

# 负折射介质中三阶非线性色散项对超短脉冲传输的影响\*

张海霞, 杨性愉

(内蒙古大学 物理科学与技术学院, 呼和浩特 010021)

**摘要:**采用分步傅里叶法研究了三阶非线性色散项对超短脉冲传输的影响. 通过模拟数值计算得出, 在德鲁德模型频率选取的一定范围内, 三阶非线性色散项对超短脉冲传输所造成的影响是不可忽略的. 结果表明: 三阶非线性色散项系数取负值时, 在正常色散区超短脉冲不对称展宽, 脉冲中心向前沿偏移; 在零色散点超短脉冲不对称展宽程度加剧并在脉冲前沿形成振荡, 脉冲中心向前沿偏移; 在反常色散区超短脉冲不对称变窄, 脉冲中心仍向前沿偏移.

**关键词:**负折射介质; 三阶非线性色散项; 分步傅里叶法

**中图分类号:** O437

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1004-4213(2009)12-3133-5

## 0 引言

负折射介质指的是介电常量  $\epsilon$  和磁导率  $\mu$  同时为负的介质, 于 1968 年由物理学家 Veselago<sup>[1]</sup> 提出. 由于自然界中一直没有发现存在负折射介质, 所以在当时没有引起足够的重视. 2000 年美国加州大学 Smith 等人<sup>[2]</sup> 在实验上人工合成了在微波波段介电常量和磁导率均为负的材料, 这种材料表现出很多正常介质没有的特性从而引起很多人的关注, 例如: 逆 Doppler 频移, 反常 Cerenkov 现象<sup>[1]</sup>, 反常菲涅尔公式和布儒斯特定律<sup>[3]</sup> 的出现. 在负折射介质中, 相速度和群速度的传播方向是相反的, 所以它满足左手定则, 因此也称为左手材料.

近几年来, 随着对负折射介质不断深入的研究, 呈现出许多新颖的光学特性, 应用前景非常广泛, 例如可利用负折射介质形成“完美透镜”<sup>[4]</sup>, 波传感<sup>[5]</sup> 等. 关于超短脉冲在负折射介质中传输方面, 文双春<sup>[6]</sup> 等人建立了几个光学周期超短脉冲在负折射介质中的传输方程, 并确认了色散磁导率  $\mu(\omega)$  对脉冲传输的影响; 杨性愉<sup>[7]</sup> 等人用分步傅里叶法着重研究了负折射介质中二阶非线性色散项等各项对超短脉冲传输的影响.

本文更进一步推导出三阶非线性色散项所满足的公式, 并在负折射介质的不同色散区利用分步傅里叶法<sup>[8]</sup> 研究三阶非线性色散项对超短脉冲传输所造成的影响. 结果表明: 在正常色散区, 三阶非线性色散项使脉冲不对称展宽; 在色散点, 三阶非线性色散项使脉冲不对称展宽程度加剧, 并在脉冲前沿形

成一个振荡, 振荡的程度随着传输距离的增加而增大; 在反常色散区, 三阶非线性色散项使脉冲不对称变窄; 重要的是, 在三个色散区均出现脉冲中心不同程度的向前沿偏移的现象, 该现象与负折射介质中自陡项系数取负值时对脉冲传输造成的影响很类似. 另外, 三阶非线性色散项系数  $s_3$  的选取也会影响超短脉冲的传输.

## 1 理论模型

考虑在具有三阶极化非线性的各向同性的均匀介质中, 电场  $E$  沿  $Z$  方向传输, 在  $x$  方向偏振, 采用移动坐标系:  $T = t - z/v_g$ ,  $Z = z$ , 其中  $v_g$  是群速度.

