

超短脉冲高斯光束在线性色散介质中的远场特性*

郑 振 吕百达

(四川大学激光物理与化学研究所, 成都 610064)

摘 要 基于瑞利-索末菲衍射积分公式, 在未作近轴近似的条件下, 推导出等束宽超短脉冲高斯光束通过线性色散介质的远场公式, 并用于研究其远场特性, 所得公式可用于大衍射角情况. 结果表明, 等束宽脉冲高斯光束的频谱上存在一临界角, 小于临界角时, 出现蓝移; 大于临界角时, 出现红移, 红移量随着衍射角的增大而增大. 而脉冲波形将经历时间移动, 移动量随衍射角的增大而增大; 远场高斯脉冲波形将不再保持不变. 此外, 群速度色散将引起啁啾, 啁啾量随衍射角的增大而减小.

关键词 超短脉冲技术; 脉冲高斯光束; 远场特性; 线性色散介质; 瑞利-索末菲衍射积分

中图分类号 O435 **文献标识码** A

0 引言

随着超短脉冲特别是飞秒脉冲技术的出现和迅速发展, 对飞秒脉冲光束的传输变换研究引起了广泛兴趣. 对飞秒脉冲在自由空间传输过程中由于时空耦合特性引起的时间延迟、脉冲展宽、红移等以及在线性、非线性色散介质中的传输特性已作了许多的研究^[1-6]. 例如, Melamed 等采用鞍点渐近法研究了等衍射长度脉冲光束的远场传输特性, 分析了色散效应对脉冲光束的影响^[2]; Porras 得到了单周期脉冲光束在线性色散介质中传输的特解, 对等衍射长度高斯脉冲光束作了分析^[5].

本文从瑞利-索末菲衍射积分公式出发, 推导出了任意超短脉冲光束在线性色散介质中作远场近似下的传输公式, 分析了等束宽脉冲高斯光束在线性色散介质中的远场特性.

1 超短脉冲光束在线性色散介质中的远场公式

超短脉冲光束在线性色散介质中传输时, 其每一傅里叶谱都满足瑞利-索末菲衍射积分公式^[7]

$$E(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{1}{2\pi} \int E^0(\mathbf{r}_0, \omega) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{-iks}}{s} \right) d^2\mathbf{r}_0 \quad (1)$$

式中 $s = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, 0)$ 是入射面上的一点, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 是出射面上的任一点. $E^0(\mathbf{r}_0, \omega)$ 是入射面上脉冲的傅里叶单色分量, k 是波数. 将 s 展为级数, 保留一次项和二次项, 即

$$s \approx r + \frac{x_0^2 + y_0^2 - 2(xx_0 + yy_0)}{2r} \quad (2)$$

式中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 将式(2)代入式(1)中的指数项, 而其他项中的 s 以 r 代替, 并当 $ks \gg 1$ 时, 式(1)化为

$$E(\mathbf{r}, \omega) = \frac{ik \cos \theta e^{-i\omega r}}{2\pi r} \iint E^0(\mathbf{r}_0, \omega) \cdot \exp \left[-\frac{ik}{2r} (x_0^2 + y_0^2 - 2xx_0 - 2yy_0) \right] d^2\mathbf{r}_0 \quad (3)$$

式中 $\cos \theta = z/r$, θ 是衍射角. 假定入射面 $z=0$ 处 $E^0(\mathbf{r}_0, \omega)$ 具有高斯形状分布的光束, 而脉冲时间波形是任意的, 令

$$E^0(\mathbf{r}_0, \omega) = \exp \left(-\frac{x_0^2 + y_0^2}{2a^2} \right) S(\omega) \quad (4)$$

式中 a 是束腰宽度, 设为与频率无关^[4]. $S(\omega)$ 是脉冲的频谱. 将式(4)代入式(3), 计算并整理得

$$E(\mathbf{r}, \omega) = S(\omega) \frac{i z_R \cos \theta}{r + i z_R} \exp(-ikr) \cdot \exp \left[-\frac{k^2 a^2 r \sin^2 \theta}{2(r + i z_R)} \right] \quad (5)$$

