

光波在左手材料中的菲涅尔公式和布儒斯特定律*

田秀芳

(西安邮电学院应用数理系, 西安 710121)

摘 要 根据 Maxwell 的电磁场理论, 推导出单色平面光波入射到介电常量和磁导率分别为 ϵ_1 、 μ_1 和 ϵ_2 、 μ_2 的两种介质时的菲涅耳公式和反射率及透射率的普适表达形式. 对于 $\epsilon_2 < 0$ 和 $\mu_2 < 0$ 的左手材料, 普适菲涅耳公式同样适用. 研究了光从右手材料入射到左手材料时反射和折射的特性, 给出了反射光为全偏光时布儒斯特角应满足的条件, 此条件说明, 在左手材料中布儒斯特角不但与折射率有关而且与磁导率有关.

关键词 物理光学; 电磁场理论; 左手材料; 负折射率; 菲涅尔公式; 布儒斯特定律

中图分类号 O441; O484.4+1

文献标识码 A

0 引言

1967 年, 前苏联物理学家 V. G. Veselago 在考虑没有能量损失时, 当介质同时满足 $\epsilon < 0$ 和 $\mu < 0$ 时, 麦克斯韦方程有波动解. 在这种介质里电磁波呈现出一些奇异的特性. 如波传播的电矢量、磁矢量与波矢量三者满足的是左手法则、逆几何光学、逆 Doppler 效应和负折射等等. 因此人们称这种物质为“左手材料”(LHM) 或“负折射物质”(NRM) 等^[1]. 2000 年美国麻省理工学院的 Smith 研究小组首次人工合成了具有负折射率的左手材料. 2001 年他们又通过实验, 首次观测到微波束在这种左手物质和空气的分界面上出现负折射现象, 从而实验证明了构造负折射率物质是可能的^[2,3]. 从此, 左手材料成为国内外学术界以及科研部门的热点研究课题.

左手材料的构造成功, 说明了人们可以构造出具有特殊的磁导率 μ 及介电系数 ϵ 的物质的可能, 激发了人们积极研究介质的磁导率 μ 和介电系数 ϵ 对传输光波的影响^[4~8]. 菲涅耳公式很好地解释了常规的右手介质中光的传输特性, 但对于左手介质中光的某些特性不好解释. 因此根据 Maxwell 的电磁场理论, 重新推导出单色平面光波入射到介电常量和磁导率分别为 ϵ_1 、 μ_1 和 ϵ_2 、 μ_2 的两种介质时的菲涅尔公式以及反射率和透射率的普适表达式. 此式不但适合常规的右手介质, 对于 $\epsilon_2 < 0$ 和 $\mu_2 < 0$ 的左手材料同样适用. 从此式出发, 分析了光波在界面两侧的反射和透射特性, 给出了在左手介质中反射光为全偏光时布儒斯特角应满足的条件, 此条件和右手介质的布儒斯特定理有所不同, 其布儒斯特角不但与折射率有关, 而且与磁导率有关.

1 普适菲涅尔公式

根据 Maxwell 的电磁场理论, 对于无损耗、各向同性、均匀的介质得到正弦时变光波的 Helmholtz 方程为

$$\nabla^2 \mathbf{E} + K^2 \mathbf{E} = 0 \quad \nabla^2 \mathbf{B} + K^2 \mathbf{B} = 0 \quad (1)$$

其中 $K^2 = \omega^2 \mu \epsilon = \omega^2 \mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2$, $n^2 = \mu_r \epsilon_r$, $c =$

$$\sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}$$

式中 n 代表折射率, c 是真空中光速.

$$\text{对于右手介质 } \epsilon > 0, \mu > 0, n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$

$$\text{对于左手介质 } \epsilon < 0, \mu < 0, n = -\sqrt{\epsilon_r \mu_r} \quad (2)$$

Helmholtz 方程的平面单色光波解为

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad \mathbf{H}(x, t) = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

且有

$$\mathbf{K} \times \mathbf{E} = \omega \mu \mathbf{H} \quad \mathbf{K} \times \mathbf{H} = -\omega \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{E} = 0, \mathbf{K} \cdot \mathbf{H} = 0$$

\mathbf{H} 和 \mathbf{E} 的大小关系为

$$\sqrt{\mu_0 \mu_r} \mathbf{H} = \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r} \mathbf{E} \quad (3)$$

