低频光栅的频率,  $f_2$  为高频光栅的频率,  $b_1(x, y)$ 、 $b_2(x, y)$  分别为对应  $f_1$ 、 $f_2$  的物面非均匀反射率,  $\varphi_1(x, y)$ 、 $\varphi_2(x, y)$  分别为对应  $f_1$ 、 $f_2$  的包含物体高度分布  $h(x, y)$  的相位调制.

在实际情况下,被测物体的高度分布  $h(x, y)$  与相位调制  $\varphi(x, y)$  的关系为<sup>[1]</sup>

$$h(x, y) = -\frac{L_0}{2\pi f_0 d} \varphi(x, y) \quad (2)$$

式(2)中的  $d$  为探测器(主要是 CCD<sup>[2-3, 9-11]</sup>) 光心与投影仪光心之间的距离,  $L_0$  为探测器光心与参考平面之间的距离,  $f_0$  为光栅的频率.

对于测量包含突变成份的物体相位时,由于相位值被包裹在  $[-\pi, \pi]$  的范围内,得到的是截断相位  $\varphi(x, y)$ , 因此需要去包裹处理(即相位展开),以求得连续的真实相位分布(既展开相位  $\varphi(x, y)$ ). 展开相位  $\varphi(x, y)$  与截断相位  $\varphi(x, y)$  的关系为

$$\varphi(x, y) = \varphi(x, y) + 2\pi n(x, y) \quad (3)$$

相位展开的过程就是确定  $n(x, y)$  的过程. 为此,文献[4]提出了用软件方法生成含两种不同频率的复合光栅,结合低频光栅与高频光栅的优点,将两者的数据融合得到物体突变部分的精确轮廓.

现固定  $y$  轴,对式(1)进行  $x$  轴方向的一维傅里叶变换可得

$$G(f_x, y) = K_0(f_x, y) + K_1(f_x - f_1, y) + K_1^*(f_x + f_1, y) + K_2(f_x - f_2, y) + K_2^*(f_x + f_2, y) \quad (4)$$

采用  $\pi$  相移技术<sup>[6]</sup> 消除零频和条纹的背景影响,若  $f_1$  与  $f_2$  选择适当,可使低频光栅产生的一级

\* 湖南省教育厅资助科研项目(08C617)和湖南省重点建设学科基金资助

Tel: 0736-7186121 Email: naoshengqiao@163.com

收稿日期: 2007-09-20

频谱与高频光栅产生的一级频谱相互分离,从而用复合光栅的方法得到物体的恢复信息.

根据文献[1],可相应推出低频光栅产生的一级频谱的瞬时频率的最大值为

$$f_{11\max} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} [2\pi f_1 x + \varphi_1(x, y)] = f_1 + \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial \varphi_1(x, y)}{\partial x} \right|_{\max} \quad (5)$$

同理,高频光栅产生的一级频谱的瞬时频率的最小值为

$$f_{21\min} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} [2\pi f_2 x - \varphi_2(x, y)] = f_2 - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \varphi_2(x, y)}{\partial x} \quad (6)$$

要使高频光栅产生的变形结构光强经傅里叶变换后所得到的一级频谱与低频光栅产生的变形结构光强经傅里叶变换后所得到的一级频谱不相互混叠,则需满足

$$f_{21\min} < f_{11\max} \quad (7)$$

对于同一物体,在实际情况下,有

$$h(x, y) = -\frac{L_0}{2\pi f_1 d} \varphi_1(x, y) = -\frac{L_0}{2\pi f_2 d} \varphi_2(x, y) \quad (8)$$

为了防止各自的一级频谱与二级频谱等高级频谱混叠,文献[1]给出了相位变化率与光栅频率的关系式

$$\left| \frac{\partial \varphi_n(x, y)}{\partial x} \right|_{\max} < \frac{2\pi f_n}{3} \quad (n=1, 2) \quad (9)$$

式(9)中  $n=1$  表示低频光栅的相位  $\varphi_1(x, y)$  对  $x$  轴变化率绝对值最大值与其频率  $f_1$  的关系式,  $n=2$  表示高频光栅的相位  $\varphi_2(x, y)$  对  $x$  轴变化率绝对值最大值与其频率  $f_2$  的关系式.