式中 $z_R = ka^2$ 为瑞利长度. 作远场近似 ($r \gg z_R$), 并令 $k = \beta(\omega) = n(\omega)\omega/c$ 为色散介质中的传输常量, c 为真空中的光速, 由式(5)得到

$$E(\mathbf{r}, \omega) = S(\omega) \frac{i\beta a^2 \cos \theta}{r} \exp(-i\beta r) \cdot \exp \left(-\frac{\beta^2 a^2 \sin^2 \theta}{2} \right) \quad (6)$$

对几个光周期的脉冲, 当其载频远离介质的共振频率且较为平滑时, 可将传输常量 $\beta(\omega)$ 在载频 ω_0 附近展开为泰勒级数并作二阶近似^[8]

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta_2(\omega - \omega_0)^2 \quad (7)$$

式中^[9] $\beta_n = (d^n \beta / d\omega^n) |_{\omega=\omega_0}$, $n=0, 1, 2$, $\beta_1 \equiv 1/v_g$, v_g 为群速度, β_2 描述群速度色散. 将式(7)代入式(6), 作逆傅里叶变换, 同时引进一无量纲变量 $\hat{\omega} = (\omega - \omega_0)T$ (T 是入射脉冲的脉宽), 得到任意波形的

* 国家自然科学基金(NO. 10574097)资助
Tel: 028-85412819 Email: jenster1@163.com
收稿日期: 2005-06-30

超短脉冲光束在线性色散介质中的远场公式

$$E^+(\mathbf{r}, t) = A^+(\mathbf{r}, \tau) \exp [i(\beta_0 r - \omega_0 t)] \quad (8)$$

$$A^+(\mathbf{r}, \tau) = \frac{\cos \theta}{2\pi i r} \int_{-\infty}^{\infty} (\beta a^2) \exp (i \frac{\beta_2 r}{2T^2} \hat{\omega}^2 - \frac{1}{2} \beta^2 a^2 \sin^2 \theta - i \hat{\omega} \tau) S(\hat{\omega}) d \hat{\omega} \quad (9)$$

式中 $\tau = (t - \beta_1 r) / T$ 是“归一化当地时间”，为一无量纲的参量。可以看出，本文通过瑞利衍射积分公式推导出的式(8)和式(9)与文献[4]采用角谱法和稳相原理得到的式(9)和式(12)一致。但是，与文献[4]重点研究在色散介质中的展宽因子不同。本文将在式(9)的基础上对等束宽高斯脉冲光束在线性色散介质中的远场特性，包括功率谱频谱移动、脉冲时间移动，以及啁啾等进行深入研究。

2 等束宽高斯脉冲光束

设脉冲波形为高斯函数^[10,11]，即

$$f(t) = \exp [-(a_g \frac{t}{T})^2] \cos (\omega_0 t) \quad (10)$$

式中 $a_g = \sqrt{2 \ln 2}$, $T = m 2\pi / \omega_0$, 参量 m 定义为脉冲宽度内所包含的振荡周期数，该脉冲包络的傅里叶频谱为

$$S(\omega) = \frac{\sqrt{\pi} T}{a_g} \exp [-\frac{T^2 (\omega - \omega_0)^2}{4 a_g^2}] \quad (11)$$

将式(7)、(11)代入式(9)计算得到等束宽高斯脉冲光束在线性色散介质中传输的远场公式

$$A^+(\mathbf{r}, \tau) = A_1 \exp (-A_2) \sqrt{\frac{4\pi}{\xi - \eta i}} (1 + i d_1 \frac{d}{d\tau}) \exp [-\frac{(\tau - i\tau_s)^2}{\xi - \eta i}] \quad (12)$$

式中

$$A_1 = \frac{\cos \theta a^2 \beta_0}{2\sqrt{\pi} i r a_g}, A_2 = \frac{1}{2} \beta_0^2 a^2 \sin^2 \theta \quad (13a)$$

$$\xi = (1/a_g^2) + 4A_2 d_1^2, \eta = 2\beta_0 r d_2 \quad (13b)$$

$$d_1 = \frac{\beta_1}{\beta_0 T}, d_2 = \frac{\beta_2}{\beta_0 T^2}, \tau_s = 2A_2 d_1,$$