设单色平面光波入射到介电常量和磁导率分别为 ϵ_1 、 μ_1 和 ϵ_2 、 μ_2 的两种透明绝缘材料的界面时, 可以证明入射波、反射波、折射波的电场强度矢量 $\mathbf{E}^i \mathbf{E}^r \mathbf{E}^t$ 和磁场强度矢量 $\mathbf{H}^i \mathbf{H}^r \mathbf{H}^t$ 分别为

$$\mathbf{E}^i = \mathbf{E}_0^i e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \mathbf{E}^r = \mathbf{E}_0^r e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})},$$
$$\mathbf{E}^t = \mathbf{E}_0^t e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (4)$$

$$\mathbf{H}^i = \mathbf{H}_0^i e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \mathbf{H}^r = \mathbf{H}_0^r e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})},$$
$$\mathbf{H}^t = \mathbf{H}_0^t e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (5)$$

设入射角为 θ_i , 反射角为 θ_r , 折射角 θ_t . 由边界条件, 在两介质的分界面上电场强度 \mathbf{E} 的切向分量应该连续, 得到反射定律和折射定律.

$$\theta_i = \theta_r, n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (6)$$

为了为描述光束反射和折射的特性, 将 \mathbf{E} 分为垂直

* 陕西省自然科学基金(批准号:2004A15)资助的课题
Tel: 029-88166335 Email: laoxiu2002@vip.sina.com
收稿日期: 2005-12-12

入射面的 E_{\perp} 分量和平行入射面的 E_{\parallel} 分量. 如图 1, e_n 表示分界面的法矢量.

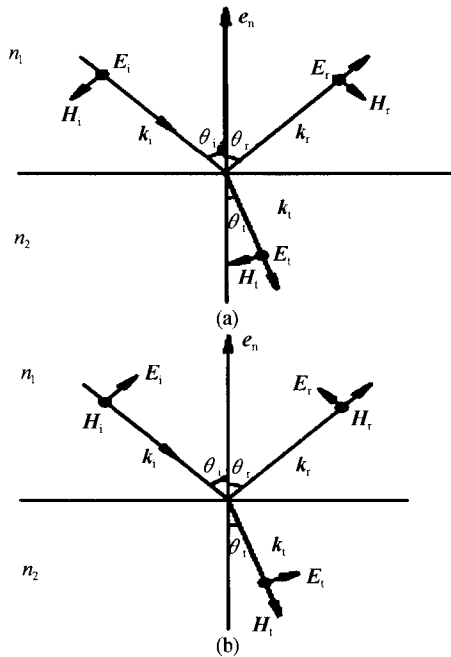


图 1 (a)电矢量垂直于入射面;(b)电矢量平行于入射面
Fig. 1 (a) E perpendicular to the plane of incidence;
(b) E parallel to the plane of incidence

根据电磁场边界条件, 界面两侧的 E, H 的切向分量分别相等. 设 e_n 为分界面的单位法矢量, 则有

$$(E_i + E_r) \times e_n = E_t \times e_n \quad (H_i + H_r) \times e_n = H_t \times e_n$$

对于 E_{\perp} 有

$$E_{\perp}^i + E_{\perp}^r = E_{\perp}^t \quad (7)$$

$$(H_{\parallel}^i - H_{\parallel}^r) \cos \theta_i = H_{\parallel}^t \cos \theta_t \quad (8)$$

根据式(3) $H = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\mu_0 \mu_r}} E$, 并把式(4)、(5)代入式(7)、(8)消去指数因子得到电场强度振幅之间的关系.

$$E_{\perp}^i + E_{\perp}^r = E_{\perp}^t \quad (9)$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} (E_{\perp}^i - E_{\perp}^r) \cos \theta_i = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E_{\perp}^t \cos \theta_t \quad (10)$$

由式(9)和式(10)得

$$E_{\perp}^r = \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_i - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_t}{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_t} E_{\perp}^i = \frac{\mu_2 n_1 \cos \theta_i - \mu_1 n_2 \cos \theta_t}{\mu_2 n_1 \cos \theta_i + \mu_1 n_2 \cos \theta_t} E_{\perp}^i \quad (11)$$

$$E_{\perp}^t = \frac{2\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_i}{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_t} E_{\perp}^i = \frac{2\mu_2 n_1 \cos \theta_i}{\mu_2 n_1 \cos \theta_i + \mu_1 n_2 \cos \theta_t} E_{\perp}^i \quad (12)$$