联立式(5)~(9)可得低频  $f_1$  与高频  $f_2$  不相互混叠的条件为

$$f_2 > 2f_1 \quad (10)$$

## 1.2 探测器非线性引起的同一光栅间的频谱混叠

实际工作的探测器的输出光强  $g'(x, y)$  与输入光强  $g(x, y)$  关系比较复杂,一般并不成正比的关系,存在着非线性效应(主要是二阶非线性效应),其关系式为<sup>[2-3]</sup>

$$g'(x, y) = e_0 + e_1 g(x, y) + e_2 g^2(x, y) \quad (11)$$

式(11)中的  $e_0, e_1, e_2$  为比例系数. 固定  $y$  轴,对式(11)进行  $x$  轴方向的一维傅里叶变换可得

$$G(f_x, y) = K_0(f_x, y) + K_{11}(f_x - f_1, y) + K_{11}^*(f_x + f_1, y) + K_{12}(f_x - 2f_1, y) + K_{12}^*(f_x + 2f_1, y) + K_{21}(f_x - f_2, y) + K_{21}^*(f_x + f_2, y) + K_{22}(f_x - 2f_2, y) + K_{22}^*(f_x + 2f_2, y) \quad (12)$$

由式(12)可见,投影低频光栅与高频光栅产生的变

形光强经傅里叶变换后都产生了二级频谱,二级频谱的比例虽然很小,但若混入各自的一级频谱中会影响物体的相位分布,从而影响物体的高度恢复. 因此,为了进一步提高双频光栅傅里叶变换轮廓术的测量准确度,必须减小或消除探测器引起的非线性效应.

采用  $\pi$  相移技术<sup>[6]</sup> 消除零频和条纹的背景影响,选择适合的  $f_1$  和  $f_2$ ,使之满足式(10),则  $f_1$  和  $f_2$  可尽量分开而不相互混叠. 因此只需考虑双频光栅各自产生的二级频谱对对应的一级频谱的影响. 文献[2]、文献[12]中讨论了同一光栅产生的变形光强经傅里叶变换后得到的二级频谱不与一级频谱发生混叠的条件为  $m > 4$  ( $m$  为抽样频率与光栅频率的比值),且  $m$  越大,物体恢复的越好. 对于双频光栅,只考虑二阶非线性效应时,若用同一抽样频率,则只需考虑抽样频率与高频光栅频率的比值是否大于 4.

通常情况下,由于低频光栅与高频光栅间引起频谱混叠是主要的,探测器二阶非线性度很小,在系统的测量准确度不是要求特别高时,一般不需考虑之. 因此,只需考虑低频光栅与高频光栅间引起的频谱混叠问题.

## 2 MATLAB 仿真结果及讨论

仿真物体为  $600 \times 600$  pixel<sup>2</sup>, 高度为 10 mm 的陡峭的即包含突变成份的长方体物体.

分两种情况进行:

1) 模拟低频光栅的线周期为  $1/f_1 = 32$  mm, 模拟高频光栅的线周期  $1/f_2 = 18$  mm. 所产生不同幅度的归一化频谱如图 1(a), 中间 2 个频谱为低频光栅产生的, 两边 2 个频谱为高频光栅产生的; 用复合光栅的方法恢复的物体如图 1(b).

2) 模拟低频光栅的线周期为  $1/f_1 = 32$  mm, 模拟高频光栅的线周期  $1/f_2 = 8$  mm. 所产生不同幅度的归一化频谱如图 1(c), 中间 2 个频谱为低频光栅产生的, 两边 2 个频谱为高频光栅产生的; 用复合光栅的方法恢复的物体如图 1(d).

比较图 1(a) 与图 1(c) 可见: 低频  $f_1$  与高频  $f_2$  不满足式(10)的条件时, 低频光栅的频谱与高频光栅的频谱产生了混叠. 满足时则发生了分离.

比较图 1(b) 与图 1(d) 可见: 低频  $f_1$  与高频  $f_2$  不满足式(10)的条件时, 物体面形难以恢复; 陡峭部分丧失部分信息, 顶部平整部分出现明显起伏. 满足时则恢复的较好; 陡峭部分信息比较完好, 顶部平整部分起伏很小, 周围只出现较小突起信息.

