

经光阑衍射的高阶贝塞耳光束位相奇点演化特性*

任祥贵, 吕百达

(四川大学 激光物理与化学研究所, 成都 610064)

摘要:推导出了高阶贝塞耳光束通过有光阑近轴 ABCD 光学系统传输的解析公式, 用以研究了高阶贝塞耳光束被光阑衍射位相奇点的演化特性. 结果表明: 高阶贝塞耳光束经光阑系统衍射后, 中心光涡旋始终存在, 拓扑电荷守恒, 但涡旋核大小会随光阑半径、传输距离和光束阶数而变化; 随光阑半径和传输距离变化, 圆刃型位错会消失或产生.

关键词:奇点光学; 高阶贝塞耳光束; 光阑衍射; 光涡旋; 圆刃型位错

中图分类号: O436.1

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2009)02-259-5

0 引言

对位相奇点附近出现的光波场精细而又复杂特性的研究已发展成为现代光学一个前沿研究领域—奇点光学, 并在原子俘获、光数据存储、光开关、光通信、光信息处理和高分辨计量学等多方面展现出广泛应用前景^[1]. TEM_0^* 激光腔模, 拉盖尔-高斯光束和高阶贝塞耳光束是典型的奇点光束^[2-4]. 物理上可实现的贝塞耳光束可用计算全息、轴棱锥等多种实验方法产生^[5-7]. 文献[8-9]对高阶贝塞耳光束通过近轴 ABCD 光学系统的传输特性和相干叠加高阶贝塞耳在自由空间中传输时位相奇点和拓扑电荷的变化已做了研究, 而文献[10]对于光阑中心与光束中心不重叠时位相奇点的变化也做了研究. 本文研究了受光阑衍射高阶贝塞耳光束位相奇点的演化特性, 并以高阶贝塞耳光束的圆孔衍射和通过光阑透镜系统的传输为例做具体计算分析.

1 高阶贝塞耳光束通过有光阑近轴 ABCD 系统的传输

在柱坐标下, 入射面 $z=0$ 处高阶贝塞耳光束的场为^[8]

$$E(r_1, \theta_1, 0) = E_0 J_n(\alpha r) \exp(in\theta_1) \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (1)$$

式中 E_0 为一常量, n 为高阶贝塞耳光束的阶数, α 为波矢的径向分量, $0 < \alpha \leq k$, k 为波数, 与波长 λ 的关系为 $k = 2\pi/\lambda$.

图 1 给出了 1 阶贝塞耳光束在自由空间传输时 z 处横平面上的等光强图和等位相图, 其中 $\alpha = 1 \text{ mm}^{-1}$. 由图 1 知, 中心处强度为零. 按文献[11]决定拓扑电荷大小和正负的方法, 对绕奇点旋转位相

变化的分析得知, 中心处存在一拓扑电荷为 +1 的螺旋位错, 即光涡旋, 绕其逆时针旋转一周位相改变为 2π 在半径分别为 $r = 3.83 \text{ mm}, 7.02 \text{ mm}, 10.17 \text{ mm} \dots$ 的圆处, 强度为零, 并且越过它时有 π 的位相突变, 这即圆刃型位错. 类似地, 对 n 阶贝塞耳光束, 中心处有一稳定光涡旋, 绕着它逆时针旋转一周的位相改变为 $2n\pi$, 这是合理的物理结果^[11], 相应半径处出现圆刃型位错.