$$\frac{d(\cdot)}{d\tau} \text{ 表示求导} \quad (13c)$$

在式(12)推导中未用近轴近似，因而可用于大衍射角情况。由式(12)知：自变量 τ 存在着依赖于空间变量 θ 的复数时间移动 τ_s ，其物理意义是导致脉冲频谱移动和脉冲时间移动^[4]。从式(6)、(7)、(11)得到与式(12)相应的傅里叶谱

$$E^+(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\cos \theta \sqrt{\pi} T}{i r a_g} (\beta a^2) \exp (i \beta r - \frac{1}{2} \beta^2 a^2 \sin^2 \theta) \exp [-\frac{T^2 (\omega - \omega_0)^2}{4 a_g^2}] \quad (14)$$

图 1 为用式(14)给出在融石英中^[5]当 θ 取不同值， $z = 100 \text{ mm}$ (约为 $12z_R$) 时的脉冲高斯光束的功率谱 $|E^+(\mathbf{r}, \omega)|^2$ 。计算参量： $\theta = 0^\circ, 2^\circ, 4^\circ, 8^\circ, 12^\circ, 20^\circ$, $z = 100 \text{ mm}$, $\omega_0 = 1.9 \text{ fs}^{-1}$, $\beta_0 = 9193 \text{ mm}^{-1}$, $\beta_1 = 4881 \text{ mm}^{-1} \text{ fs}$, $\beta_2 = 21.78 \text{ mm}^{-1} \text{ fs}^2$, $a = 0.03 \text{ mm}$, $m = 5$ 。

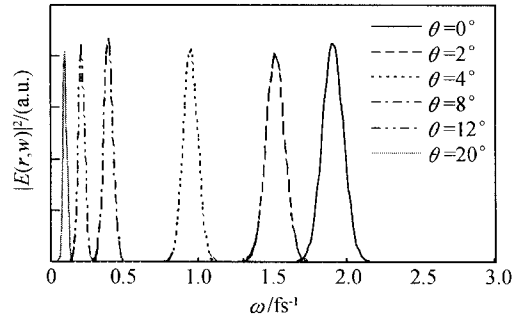


图 1 当 θ 取不同值时等束宽脉冲高斯光束远场的功率谱
Fig. 1 Power spectra of pulsed Gaussian beams with different diffraction angles in the far field

可以看出，移动量随着衍射角 θ 的增加而增加。定义频谱的移动量为^[5]

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} |E^+(\mathbf{r}, \omega)|^2 (\omega - \omega_0) d\omega / \int_{-\infty}^{\infty} |E^+(\mathbf{r}, \omega)|^2 d\omega \quad (15)$$

利用

$$\beta^2 \approx \beta_0^2 [1 + 2 \frac{\beta_1}{\beta_0} (\omega - \omega_0) + \frac{\beta_1^2 + \beta_0 \beta_2}{\beta_0^2} (\omega - \omega_0)^2] \quad (16)$$

将式(14)、(16)代入式(15)计算得

$$\Delta = \frac{(-2q_1 q_3 + q_3^2 q_4) \sin^4 \theta + (-2q_2 q_3 + 2q_1 q_4) \sin^2 \theta + 2q_2 q_4}{(4q_1^2 - 2q_1 q_3 q_4) \sin^4 \theta + (8q_1 q_2 - 2q_2 q_3 q_4) \sin^2 \theta + 4q_2^2} \quad (17)$$

式中

$$q_1 = a^2 (\beta_1^2 + \beta_0 \beta_2); q_2 = T^2 / 2a_g^2 \quad (18a)$$

$$q_3 = 2a^2 \beta_0 \beta_1; q_4 = 2\beta_1 / \beta_0 \quad (18b)$$

由式(17)知：频谱移动量 Δ 与初始脉冲周期、束腰宽度、衍射角和色散介质中的传输常量有关。 Δ 随衍射角的关系可以更清楚地从图 2 看出。子图为 Δ 在 $\theta = 0^\circ$ 附近的局部放大。由子图知：存在一临界角 θ_c ，当 $\theta = \theta_c$ 时，有 $\Delta = 0$ (频谱无移动)，由式(17)可得