适用于超短脉冲包络  $A$  的传输方程为<sup>[9-10]</sup>

$$\frac{\partial A}{\partial Z} = i \sum_{m=2}^{\infty} \frac{i^m \beta_m}{m!} \frac{\partial^m A}{\partial T^m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{m+1} \gamma_m}{m!} \left( 1 + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial T} \right) \cdot \frac{\partial^m}{\partial T^m} (|A|^2 A) + \frac{i}{2\beta_0} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial Z^2} - \frac{2}{v_g} \frac{\partial^2 A}{\partial T \partial Z} \right) \quad (1)$$

式中  $\beta_m$  是  $m$  阶色散系数,  $\gamma_m = m! \omega_0 \epsilon_0 \chi^3 \Xi_m / 2\beta_0$  是非线性系数,  $\Xi_m = \partial^m [\omega \mu(\omega)] / (m! \partial \omega^m) |_{\omega=\omega_0}$ ,  $\chi^3$  为三次非线性电极化率. 近似为

$$\frac{\partial^2 A}{\partial Z^2} \approx i\gamma_0 (|A|^2 A), \quad \frac{\partial^2 A}{\partial T \partial Z} \approx$$

$$i\gamma_0 \frac{\partial}{\partial T} (|A|^2 A)$$

方程(1)变成

$$\frac{\partial A}{\partial Z} = i \sum_{m=2}^{\infty} \frac{i^m \beta_m}{m!} \frac{\partial^m A}{\partial T^m} + i\gamma_0 [ |A|^2 A - \sigma |A|^4 A + iS_1 \frac{\partial}{\partial T} (|A|^2 A) - S_2 \frac{\partial^2}{\partial T^2} (|A|^2 A) - iS_3 \frac{\partial^3}{\partial T^3} (|A|^2 A) ] \quad (2)$$

式中  $\sigma = \gamma / (2\kappa_0)$ ,  $S_1 = \frac{1}{\omega_0} - (k_0 V)^{-1} + \frac{r_1}{\gamma_0}$ ,

\* 国家自然科学基金(60468001)资助

Tel: 0471-4990779

Email: 116730037@qq.com

收稿日期: 2008-12-05

修回日期: 2009-03-02

$$S_2 = \frac{\gamma_1}{(\omega_0 \gamma_0)} - \frac{\beta_2}{(4\kappa_0)} + \frac{\gamma_2}{(2\gamma_0)},$$

$$S_3 = \frac{\gamma_2}{(2\omega_0 \gamma_0)} - \frac{\beta_3}{(12\kappa_0)} + \frac{\gamma_3}{(6\gamma_0)}$$

对  $m$  考虑到三阶, 其中色散考虑到二阶, 对方程进行归一化, 假设  $\tau = T/T_0$ ,  $\zeta = Z/L_D$ ,  $u = A/A_0$ , 其中  $A_0$  为初始脉冲振幅, 并且定义  $L_D = T_0^2/|\beta_2|$  为群速度色散长度,  $L_{NL} = 1/(\gamma_0 A_0^2)$  为非线性长度,  $L_{SNL} = 1/(\gamma_0 A_0^4 \sigma)$  为饱和非线性长度,  $L_{SS1} = T_0/(\gamma_0 A_0^2 S_1)$  为自陡长度,  $L_{SS2} = T_0/(\gamma_0 A_0^2 S_2)$  为由色散磁导率导致的二阶非线性色散长度,  $L_{SS3} = T_0/(\gamma_0 A_0^2 S_3)$  为由色散磁导率导致的三阶非线性色散长度. 方程(2)转化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \zeta} = & -\frac{i \operatorname{sgn}(\beta_2)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + iN[|u|^2 u - \\ & p|u^4|u + is_1 \frac{\partial}{\partial \tau} (|u|^2 u) - s_2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (|u|^2 u) - \\ & is_3 \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} (|u|^2 u)] \end{aligned} \quad (3)$$

式中  $p = L_{NL}/L_{SS1} = 1/(2\beta_0 L_{NL})$  为五阶非线性系数,  $N = L_D/L_{NL}$  为孤子阶数,  $s_1 = L_{NL}/L_{SS1}$  为自陡系数,  $s_2 = L_{NL}/L_{SS2}$  为二阶非线性色散系数,  $s_3 = L_{NL}/L_{SS3}$  为三阶非线性色散系数. 当超短脉冲传输距离大于三阶非线性色散长度时, 须考虑三阶非线性色散项对超短脉冲传输的影响. 在本文中三阶非线性色散长度体现在三阶非线性色散项系数  $s_3$  的选取上, 而  $s_3$  是由德鲁德模型与初始脉宽共同决定. 利用 Drude 模型<sup>[11]</sup> 推导该项系数方程

$$\mu(\omega) = \mu_0 \left[ 1 - \frac{\omega_{pm}^2}{\omega^2} \right], \quad \epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left[ 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right]$$