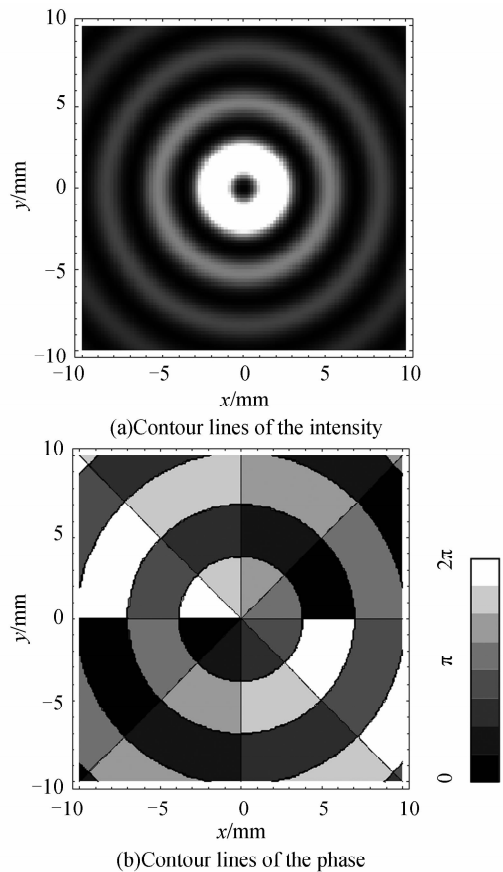


图 1 一阶贝塞耳光束在自由空间的 z 处的等光强图和等位相图

Fig. 1 Contour lines of the intensity and phase of a first-order Bessel beam at the z plane in free space

高阶贝塞耳光束通过在 $z=0$ 处置半径为 a 的

* 国家自然科学基金(10874125, 10574097)资助
Tel: 028-85412819 Email: xrg.scu@163.com
收稿日期: 2007-10-18

硬边圆孔光阑近轴 ABCD 光学系统传输时,场分布由 Collins 公式描述^[12]

$$E(r_2, \theta_2, z) = -\frac{iE_0}{\lambda B} \exp(ikz) \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} E(r_1, \theta_1, 0) \cdot A_p(r_1) \exp\left\{\frac{ik}{2B}[Ar_1^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + Dr_2^2]\right\} r_1 dr_1 d\theta_1 \quad (2)$$

式中 A, B, C 和 D 是近轴光学系统的变换矩阵元, $A_p(r_1)$ 为圆孔光阑的窗口函数

$$A_p(r_1) = \begin{cases} 1 & r_1 < a \\ 0 & r_1 \geq a \end{cases} \quad (3)$$

将式(3)展为复高斯函数之和^[13]

$$A_p(r_1) = \sum_{j=1}^M A_j \exp\left(-\frac{B_j r_1^2}{a^2}\right) \quad (4)$$

式中 A_j 和 B_j 分别为展开式的系数, M 为项数, 取 10. 把式(1), (4)代入式(2)中, 并利用积分公式^[14]

$$\exp\left[in\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right] J_n(x) = \frac{1}{2\pi_0} \int_0^{2\pi} \exp[ix \cos(\theta - \varphi) - in\theta] d\theta \quad (5)$$

$$\int_0^{+\infty} x \exp(-\gamma x^2) J_n(\alpha x) J_n(\beta x) dx = \frac{1}{2\gamma} \exp\left(-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\gamma}\right) I_n\left(\frac{\alpha\beta}{2\gamma}\right) \quad (6)$$

(式中 I_n 为虚宗量贝塞耳函数), 经冗长积分计算, 最后结果可整理为

$$E(r_2, \theta_2, z) = -\frac{ikE_0}{B} \exp(ikz) \exp(in\theta_2) \cdot \sum_{j=1}^{10} A_j \left\{ \frac{1}{2(B_j a^{-2} - ikA/2B)} \exp\left[\frac{ikD}{2B} r_2^2 - \frac{\alpha^2 + (kr_2/B)^2}{4(B_j a^{-2} - ikA/2B)}\right] J_n\left(\frac{kar_2}{kA + 2iB_j B a^{-2}}\right) \right\} \quad (7)$$

式(7)为高阶贝塞耳光束通过有光阑近轴 ABCD 光学系统的传输解析公式. 它表明, 在 z 处的场分布与贝塞耳光束的参量 n, α 和光学系统矩阵元以及光阑参量有关. 下面以圆孔光阑和光阑透镜系统为例, 说明式(7)的应用和位相奇点的演化特性.