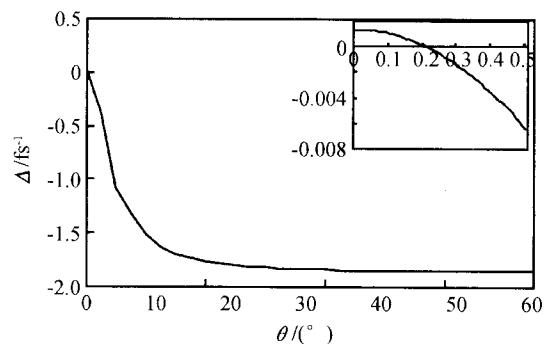


图 2 Δ 随衍射角 θ 的变化
Fig. 2 Spectra shifts Δ versus diffraction angle θ

$$\theta_c = \arcsin \left\{ [2q_2q_3 - 2q_1q_4 - ((-2q_2q_3 + 2q_1q_4)^2 - 8q_2q_4(-2q_1q_3 + q_3^2q_4))^{1/2} / 2(-2q_1q_3 + q_3^2q_4)]^{1/2} \right\} \quad (19)$$

临界角的大小也与初始脉冲周期、束腰宽度、色散介质中的传输常量有关，但一般为一小量。例如，在融石英介质中，计算表明 θ_c 约为 0.2° 。

当 $0 \leq \theta < \theta_c$ 时，频谱出现蓝移 ($\Delta > 0$)。随 θ 的增大，蓝移减小。当 $\theta = 0^\circ$ ，由式(17)计算得最大蓝移^[9]

$$\Delta_{\text{bmax}} = q_4 / 2q_2 = 2a_g^2 \beta_1 / T^2 \beta_0 \propto T^{-2} \quad (20)$$

当 $\theta > \theta_c$ 时，频谱出现红移 ($\Delta < 0$)。由图 2 知：当 $\theta_c < \theta < 10^\circ$ 时， Δ 随着衍射角 θ 的增加明显增大。当 $\theta > 10^\circ$ 时， Δ 增大变缓并趋于一定值，与图 1 一致。

考察脉冲时间移动时，将式(12)中含复数分母为 $\xi - \eta i$ 的指数函数重新整理为

$$\exp \left[\frac{-(\tau - i\tau_c)^2}{\xi - \eta i} \right] = \exp \left\{ -[\xi(\tau + \delta)^2 - [(\tau_c^2 \eta^2 / \xi) + \xi \tau_c^2] - [2\xi\tau\tau_c - (\tau^2 - \tau_c^2)\eta]i] / (\xi^2 + \eta^2) \right\} \quad (21)$$

式中

$$\delta = \tau_c \eta / \xi = \beta_0^2 a^2 \sin^2 \theta d_1 \eta / \xi \quad (22)$$

为归一化的脉冲时间移动，是一无量纲的量。该移动与参量 $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ 有关，是衍射和色散对脉冲时间同时作用的结果，这表示在色散介质中真正的“归一化当地时间”并非 τ ，而应为 $\tau' = \tau + \delta$ ；同时，从式(22)可以看出，脉冲在轴上不经历时间移动，而离轴时在正色散介质中将产生正的脉冲时间移动 ($\delta > 0$)，在负色散介质中将产生负的等量脉冲时间移动 ($\delta < 0$)。图 3 为用式(22)给出的脉冲高斯光束在正色散介质中传输时 δ 随着衍射角 θ 的变化。由图知，当 $\theta < 10^\circ$ 时， δ 随着衍射角 θ 的增加明显增大；而当 $\theta > 10^\circ$ 时， δ 增大变缓。这是 $r = z / \cos \theta$ 导致传输时间产生延迟以及色散共同作用的缘故。

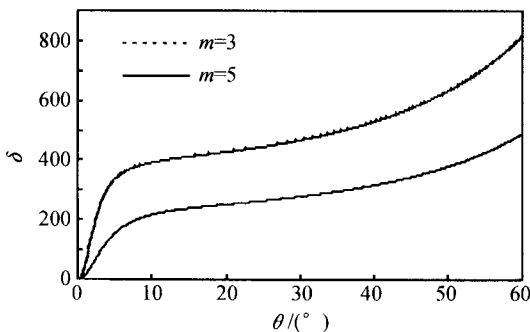


图 3 等束宽脉冲高斯光束在远场时间移动 δ 随衍射角 θ 的变化
Fig. 3 Time shifts δ of pulsed Gaussian beams with constant waist width versus diffraction angle θ