式中  $\omega_{pm}$ ,  $\omega_{pe}$  为磁场和电场等离子体频率. 不考虑 Drude 模型损耗的情况下, 三阶非线性色散项系数方程为

$$s_3 = -\frac{s^3 \omega_{pm}^2 \omega_{pe}^2}{n^2 \omega_0^4} \quad (4)$$

式中  $s = 1/(\omega_0 T_0)$ , 根据系数方程(4)可得参量图 1.

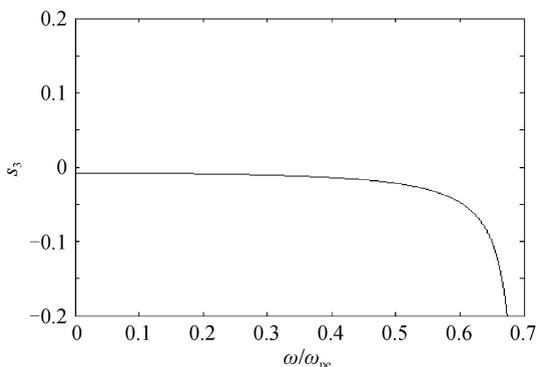


图 1  $\omega_{pm}/\omega_{pe} = 0.7$ ,  $s_3$  随  $\omega/\omega_{pe}$  的变化关系

Fig. 1  $\omega_{pm}/\omega_{pe} = 0.7$ ,  $s_3$  with the changes  $\omega/\omega_{pe}$

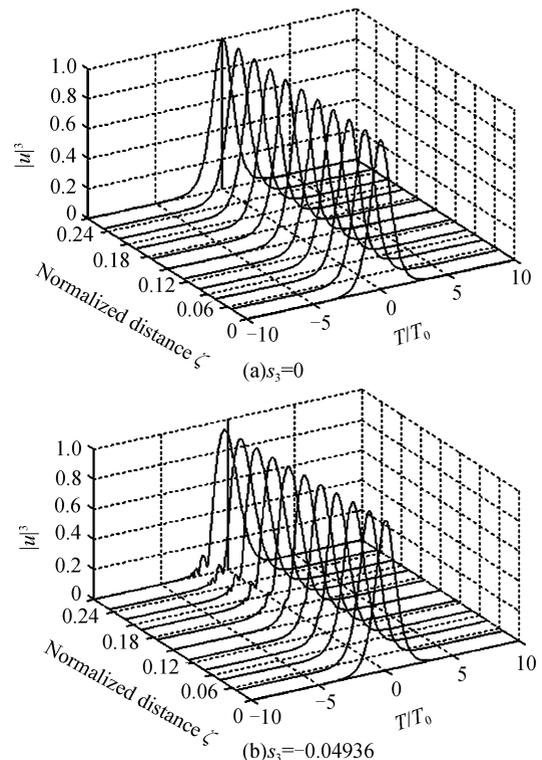
从图 1 可知, 三阶非线性色散项系数  $s_3$  在整个取值范围内为负值, 取值的不同会对超短脉冲的传输造成不同的影响. 经过计算得出, 在以德鲁德模型为基础的前提下, 当  $\omega_{pm}/\omega_{pe} = 0.7$  时, 在  $\omega/\omega_{pe} < 0.26$  的情况下, 三阶非线性色散项系数  $s_3 \leq -0.01$  时, 对超短脉冲传输的影响可忽略; 若  $\omega/\omega_{pe} > 0.26$ , 三阶非线性色散项系数  $s_3 > -0.01$  时则须考虑三阶非线性色散项对超短脉冲传输的影响.