同理对于 E_{\parallel} 有

$$E_{\parallel}^r = \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_i - \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_t}{\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_t} E_{\parallel}^i = \frac{\mu_1 n_2 \cos \theta_i - \mu_2 n_1 \cos \theta_t}{\mu_1 n_2 \cos \theta_i + \mu_2 n_1 \cos \theta_t} E_{\parallel}^i \quad (13)$$

$$E_{\parallel}^t = \frac{2\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_i}{\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_t} E_{\parallel}^i = \frac{2\mu_2 n_1 \cos \theta_i}{\mu_1 n_2 \cos \theta_i + \mu_2 n_1 \cos \theta_t} E_{\parallel}^i \quad (14)$$

普适的非涅尔公式为

$$r_{\perp} = \frac{E_{\perp}^r}{E_{\perp}^i} = \frac{\mu_2 n_1 \cos \theta_i - \mu_1 n_2 \cos \theta_t}{\mu_2 n_1 \cos \theta_i + \mu_1 n_2 \cos \theta_t} \quad (15)$$

$$r_{\parallel} = \frac{E_{\parallel}^r}{E_{\parallel}^i} = \frac{\mu_1 n_2 \cos \theta_i - \mu_2 n_1 \cos \theta_t}{\mu_1 n_2 \cos \theta_i + \mu_2 n_1 \cos \theta_t} \quad (16)$$

$$t_{\perp} = \frac{E_{\perp}^t}{E_{\perp}^i} = \frac{2\mu_2 n_1 \cos \theta_i}{\mu_2 n_1 \cos \theta_i + \mu_1 n_2 \cos \theta_t} \quad (17)$$

$$t_{\parallel} = \frac{E_{\parallel}^t}{E_{\parallel}^i} = \frac{2\mu_2 n_1 \cos \theta_i}{\mu_1 n_2 \cos \theta_i + \mu_2 n_1 \cos \theta_t} \quad (18)$$

对于常规的透明右手介质材料, 通常认为 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, 上面结论简化为非涅尔公式^[9].

对于界面两侧都为左手介质, $\epsilon_1 < 0, \mu_1 < 0, n_1 < 0$ 和 $\epsilon_2 < 0, \mu_2 < 0, n_2 < 0$. 即 μ 和 n 同时取负值, 普适的非涅尔公式计算结果不变.

对于光从右手材料入射到左手材料时 $\epsilon_1 > 0, \mu_1 > 0, n_1 > 0$ 和 $\epsilon_2 < 0, \mu_2 < 0, n_2 < 0$, 上面的公式计算结果不变.

普适的非涅尔公式不但适用于常规的右手材料, 也适用于左手材料. 计算时介质的折射率和磁导率取绝对值代入计算即可.

2 光能流反射率和透射率

光波入射到两种介质的分界面上后, 在无吸收、色散等其他能量损耗的情况下, 则入射光的能量在反射光和折射光中重新分配, 而总能量不变.

设光斜入射到分界面上, 入射光、反射光、折射光的光强为

$$I^i = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} [E_0^i]^2 \cos \theta_i, I^r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} [E_0^r]^2 \cdot$$

$$\cos \theta_r, I^t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} [E_0^t]^2 \cos \theta_t$$

则光能流的反射率 R 和透射率 T 为

$$R = \frac{I^r}{I^i} = \frac{|E_0^r|^2}{|E_0^i|^2} \quad (19)$$

$$T = \frac{I^t}{I^i} = \frac{|E_0^t|^2}{|E_0^i|^2} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} =$$

$$\frac{\mu_1 n_2 \cos \theta_t}{\mu_2 n_1 \cos \theta_i} \frac{|E_0^\perp|^2}{|E_0^\parallel|^2} \quad (20)$$

由于反射波与折射波的振幅和入射波的偏振态有关,因此必须对波的垂直分量 E_\perp 和平行分量 E_\parallel 分别计算其反射率和透射率. 设电矢量 E^i 之振动面与入射面成 α 角,则入射波的垂直分量振幅和平行分量振幅分别为

$$E_{0\perp}^i = E_0^i \cos \alpha, E_{0\parallel}^i = E_0^i \sin \alpha$$

对于反射光有

$$R = \frac{I_r}{I^i} = \frac{I_{r\parallel}^2 + I_{r\perp}^2}{I^i} = \frac{I_{r\parallel}^2}{I^i} \cos^2 \alpha + \frac{I_{r\perp}^2}{I^i} \sin^2 \alpha$$