由于时间求导项的存在，式(12)决定的输出脉冲将必定不再严格保持高斯脉冲波形，产生非对称性。图 4 给出了远场脉冲高斯光束的离轴波形图。计算参量： $\theta = 5^\circ, m = 3$ ，其它计算参量与图 1 同。可

以看到脉冲波形峰值对应的当地时间 τ' 不在零点处，并产生了小的非对称性，这正是时间求导项作用的结果。轴上脉冲波形具有相似的情形。

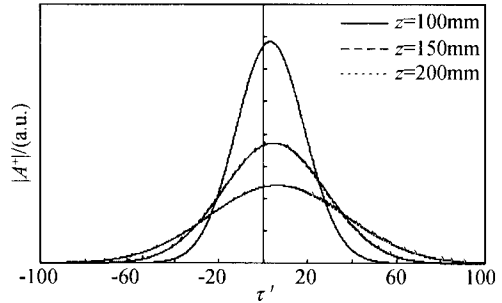


图 4 远场的时间波形
Fig. 4 Temporal pulse forms in the far field

考察输出脉冲波形的相位或啁啾的变化时，由于时间求导项对啁啾的影响很小，可以仅考虑式(21)中的相位，将式(12)改写成

$$A^+(r, t) = |A^+| \exp(i\varphi) \quad (23)$$

式中

$$\varphi = [2\xi\tau\tau_c - (\tau^2 - \tau_c^2)\eta] / (\xi^2 + \eta^2) \quad (24)$$

那么 $E^+ = |A^+| \exp(i\varphi_{\text{tot}})$ ，式中 $\varphi_{\text{tot}} = \varphi + \beta_0 r - \omega_0 t$ ，定义瞬时频率为^[8] $\omega_i = -\partial\varphi_{\text{tot}} / T\partial\tau'$ ，则

$$\omega_i = -1/T (\partial\varphi / \partial\tau') + \omega_0 \quad (25)$$

式(25)表明，从脉冲前沿到脉冲后沿瞬时频率如何变化完全取决于 $\partial\varphi / \partial\tau'$ 。由此得附加瞬时频率 ω_i 的公式

$$\omega_i = -(\partial\varphi / \partial\tau') = c\tau' + \text{常量} \quad (26)$$

式中

$$c = 2\eta / (\xi^2 + \eta^2) \quad (27)$$

从式(26)可以看出附加瞬时频率 ω_i 是归一化当地时间 τ' 的线性函数，其斜率 c 即为啁啾。由式(27)知：当 $\beta_2 = 0$ 时，啁啾 $c = 0$ ，而当 $\beta_2 \neq 0$ 时， $c \neq 0$ ，即群速度色散引起啁啾。啁啾的正负与色散介质有关，在正色散介质中传输时 ($\beta_2 > 0$)，产生正啁啾 ($c > 0$)。当在负色散介质中传输时 ($\beta_2 < 0$)，产生负啁啾 ($c < 0$)。正啁啾和负啁啾数值相等、符号相反。图 5 为用式(27)给出在正色散介质中啁啾 c 随衍射

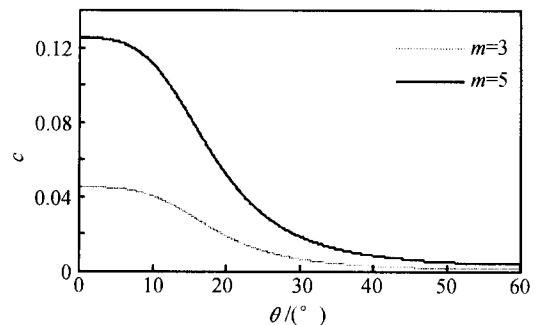


图 5 啁啾 c 随衍射角 θ 的变化
Fig. 5 Chirp c as a function of diffraction angle θ

角 θ 变化的关系图, 当 $\theta < 10^\circ$ 时, 啁啾随 θ 增加而缓慢减小, 当 $\theta > 10^\circ$ 时, 啁啾快速衰减.