## 2 模拟结果以及分析

采用分步傅里叶法求解式(3), 研究负折射介质中三阶非线性色散项  $s_3$  对超短脉冲传输的影响, 为确保计算结果准确性, 本文研究传输距离仅约为 1/5 孤子周期, 并将步长选在 1/200000, 窗口宽为 20, 窗口分割选为  $2^{11}$ , 输入脉冲形式  $u(\zeta, \tau) = N \operatorname{sech} h(\tau)$ , 令  $N=1$ , 初始脉宽  $\tau = 50$  fs, 如图(2)~(5).

### 2.1 考虑零色散点时, 自相位调制与三阶非线性色散项 $s_3$ 对超短脉冲传输的影响

从图 2(a)可知, 在零色散点时, 只考虑自相位调制, 由于传输距离较短, 脉冲形状几乎不发生改变, 仍然维持孤子的传输. 图 2(b)在(a)的基础上加入三阶非线性色散项  $s_3$ , 发现与(a)相比脉冲不对称展宽并在脉冲前沿形成一个振荡, 随着传输距离的增加振荡越来越剧烈, 脉冲中心向前沿偏移. 说明在零色散点, 在较短传输距离内, 色散和自相位调制所起作用均可忽略的情况下, 脉冲明显的不对称展宽



(b)  $s_3 = -0.04936$

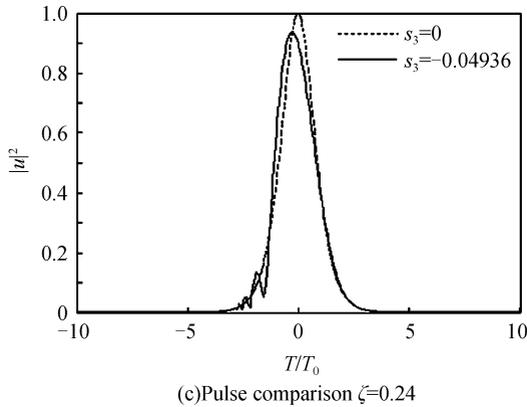


图 2 在零色散点,考虑自相位和三阶非线性色散项  $s_3$   
Fig. 2 In zero dispersion, considering self-phase modulation and third-order nonlinear dispersion  $s_3$

说明三阶非线性色散项  $s_3$  影响了超短脉冲的传输,而脉冲展宽说明当  $s_3 < 0$  时所致啁啾为上啁啾.图 2(c)选取图 2(a),(b)在归一化传输距离  $\zeta=0.24$  的脉冲作比较,由于三阶非线性色散项系数  $s_3$  取负值,从图 2(c)图可知,随着  $|s_3|$  的逐渐增大,脉冲展宽会更加明显,振荡也会更加剧烈,三阶非线性色散项破坏了孤子脉冲稳定的传输,影响了脉冲传输的质量.

### 2.2 正常色散区,三阶非线性色散项 $s_3$ 对超短脉冲传输的影响

首先在正常色散区,考虑自相位调制与三阶非线性色散项  $s_3$  对超短脉冲传输的影响.

从图 3(a)可知,在正常色散区只考虑自相位调制,脉冲对称展宽,因为在正常色散区,色散和自相位调制均为上啁啾.图 3(b)在(a)图的基础上加入

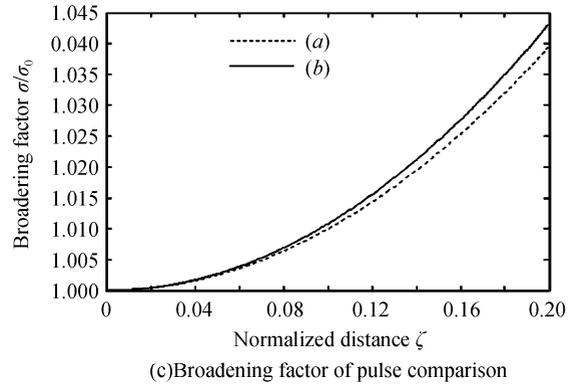
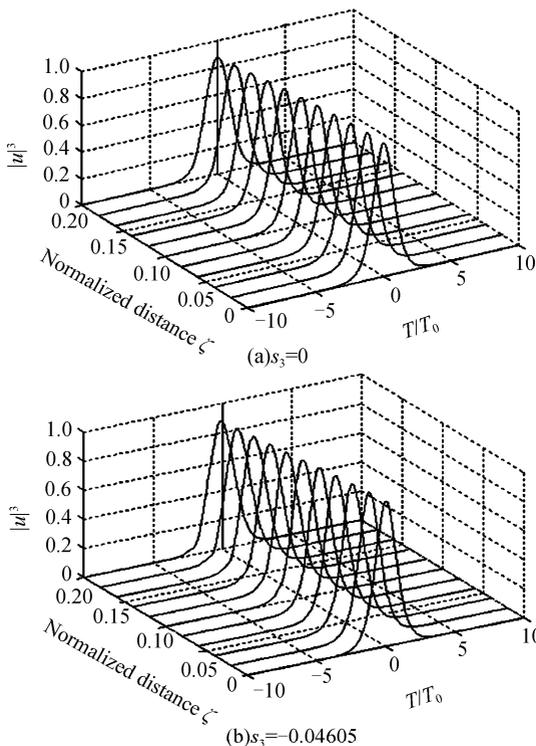