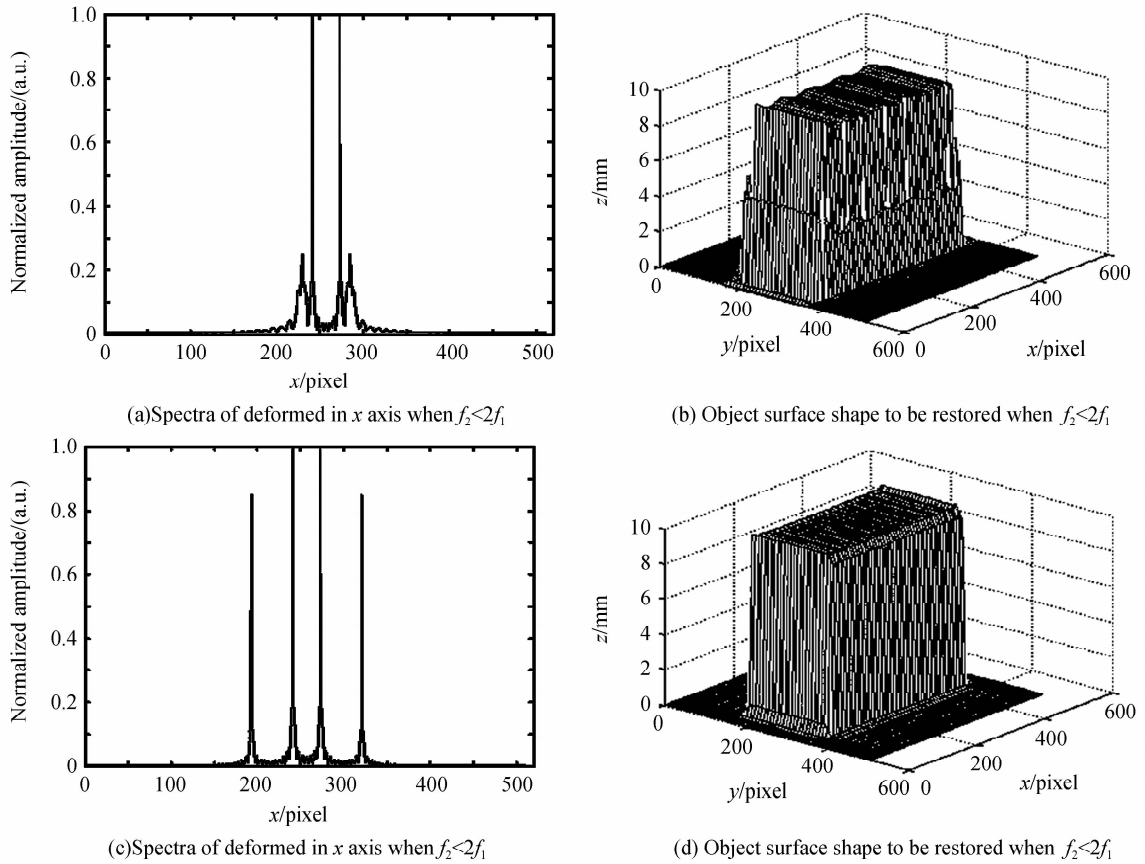


图 1 计算机模拟情况  
Fig. 1 Condition of computer simulation

### 3 实验结果及讨论

实际测量一台阶状物体. 产生条纹的实验装置为  $800 \times 600$  分辨率的 DMD 数字投影仪, 获取条纹的实验装置为低畸变的 CCD 摄像机. 条纹像素取  $256 \times 256$  pixel.

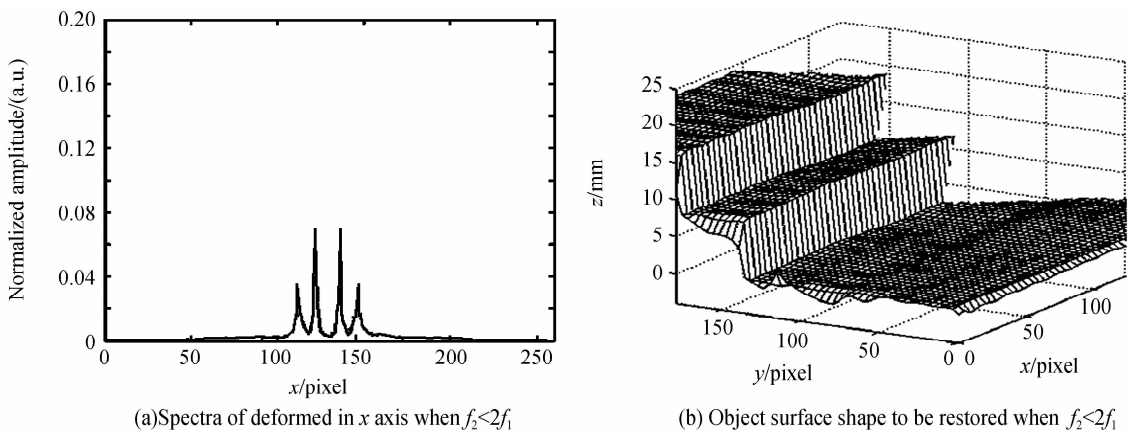
分两种情况进行:

1) 低频  $f_1$  与高频  $f_2$  不满足式(10)的条件. 用复合双频方法使得  $f_2/f_1 = 19/10$ , 所产生不同幅度的归一化频谱如图 2(a), 中间 2 个频谱为低频光栅产生的, 两边 2 个频谱为高频光栅产生的. 恢复的物体如图 2(b).

2) 低频  $f_1$  与高频  $f_2$  满足式(10)的条件. 用复合双频方法使得  $f_2/f_1 = 4$ , 所产生不同幅度的归一化频谱如图 2(c), 中间 2 个频谱为低频光栅产生的, 两边 2 个频谱为高频光栅产生的. 恢复的物体如图 2(d).

比较图 2(a)与图 2(c)可见: 低频  $f_1$  与高频  $f_2$  不满足式(10)的条件时, 低频光栅的频谱与高频光栅的频谱产生了混叠. 满足时则发生了分离.

比较图 2(b)与图 2(d)可见: 物体面形难以恢复: 陡峭部分丧失部分信息, 顶部平整部分凹凸信息明显. 满足时则恢复的较好: 陡峭部分信息比较好, 顶部平整部分只有少许凹凸信息.



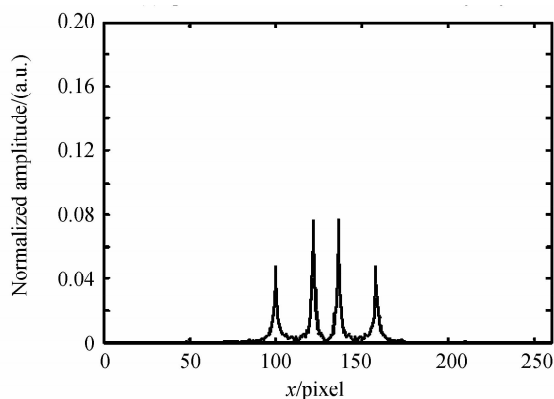
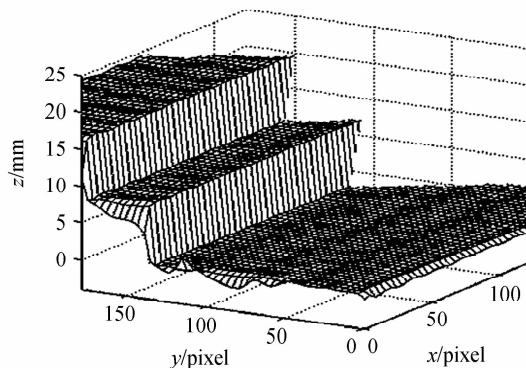
(c) Spectra of deformed in x axis when  $f_2 < 2f_1$ (d) Object surface shape to be restored when  $f_2 < 2f_1$ 

图2 实验情况

Fig. 2 Condition of experiment

## 4 结论

分析了双频傅里叶变换轮廓术两种频谱混叠问题,尤其是低频光栅与高频光栅间引起的频谱混叠会使包含物体高度信息的一级频谱难以滤出,影响物体的高度恢复.用计算机仿真与实验两种方法验证了低频光栅频率与高频光栅频率不相互混叠的条件.

### 参考文献

- [1] TAKEDA M, MUTOH K. Fourier transform profilometry for the automatic measurement 3-D object shapes[J]. *Appl Opt*, 1983, **22**(24): 3977-3982.
- [2] QIAO Nao-sheng, CAI Xin-hua, PENG Guang-han, et al. Study of effect caused by sampling in nonlinearity in CCD [J]. *Journal of Optoelectronics Laser*, 2006, **17**(11): 1339-1342.  
乔闹生,蔡新华,彭光含,等. 抽样对 CCD 非线性的影响研究[J]. *光电子·激光*, 2006, **17**(11): 1339-1342.
- [3] QIAO Nao-sheng, CAI Xin-hua, PENG Guang-han. Study of the relationship between nonlinearity of CCD and frequency overlapping[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2007, **36**(4): 603-608.  
乔闹生,蔡新华,彭光含. CCD 的非线性与频谱混叠的关系研究[J]. *光子学报*, 2007, **36**(4): 603-608.
- [4] LI Fang, ZHOU Can-lin. A novel profilometry with dual-frequency grating[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2005, **34**(4): 632-635.  
李方,周灿林. 一种新的双频光栅轮廓术[J]. *光子学报*, 2005, **34**(4): 632-635.
- [5] LIU Hui-qiang, CHEN Wen-jing, SU Xian-yu, et al. Fast fourier transform profilometry based on two-frequency grating projection[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2004, **31**(10): 39-42.  
刘慧强,陈文静,苏显渝,等. 采用双频光栅投影的快速傅里叶