2 位相奇点通过圆孔光阑和光阑透镜的位相演化特性

2.1 圆孔光阑衍射

若通过圆孔光阑后在自由空间中传输, 式(7)为

$$E(r_2, \theta_2, z) = -\frac{ikE_0}{z} \exp(ikz) \exp(in\theta_2) \cdot \sum_{j=1}^{10} A_j \left\{ \frac{1}{2(B_j a^{-2} - ik/2z)} \exp\left[\frac{ik}{2z} r_2^2 - \frac{\alpha^2 + (kr_2/z)^2}{4(B_j a^{-2} - ik/2z)}\right] J_n\left(\frac{kar_2}{k + 2iB_j z a^{-2}}\right) \right\} \quad (8)$$

当 $a \rightarrow \infty$, 即可化为文献[8]中高阶贝塞耳光束在自由空间的传输公式

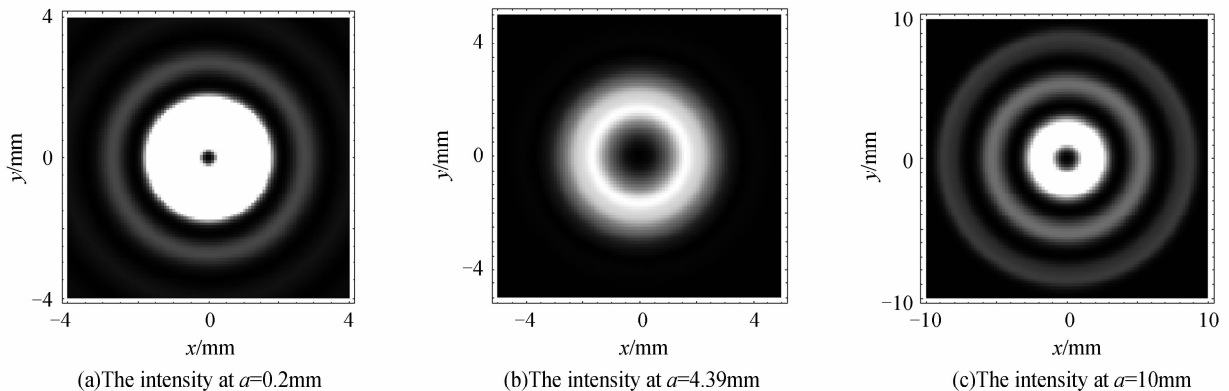
$$E(r_2, \theta_2, z) = E_0 \sum_{j=1}^{10} A_j \exp\left[ikz\left(1 - \frac{\alpha^2}{2k^2}\right)\right] \cdot \exp(in\theta_2) J_n(\alpha r_2) = E_0' \exp\left[ikz\left(1 - \frac{\alpha^2}{2k^2}\right)\right] \cdot \exp(in\theta_2) J_n(\alpha r_2) \quad (9)$$

式中 $E_0' = E_0 \sum_{j=1}^{10} A_j$ 为常量.

在远场, 式(8)简化为

$$E(r_2, \theta_2, z) = -\frac{ikE_0}{z} \exp(ikz) \exp(in\theta_2) \cdot \sum_{j=1}^{10} A_j \left\{ \frac{1}{2B_j a^{-2}} \exp\left[\frac{ik}{2z} r_2^2 - \frac{\alpha^2 + (kr_2/z)^2}{4B_j a^{-2}}\right] J_n\left(\frac{kar_2}{2iB_j z a^{-2}}\right) \right\} \quad (10)$$

数值计算中取 $\alpha = 1 \text{ mm}^{-1}$, $\lambda = 1.06 \text{ } \mu\text{m}$. 图 2 为 1 阶贝塞耳光束通过半径 $a = 0.2 \text{ mm}$, 4.39 mm 和 10 mm 的圆孔光阑后 $z = 500 \text{ mm}$ 处横平面上的等光强图和等位相图. 由图知, 中心处拓扑电荷为 +1 的光涡旋不随光阑半径变化而消失. 振幅(光强)为零的暗区称为涡旋核^[15], 其大小随光阑半径增加而增大. 当半径较小时 ($a = 0.2 \text{ mm}$) 不存在刃型位错, 当半径增大到 $a \geq 4.39 \text{ mm}$ 时开始出现刃型位错.