图 3 正常色散区,考虑自相位和三阶非线性色散项  $s_3$   
Fig. 3 In normal dispersion, considering self-phase modulation and third-order nonlinear dispersion  $s_3$

三阶非线性色散项  $s_3$ ,发现与(a)图相比脉冲有较小程度的展宽,而且脉冲中心向前沿偏移的程度较小.因为当色散项起作用时,三阶非线性色散项对超短脉冲传输的影响会大大减小,所以三阶非线性色散项在正常色散区对超短脉冲传输的影响要远小于对零色散点的影响.为了能更直观看出三阶非线性色散项  $s_3$  对超短脉冲传输的影响,求出脉冲展宽因子

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{[\langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2]^{1/2}}{[\langle T_0^2 \rangle - \langle T_0 \rangle^2]^{1/2}} \quad (5)$$

展宽因子随距离传输的变化如图 3(c),随着  $|s_3|$  的增大,脉冲展宽程度会逐渐增大,而且传输距离对超短脉冲传输的影响也不容忽视.可以看出随着传输距离的增大,约从  $\zeta=0.06$  以后,展宽趋势也越来越明显,为着重分析三阶非线性色散项系数  $s_3$  对超短脉冲传输的影响,本文仅研究传输距离大约在  $1/5 \sim 1/4$  的孤子周期.

其次在正常色散区,综合考虑超短脉冲传输方程(3)中各项对超短脉冲传输的影响,即自相位调制,自陡项  $s_1$ ,二阶非线性色散项  $s_2$ ,三阶非线性色散项  $s_3$  及五阶非线性项  $p$  对超短脉冲传输的影响.

从图 4 可知,脉冲中心向前沿偏移程度较大,这

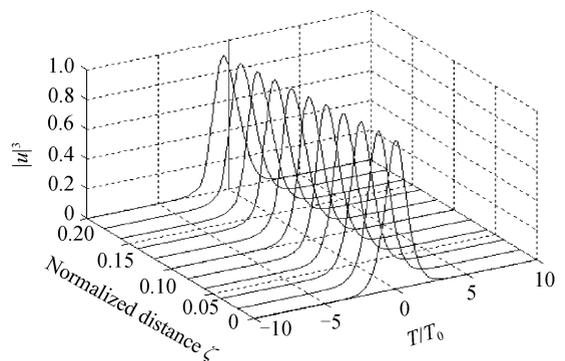


图 4 正常色散区,  $s_1=-0.39075, s_2=-0.06174, s_3=-0.02945, p=-0.02181$   
Fig. 4 In normal dispersion,  $s_1=-0.39075, s_2=-0.06174, s_3=-0.02945, p=-0.02181$

是由自陡项与三阶非线性色散项均取负值的结果;脉冲展宽程度较小,是由于在正常色散区二阶非线性色散项起到了下啁啾的作用,抵消一部分由色散,自相位,三阶非线性色散项  $s_3$  以及五阶非线性项  $p$  所致的上啁啾对脉冲传输造成的影响.