$$R = R_\parallel \cos^2 \alpha + R_\perp \sin^2 \alpha \quad (21)$$

同理对透射光得到

$$T = T_\parallel \cos^2 \alpha + T_\perp \sin^2 \alpha \quad (22)$$

垂直分量 E_\perp 和平行分量 E_\parallel 反射率和透射率为

$$R_\parallel = \frac{I_{r\parallel}}{I_\parallel^i} = \frac{|E_{0\parallel}^r|^2}{|E_{0\parallel}^i|^2} = \left| \frac{\mu_1 n_2 \cos \theta_i - \mu_2 n_1 \cos \theta_t}{\mu_1 n_2 \cos \theta_i + \mu_2 n_1 \cos \theta_t} \right|^2 \quad (23)$$

$$R_\perp = \frac{I_{r\perp}}{I_\perp^i} = \frac{|E_{0\perp}^r|^2}{|E_{0\perp}^i|^2} = \left| \frac{\mu_2 n_1 \cos \theta_i - \mu_1 n_2 \cos \theta_t}{\mu_2 n_1 \cos \theta_i + \mu_1 n_2 \cos \theta_t} \right|^2 \quad (24)$$

$$T_\parallel = \frac{I_{t\parallel}}{I_\parallel^i} = \frac{|E_{0\parallel}^t|^2}{|E_{0\parallel}^i|^2} \frac{n_2 \mu_1 \cos \theta_t}{n_1 \mu_2 \cos \theta_i} = \left| \frac{2\mu_2 n_1 \cos \theta_i}{\mu_1 n_2 \cos \theta_i + \mu_2 n_1 \cos \theta_t} \right|^2 \times \frac{n_2 \mu_1 \cos \theta_t}{n_1 \mu_2 \cos \theta_i} \quad (25)$$

$$T_\perp = \frac{I_{t\perp}}{I_\perp^i} = \frac{|E_{0\perp}^t|^2}{|E_{0\perp}^i|^2} \frac{n_2 \mu_1 \cos \theta_t}{n_1 \mu_2 \cos \theta_i} = \left| \frac{2\mu_2 n_1 \cos \theta_i}{\mu_2 n_1 \cos \theta_i + \mu_1 n_2 \cos \theta_t} \right|^2 \times \frac{n_2 \mu_1 \cos \theta_t}{n_1 \mu_2 \cos \theta_i} \quad (26)$$

当光线垂直入射时,反射率和透射率公式为

$$R_\parallel = R_\perp = \left| \frac{\mu_1 n_2 - \mu_2 n_1}{\mu_1 n_2 + \mu_2 n_1} \right|^2 \quad (27)$$

$$T_\parallel = T_\perp = \frac{4\mu_1 \mu_2 n_1 n_2}{[\mu_1 n_2 + \mu_2 n_1]^2} \quad (28)$$

通过式(21)~(26)简单计算得到

$$R_\parallel + T_\parallel = 1 \quad R_\perp + T_\perp = 1 \quad R + T = 1$$

因此通过普适的菲涅尔公式得到的光能流反射率和透射率公式满足能量守恒.

从 μ 和 n 取值的正负可以看出反射率、透射率公式不但适用于常规的右手材料,也适用于左手材料.

3 布儒斯特定律

在常规介质中当入射角为布儒斯特角时,入射光和折射光线垂直,且

$$\tan \theta_b = \frac{n_2}{n_1}$$

对于 $\mu_1 \neq \mu_2$ 特殊介质,当 $r_\parallel = 0$ 时,由式(16)或(23)得到

$$\mu_1 n_2 \cos \theta_i - \mu_2 n_1 \cos \theta_t = 0$$

结合折射定律 $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$,此时的入射角和折

射角有如下关系

$$\mu_1 \sin 2\theta_i = \mu_2 \sin 2\theta_t \quad (29)$$

从式(29)得到,布入斯特角不但和 n_1, n_2 有关,也和 μ_1, μ_2 有关. 一般情况下,反射光和折射光也不垂直.

下面讨论左手介质的一些状况:

1)当界面两侧同为左手介质时,式(29)形式不变,情况和界面两侧同为右手介质相同. 若 $\mu_1 = \mu_2, n_1 = n_2$,光线进入第二介质不发生偏折,由式(29)结合反射定律得到

$$\theta_i = \theta_r = \theta_t = \frac{\pi}{4}$$

透射光和反射光垂直,满足布儒斯特定律.

2)当光线由右手材料进入左手材料时,式(29)两边符号不同,说明了折射角 θ_t 应取负值,即入射光线和折射光线处在界面法线的同侧.

若 $\mu_1 = -\mu_2$,由式(29)得到 $\sin 2\theta_i = -\sin 2\theta_t$

$$\text{即 } \sin 2\theta_i = \sin(\pi + 2\theta_t), \theta_i = \frac{\pi}{2} + \theta_t, \text{即}$$

$$\theta_i - \theta_t = \frac{\pi}{2} \quad (30)$$

左手材料中, θ_t 取负值. 此时的折射光线和入射光线垂直. 不同于常规的右手介质布儒斯特定律中折射光和反射光垂直.