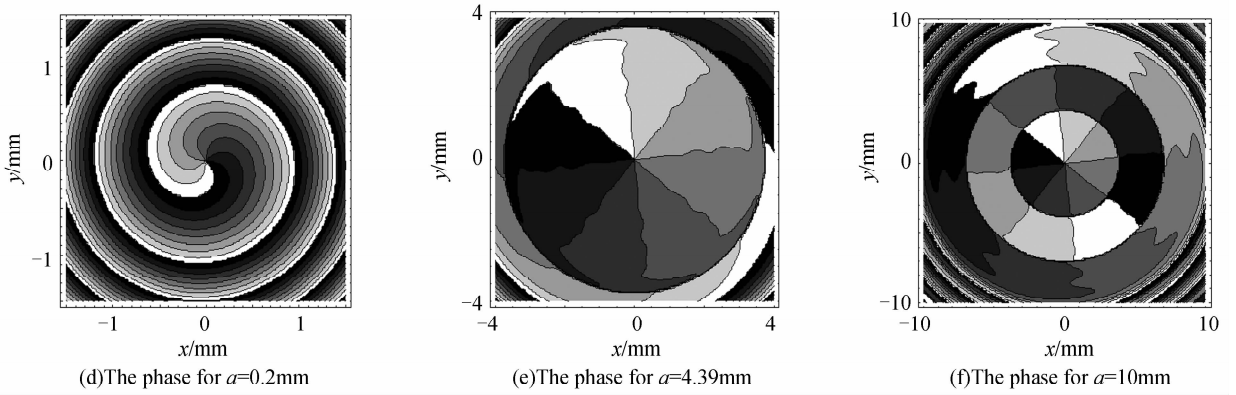


图2 一阶贝塞耳光束通过不同半径的圆孔光阑时的等光强图和等位相图

Fig. 2 Contour lines of the intensity and phase of a first-order Bessel beam propagating through a circular aperture for different values of the aperture radius

$a \rightarrow \infty$ 时,即对应于图1在自由空间传输情况,无衍射效应。

图3给出了1阶贝塞耳光束通过半径 $a=1\text{ mm}$ 的圆孔光阑后在 $z/z_0=0.6$ 和 15 处横平面上的等

光强图和等位相图, $z_0 = a^2/\lambda$ 为非涅尔距离^[12]。由图知,由于光阑衍射,光强和位相分布随传输距离而变化。中心处拓扑电荷为+1的涡旋始终存在,但涡旋核大小随传输距离的增加而增大。

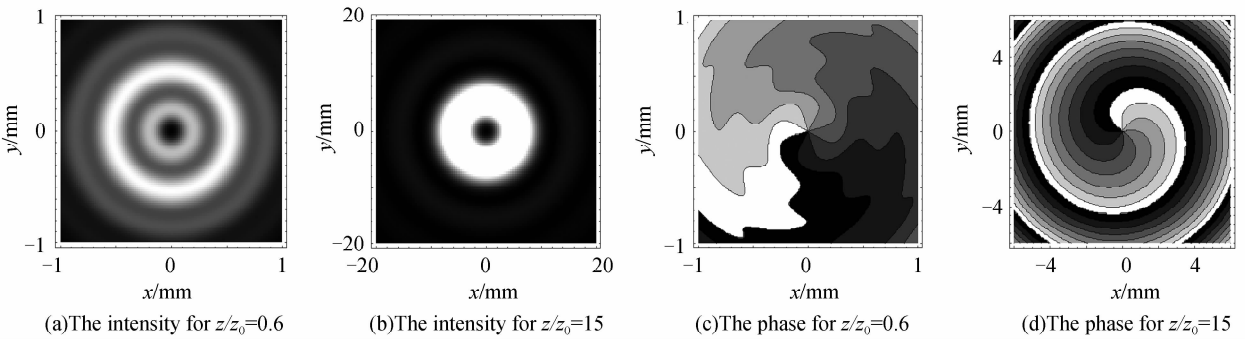


图3 一阶贝塞耳光束通过半径为 $a=1\text{ mm}$ 的圆孔光阑时在 z 处的等光强图和等位相图

Fig. 3 Contour lines of the intensity and phase of a first-order Bessel beam propagating through a circular aperture for different values of the propagation distance

图4为 $n=2$ 和 $n=3$ 的贝塞耳光束通过半径 $a=1\text{ mm}$ 的圆孔光阑后在 $z/z_0=15$ 处横平面上的等光强图和等位相图。比较图3(b)、(d)和图4知,