3 结论

本文从瑞利-索末菲衍射积分公式出发, 推导出了任意时间波形等束宽脉冲高斯光束在线性色散介质中的远场公式. 由于未作近轴近似, 该式也适用于大衍射角的情形. 理论分析和数值计算结果表明, 线性色散介质中等束宽脉冲高斯光束在远场, 频谱将出现红移和蓝移, 当大于临界角时为红移, 红移量随着衍射角的增大而增大; 小于临界角时为蓝移, 且在轴上具有最大的蓝移; 而脉冲波形将经历时间移动, 移动的量随衍射角增加而增大. 输出脉冲波形不再是严格的高斯形状, 而出现非对称性. 由于群速度色散, 脉冲将产生啁啾, 啁啾的大小随衍射角增大而减小.

参考文献

- 1 Brabec T, Krausz F. Nonlinear optical pulse propagation in the single-cycle regime. *Phys Rev Lett*, 1997, **78**(17): 3282~3285
- 2 Melamed T, Felsen L B. Pulsed-beam propagation in lossless dispersive media. I. Theory. *J Opt Soc Am A*, 1998, **15**(5): 1268~1276
- 3 Porras M A. Diffraction-free and dispersion-free pulsed beam propagation in dispersive media. *Opt Lett*, 2001, **26**(17): 1364~1366
- 4 Agrawal G P. Far-field diffraction of pulsed optical beams in dispersive media. *Opt Commun*, 1999, **167**(1-6): 15~22
- 5 Porras M A. Propagation of single-cycle light beams in dispersive media. *Phys Rev A*, 1999, **60**(6): 5069~5073
- 6 Liu Z J, Lü B D. Propagation of ultrashort pulsed beams in dispersive media. *Chinese Physics*, 2003, **12**(8): 879~885
- 7 Mandel L, Wolf E. Optical coherence and quantum optics. New York: Cambridge University Press, 1995. 125~127
- 8 Siegman A E. Lasers. Mill Valley California: University Science Books, 1986. 335~336
- 9 张书敏, 吕福云, 董法杰, 等. 色散缓变光纤中飞秒高阶孤子脉冲的增强压缩. 光子学报, 2004, **33**(11): 1360~1363
Zhang S M, Lü F Y, Dong F J, et al. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(11): 1360~1363
- 10 陈宏平, 曹志彤. 超短光脉冲通过分层介质的远场频谱特性. 光子学报, 2003, **32**(11): 1294~1298
Chen H P, Cao Z T. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(11): 1294~1298
- 11 王淮生, 傅守利, 郑迎东. 在超短脉冲照射下光栅的瞬时 Talbot 效应的研究. 光子学报, 2002, **31**(2): 152~156
Wang H S, Fu S L, Zheng Y D. *Acta Photonica Sinica*, 2002, **31**(2): 152~156

Far-field Properties of Ultrashort Pulsed Gaussian Beams in a Linear Dispersive Medium

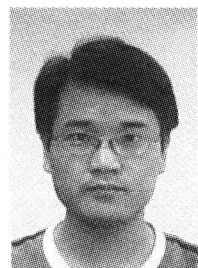
Zheng Zhen, Lü Baida

Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064

Received date: 2005-06-30

Abstract Based on the Rayleigh-Sommerfeld diffraction integral, the far-field expression for ultrashort pulsed Gaussian beams with constant waist width in a linear dispersive medium is derived without involving the paraxial approximation, and used to study their far-field properties. The expression is applicable to the large diffraction angle. It is found that there exists a critical diffraction angle θ_c for the power spectrum of pulsed Gaussian beams with constant waist width. The spectrum is blue-shifted if $\theta < \theta_c$, whereas, for $\theta > \theta_c$ the spectrum is red-shifted, and the redshift increases with increasing θ . Additionally, there is a time shift, which increases with an increase of θ , and the Gaussian pulse form can not remain unchanged in the far field. Finally, the group velocity dispersion results in the chirp, which increases with decreasing diffraction angle.

Keywords Ultrashort pulse technology; Pulsed gaussian beam; Far-field property; Linear dispersive medium; Rayleigh-Sommerfeld diffraction integral



Zheng Zhen was born in September, 1980. Now he is studying for his master degree in Sichuan University. His research interests include the propagation and transformation of ultrashort pulsed beams.