### 2.3 反常色散区,考虑三阶非线性色散项对超短脉冲传输的影响

从图 5 可知,图(a)表示在反常色散区,考虑自相位和三阶非线性色散项,与只有自相位相比(因为在反常色散区,只考虑自相位时,脉冲形状不变,维持孤子的传输),脉冲有窄化趋势,可窄化程度并不明显,脉冲中心向前沿稍有偏移;从比较图(b)上看,三阶非线性色散项使脉冲窄化,说明其所致啁啾为上啁啾,脉冲后沿变窄,前沿展宽,使脉冲中心向前沿偏移.

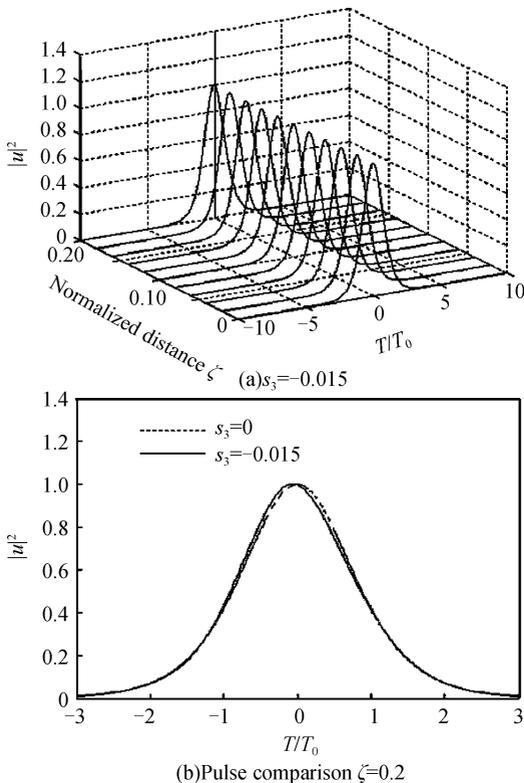


图 5 反常色散区,自相位和三阶非线性色散项  $s_3$   
Fig. 5 In anomalous dispersion, considering self-phase modulation and third-order nonlinear dispersion  $s_3$

## 3 结论

采用分步傅里叶数值模拟方法来求解广义非线性薛定谔方程,在负折射介质的三个色散区分别考虑三阶非线性色散项  $s_3$  对超短脉冲传输的影响.在零色散点,三阶非线性色散项使脉冲不对称展宽并在脉冲前沿形成振荡,且振荡程度随着传输距离的增大而增大;在正常色散区,三阶非线性色散项使脉冲展宽,可展宽程度较小;在反常色散区,三阶非线

性色散项使脉冲窄化.重要的是,在三个色散区均出现了脉冲中心不同程度的向前沿偏移的现象.该现象与负折射介质中自陡项系数取负值时对脉冲传输造成的影响很类似.在正常色散区和零色散点时三阶非线性色散项与高阶线性色散项  $\beta_3$  对脉冲传输的影响也很类似.在反常色散区则有明显不同,三阶非线性色散项使脉冲趋于窄化,而线性色散项  $\beta_3$  却使脉冲不对称展宽.这是因为二者虽均为高阶色散项,线性色散项  $\beta_3$  是从色散角度考虑其影响,而三阶非线性色散项是从非线性角度来进行研究.总的来说,三阶非线性色散项使脉冲发生了形变,影响了超短脉冲传输的质量,而且影响程度与三阶非线性色散项系数的选取有直接关系.结果表明:三阶非线性色散项系数  $s_3 \leq -0.01$  时,它对超短脉冲传输的影响是可忽略的;当  $s_3 > -0.01$  时,对超短脉冲传输的影响是必须考虑的.在选取系数过程中,要尽量避免三阶非线性色散项对超短脉冲传输所造成的影响.本文的结论可为在负折射介质中的不同色散区能稳定且高质量的传输脉冲提供新的理论依据,更进一步加深了对负折射介质中超短脉冲传输特性的认识.