中心处光涡旋拓扑电荷分别为+1,+2和+3,涡旋核随 n 的增加而增大,绕着它逆时针旋转一周位相改变为 $2n\pi(n=1,2,3)$ 。

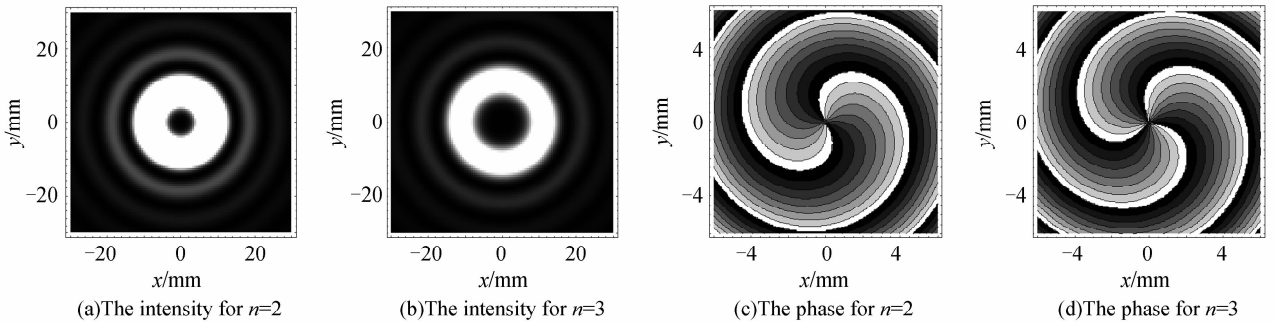


图4 高阶贝塞耳光束通过半径为 $a=1\text{ mm}$ 的圆孔光阑后在 $z/z_0=15$ 处的等光强图和等位相图

Fig. 4 Contour lines of the intensity and phase of higher-order Bessel beams propagating through a circular aperture

2.2 通过光阑透镜系统的传输

$$\text{对光阑透镜系统,} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-z/f & z \\ -1/f & 1 \end{pmatrix},$$

f 为透镜的焦距,代入式(7)得

$$E(r_2, \theta_2, z) = -\frac{ikE_0}{z} \exp(ikz) \exp(in\theta_2) \cdot$$

$$\sum_{j=1}^{10} A_j \left\{ \frac{1}{2(B_j a^{-2} - ik(1-z/f)/2z)} \cdot \exp \left[\frac{ik}{2z} r_2^2 - \frac{a^2 + (kr_2/z)^2}{4(B_j a^{-2} - ik(1-z/f)/2z)} \right] \cdot J_n \left[\frac{kar_2}{k(1-z/f) + 2iB_j z a^{-2}} \right] \right\} \quad (11)$$

式(11)为高阶贝塞耳光束通过光阑透镜系统传输的解析公式。

图5为1阶贝塞耳光束通过半径 $a=1\text{ mm}$ 的光阑透镜系统后不同面 $z/z_0=0.13, 0.5, 1,$ 和 5 处的等光强图和等位相图,取 $f=z_0$.由图知,中心处光涡旋不随传输距离而消失,拓扑电荷始终为 $+1$,但涡旋核大小会发生变化. $z/z_0=0.13$ 时圆刃型位错出现在 $r=0.08\text{ mm}$ 处(见图5(a,e)),当 $0.13<$

$z/z_0<1$ 时圆刃型位错消失(见图5(b,f)). $z/z_0=1$ 时出现在 $r=0.83\text{ mm}$ 处(见图5(c,g)), $z/z_0>1$ 时圆刃型位错消失(见图5(d,h)).图6给出了1阶贝塞耳通过光阑透镜系统后 $x-z$ 平面的等强度图,计算参量与图5相同.图6表明,整个传输距离中的光强分布在焦平面前是会聚的,焦平面后是发散的,空心区域也变大,这容易从正透镜对光束的会聚作用来理解。