变换轮廓术[J]. *光电工程*, 2004, **31**(10): 39-42.

- [6] LI J, SU X Y, GUO L R. Improved fourier transform profilometry for the automatic measurement of three-dimensional object shape[J]. *Opt Eng*, 1990, **29**(12): 1439-1444.
- [7] LIN J F, SU X Y. Two-dimensional Fourier transform profilometry for the automatic measurement of three-dimensional object shapes[J]. *Opt Eng*, 1995, **34**(11): 3297-3302.
- [8] LI W, BOTHE T, OSTEN W. Object adapted pattern projection-part 1: generation of inverse patterns[J]. *Opt Lasers Eng*, 2004, **41**(1): 31-50.
- [9] WANG Li, TIAN Wei-jian, WANG Yao-xiang, et al. Measurement method for modulation transfer function of fiber optic coupled with CCD[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2005, **34**(4): 613-615.  
汪丽,田维坚,王耀祥,等. 光锥与 CCD 耦合器件调制传递函数的测试方法[J]. *光子学报*, 2005, **34**(4): 613-615.
- [10] WANG Yao-xiang, TIAN Wei-jian, WANG Li, et al. Measurement for modulation transfer function of CCD coupled with fiber optic taper by rectangle bar [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2005, **34**(6): 923-926.  
王耀祥,田维坚,汪丽,等. 矩形波板法测量光锥与 CCD 耦合器件的光学传递函数[J]. *光子学报*, 2005, **34**(6): 923-926.
- [11] MA Rong-gui, SONG Hong-xun. The application of multiple-CCD displacement transducers in the road profiling measurement[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2001, **30**(3): 352-354.  
马荣贵,宋宏勋. 多路 CCD 位移传感器用于路面纵断面检测研究[J]. *光子学报*, 2001, **30**(3): 352-354.
- [12] CHEN W J, YANG H, SU X Y, et al. Error caused by sampling in Fourier transform profilometry [J]. *Opt Eng*, 1999, **38**(6): 1029-1034.

## Overlapping Caused by Fourier Transformation Profilometry Based on Tow-frequency Grating

QIAO Nao-sheng<sup>1</sup>, ZHAO Hua-jun<sup>2</sup>, YAO Chun-mei<sup>1</sup>, CAI Xin-hua<sup>1</sup>, PENG Guang-han<sup>1</sup>

(1 School of Physics and Electronics, Hunan University of Arts and Science, Chengde, Hunan 415000, China)

(2 School of Physics and Electronic Information Engineering, Chongqing University of Arts and Sciences, Chongqing 402168, China)

Received date: 2007-09-20

**Abstract:** The possibility of frequency overlapping was discussed when the Fourier transformation of deformed fringe for discontinuous object that contain mutation was executed by the method of dual-frequency grating. The condition of separation between  $f_1$  of low frequency grating and  $f_2$  of high frequency grating was deduced, and frequency overlapping of the same grating because of the nonlinearity of detector was analyzed. For the overlapping between  $f_1$  and  $f_2$  is the chief condition, computer simulation and experiment on the condition prove that  $f_1$  and  $f_2$  are overlapped when  $f_2 < 2f_1$ ,  $f_1$  and  $f_2$  are separated when  $f_2 > 2f_1$ .

**Key words:** Fourier transformation profilometry; Dual-frequency grating; Frequency overlapping; Nonlinearity of detector; Sampling



**QIAO Nao-sheng** was born in 1971. He received the B. S. degree from Hunan Normal University in 2000, and received the M. S. degree in optical information processing from Sichuan University in 2005. Now he is a lecturer at Department of Physics and Electronics, Hunan University of Arts and Science, and his research interests focus on optical information processing, nonlinear optics, optical 3-D sensing and so on.