### 参考文献

- [1] VESELAGO V G. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$ [J]. *Sov Phys Uspe*, 1968, **10**(4):509-514.
- [2] SMITH D R, PADILLA W J, VIER D C, *et al.* Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity[J]. *Phys Rev Lett*, 2000, **84**(18):4184-4187.
- [3] TIAN Xiu-lao. Fresnel Formulate and Brewster Law of optical waves in the left-handed materials[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2006, **35**(7):1103-1106.  
田秀劳. 光波在左手材料中的菲涅尔公式和布儒斯特定律[J]. *光子学报*, 2006, **35**(7):1103-1106.
- [4] PENDRY J B. Negative refraction makes a perfect lens[J]. *Phys Rev Lett*, 2000, **85**(18):3966-3969.
- [5] DI Yue-miao, WANG Xiao-ping, XIAO Bing-gang. Negative refractive index materials for the characteristics of SAW sensor [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2007, **36**(2):328-331.  
邸岳淼, 王晓萍, 肖丙刚. 负折射率材料用于表面波传感器的特性分析[J]. *光子学报*, 2007, **36**(2):328-331.
- [6] WEN S C, WANG Y W, XIANG Y J, *et al.* Modulation Instability in nonlinear negative-index material[J]. *Phys Rev E*, 2006, **73**(3):6617-6622.
- [7] ZHANG Hai-xia, YANG Xing-yu. Propagation property of ultra-short pulse with the method of Split-Step Fourier in negative refractive media[J]. *Laser and Infrared*, 2008, **38**(9):916-920.  
张海霞, 杨性愉. 用分布傅里叶法研究负折射介质中超短脉冲的传输特性[J]. *激光与红外*, 2008, **38**(9):916-920.
- [8] AGRAWAL G P. Nonlinear fiber optics & applications of nonlinear fiber optics[M]. TJA Dong-fang, YU Zhen-hong,

- TAN Bin, transl. 3rd ed. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2002: 34- 35.
- 艾格若瓦 G P. 非线性光纤光学原理及应用[M]. 贾东方, 余震红, 谈斌译. 第三版. 北京: 电子工业出版社, 2002: 34- 35.
- [9] WEN S C, WANG Y W, XIANG Y J, *et al.* Role of the anomalous self-steepening effect in modulation instability in negative-index material[J]. *Opt Exp*, 2006, **14**(4): 1568-1575.
- [10] LIU Hai-lan, WEN Shuang-chun, XIONG Min, *et al.* Formation and propagation of dark solitons in metamaterials [J]. *Acta Physica Sinica*, 2007, **56**(11): 6473- 6477.
- 刘海兰, 文双春, 熊敏, 等. 超常介质中暗孤子的形成和传输特性研究[J]. *物理学报*, 2007, **56**(11): 6473 -6477.
- [11] FANG Rong-chuan. Solid spectroscopy[M]. Hefei. Publishing House of University of Science and Technology of China, 2001: 15-17.
- 方容川. 固体光谱学[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2001: 15- 17.

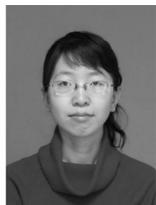
## Impact of Ultra-short Pulse Propagation with Third-order Nonlinear Dispersion in Negative Refractive Media

ZHANG Hai-xia, YANG Xing-yu

(School of Physical Science and Technology, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China)

**Abstract:** The split-step Fourier method is used to simulate the impact of ultra-short pulse with third-order nonlinear dispersion. In the frequency of Drude model of selecting certain range, the impact of third-order nonlinear dispersion to ultra-short pulse can not be ignored by numerical calculating. When third-order nonlinear dispersion is negative, the results show that in the normal dispersion, ultra-short pulse is wide asymmetric and pulse central drifts to the forefront; in zero dispersion, the degree of asymmetry broadening of ultra-short pulse increases and the center of pulse which drifts to the forefront had a oscillation only in the forefront of pulse. In anomalous dispersion, ultra-short pulse is asymmetry narrow, the central of pulse also drifted to the forefront.

**Key words:** Negative refractive media; Third-order dispersion; Split-step Fourier method



**ZHANG Hai-xia** was born in 1983. She graduated from Inner Mongolia Normal University in 2006. Now She is a postgraduate at School of Physical Science and Technology of Inner Mongolia University. Her research interests focus on fields of nonlinear optics and the property propagation of ultra-short pulse in negative refractive media.