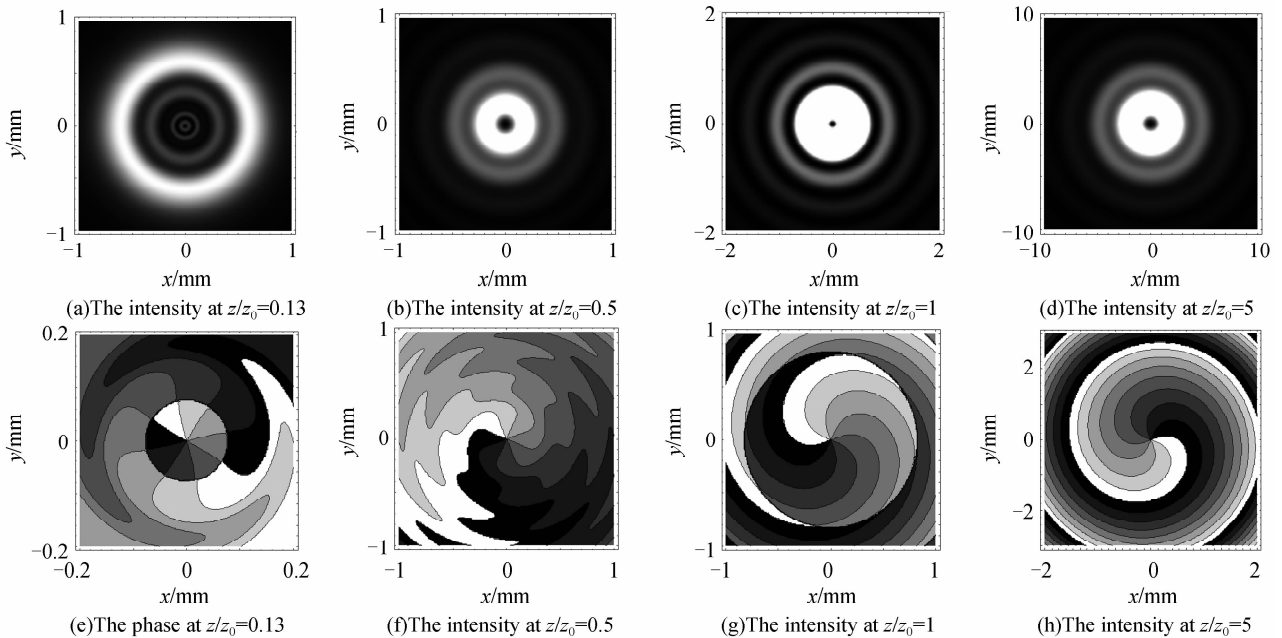


图5 一阶贝塞耳光束通过光阑透镜系统后不同传输距离的等光强图和等位相图

Fig. 5 Contour lines of the intensity and phase of a first-order Bessel beam propagating through an aperture lens system for different values of the propagation distance

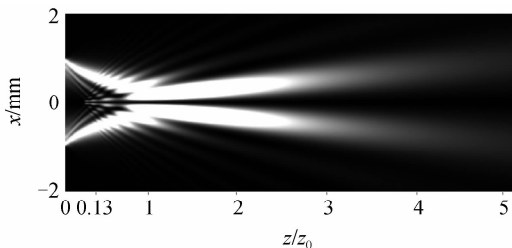


图6 一阶贝塞耳光束通过光阑透镜系统 $x-z$ 平面上的等强度图

Fig. 6 Contour lines of the intensity of a first-order Bessel beam propagating through an aperture lens system at the $x-z$ plane

3 结论

本文用将光阑窗口函数展开为有限个复高斯函数的方法,推导出了高阶贝塞耳光束通过有光阑近轴 $ABCD$ 光学系统传输的解析公式,用以研究了高阶贝塞耳光束通过圆孔光阑和光阑透镜系统后光强和位相的变化,以及位相奇点的演化特性.结果表明,高阶贝塞耳光束经光阑系统衍射后,中心光涡旋始终存在,拓扑电荷守恒,但涡旋核大小会随光阑半径、传输距离和光束阶数而变化.随光阑半径和传输

距离变化,圆刃型位错会消失或产生.虽然在传输公式的推导中使用了复高斯函数展开的近似方法,但与直接做数值积分的比较表明,在复高斯函数展开近似方法的适用范围内两者所得的结果一致,证实了所推解析公式的有效性。