3)若光线由空气入射到左手介质中,此时 $\mu_1 = \mu_0$ 式(29)变为

$$\sin 2\theta_i = \mu_{r2} \sin 2\theta_t \quad (31)$$

一般情况下在左手材料中的 $|\mu_{r2}| \neq \mu_0$,入射光线和折射光线也不垂直,而且布儒斯特角与磁导率有关.

同理对 $r_\perp = 0$,由式(6)和式(15)得到反射光为平行于入射面的全偏光时应满足的条件为

$$\mu_1 \tan \theta_i = \mu_2 \tan \theta_t \quad (32)$$

可以证明上式同样适合于左手材料.

4 结论

根据 Maxwell 的电磁场理论,重新推导出单色平面光波入射到介电常量和磁导率分别为 ϵ_1, μ_1 和 ϵ_2, μ_2 的两种介质时的菲涅耳公式的普适表达式. 从此式出发给出了光能流反射率和透射率的普遍表达式,并能证明遵从能量守恒. 当对于常规的右手材料 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ 时,普适表达式化简为原始的菲涅耳公式. 对于左手材料,普适菲涅耳公式同样适用. 并研究了光从右手材料入射到左手材料时反射和折射特性,给出了反射光为全偏光时布儒斯特角应满足的关联条件. 说明了布儒斯特角不但与折射率有关而且与磁导率有关.

参考文献

- 1 Veselago V G. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ . *Sov Phys Usp*, 1968, **10**(4):509~514
- 2 Smith D R, Padilla W J, Vier D C. *et al.* A composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity. *Phys Rev Lett*, 2000, **84**(18):4184~4187
- 3 Shelby R A, Smith D R, Schultz S. Experimental verification of a negative index of refraction. *Science*, 2001, **292**(6):77~79
- 4 杨立功, 顾培夫, 黄弼勤, 等. 光波在左右手系材料界面处的传输特性. *光子学报*, 2003, **32**(10):1225~1227
Yang L G, Gu P F, Huang B Q, *et al.* *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(10):1225~1227
- 5 Yang Ligong, Gu Peifu, Huang Biqin. Study of finite aperture effect on lens made of LHM by geometrical optics. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(11):1396~1398
- 6 杨立功, 顾培夫, 黄弼勤, 等. 含有负折射率介质层的布喇格镜的光学特性研究. *光子学报*, 2004, **33**(2):200~203
Yang L G, Gu P F, Huang B Q, *et al.* *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(2):200~203
- 7 何金龙, 沈林放, 何赛灵, 等. 负折射率介质光纤的导模异常特性分析. *光子学报*, 2004, **33**(11):1227~1330
He J L, Shen L F, He S L, *et al.* *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(11):1227~1330
- 8 庄飞, 沈建其. 双轴各向异性负折射率材料光纤中波函数几何相位研究. *物理学报*, 2005, **54**(2):0955~0960
Zhuang F, Shen J Q. *Acta Sin Phys*, 2005, **54**(2):0955~0960
- 9 廖延彪. 偏振光学. 北京: 科学出版社, 2003. 19~26
Liao Y B. *Polarization Optics*. Beijing: Science Press, 2003. 19~26

Fresnel Formulate and Brewster Law of Optical Waves in the Left-handed Materials

Tian Xiulao

Department of Applied Mathematics and Physics, Xi'an University of Post and Telecommunication, Xi'an 710121

Received date: 2005-12-12

Abstract Universal Fresnel formulae at the interface of two medium whose permittivity and permeability are $\epsilon_1\mu_1, \epsilon_2\mu_2$ are derived from Maxwell theory. The universal Fresnel formulae of the reflectivity and transmission coefficients are given. It is applicable for Right-handed materials and Left-handed materials. Analyzing properties of reflection and refraction between two medium, the condition of Brewster angle are given in the Left-handed materials. The condition show that Brewster angle is not only relate to refractive index but also relate to permeability.

Keywords Physical optics; Electromagnetic field theory; Left-handed materials negative index of refraction; Fresnel formulae; Brewster law



Tian Xiulao was born in 1956. He graduated from the Department of Physics, Shaanxi Normal University in 1982. Obtain master's degree in after years. Now he is a associate professor of Xi'an University of Post and telecommunication. His research interests are in the fields of optics and telecommunication, quantum information and fields light interacting with mater.