参考文献

- [1] SOSKIN M S, VASNETSOV M V. Singular optics [M]// WOLF E. Progress in optics. Amsterdam: Elsevier, 2001, **42**: 219-276.
- [2] HECKENBERG N R, McDUFF R, SMITH C P, *et al.* Generation of optical phase singularities by computer-generated holograms[J]. *Opt Lett*, 1992, **17**(3): 221-223.
- [3] SCHWARZA U T, SOGOMONIAN S, MAIER M. Propagation dynamics of phase dislocations embedded in a Bessel light beam[J]. *Opt Commun*, 2002, **208**(4-6): 255-262.
- [4] FLOSSMANN F, SCHWARZ U T, MAIER M. Propagation dynamics of optical vortices in Laguerre-Gaussian beams[J]. *Opt Commun*, 2005, **250**(4-6): 218-230.
- [5] PATERSON C, SMITH R. Higher-order Bessel waves produced by axicon-type computer-generated holograms[J]. *Opt Commun*, 1996, **124**(1-2): 121-130.
- [6] ARLT J, DHOLAKIA K. Generation of high-order Bessel beams by use of an axicon[J]. *Opt Commun*, 2000, **177**(1):

- 297-301.
- [7] LEI Ming, YAO Bao-li. The explanation of Bessel-like beam from axicon with three-beam interference model [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2006, **35**(1):146-148.
雷铭,姚保利.用三光束干涉模型解释锥镜产生类贝塞尔光束[J]. *光子学报*, 2006, **35**(1):146-148.
- [8] LÜ Bai-da, ZHANG Bin, CAI Bang-wei. Studies of higher-order Bessel beams and their propagation characteristics[J]. *Acta Optica Sinica*, 1993, **13**(9):840-844.
吕百达,张彬,蔡邦维.高阶贝塞尔光束及其传输特性的研究[J]. *光学学报*, 1993, **13**(9):840-844.
- [9] ORLOV S, REGELSKIS K, SMILGEVICIUS V, *et al.* Propagation of Bessel beams carrying optical vortices[J]. *Opt Commun*, 2002, **209**(1):155-165.
- [10] FREUND I, SHVARTSMAN N. Wave-field phase singularities; the sign principle[J]. *Phys Rev A*, 1994, **50**(6):5164-5172.
- [11] COLLINS S A. Lens-system diffraction integral written in terms of matrix optics[J]. *JOSA*, 1970, **60**(9):1168-1171.
- [12] WEN J J, BREAZEAK M A. A diffraction beam field expressed as the superposition of Gaussian beams[J]. *JOSA*, 1988, **83**(5):1752-1756.
- [13] GRADSHTEYN I S, RYZHIK I M. Table of integrals, series, and products[M]. New York: Academic Press, 1980.
- [14] PALACIOS D M, MALEEV I D, MARATHAY A S, *et al.* Spatial correlation singularity of a vortex field[J]. *Phys Rev Lett*, 2004, **92**(14):143905.
- [15] LIU Pu-sheng, LÜ Bai-da. Propagation of gaussian background vortex beams diffracted at a half-plane screen[J]. *Opt & Laser Tech*, 2008, **40**(2):227-234.

Evolution of Phase Singularities of Higher-order Bessel Beam Diffracted by Aperture

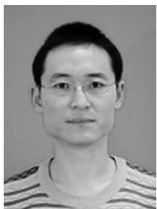
REN Xiang-gui, LÜ Bai-da

(*Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064, China*)

Received date: 2007-10-18

Abstract: The analytical expression for the propagation of higher-order Bessel beams through an aperture paraxial optical *ABCD* system was derived, which was used to study the evolution of phase singularities of a higher-order Bessel beam diffracted by an aperture. It shows that there always exists an optical vortex at the center of the diffracted higher-order Bessel beams and the topological change is conserved during the propagation, but the size of the vortex core varies with the aperture radius, propagation distance and beam number. Depending on the aperture radius and propagation distance, the circular edge dislocations may vanish or appear.

Key words: Singular optics; Higher-order Bessel beam; Diffraction by an aperture; Optical vortex; Circular edge dislocation



REN Xiang-gui was born in 1982. He graduated from Shandong Normal University in 2006. Now he is studying for the M. S. degree at Sichuan University, and his research interests focus on the propagation and transformation of laser beams.