

左手介质椭圆光波导基模传播特性

熊天信^{1,2} 杨儒贵¹

(1 西南交通大学电磁场与微波技术研究所, 成都 610031)

(2 四川师范大学物理与电子工程学院, 成都 610066)

摘 要 在椭圆柱坐标系中, 采用分离变量方法, 得出了左手介质椭圆光波导本征方程的近似解, 通过数值计算, 分析了椭圆波导偏心率、左手介质的电容率、磁导率对椭圆光波导基模传播特性的影响, 并将左介质光波导与右手介质光波导基模特性进行对比, 得出左手介质光波导的基模特性与右手介质光波导基模特性差别不大的结论.

关键词 椭圆光波导; 左手介质; 传播特性; 马修函数

中图分类号 TN814+6 **文献标识码** A

0 引言

电容率 ϵ 和磁导率 μ 是描述均匀媒质中电磁场性质的最基本的两个物理量. 对于一般电介质而言, 电容率 ϵ 和磁导率 μ 都是非负的常量. 由麦克斯韦方程可知, 在 ϵ 和 μ 都为正值的物质中, 电场、磁场和波矢量三者构成右手关系, 称为右手介质 (Right Handed Materials, RHM). 1968 年, 前苏联物理学家 V. Veselago 在理论上研究了电容率 ϵ 和磁导率 μ 都为负值介质的电磁学性质, 他发现与右手介质不同的是: 当 ϵ 和 μ 都为负值时, 电场、磁场和波矢量之间构成左手关系, 同时介质的折射率必需取负值, 他称这种介质为左手介质 (Left Handed Materials, LHM)^[1]. 直到 1999 年, 由于英国皇家学院的 J. B. Pendry 等人提出利用开口环共振器 (Split Ring Resonator, SRR) 可以制作出在某一频率区间满足 $\mu < 0$ 的物质, 而且将这种材料与电容率 $\epsilon < 0$ 的金属线阵组合起来就能够制造出左手介质, 之后, 这种介质才引起人们特别的关注^[2]. 2000 年, 美国加州大学 D. R. Smith 等物理学家根据 J. B. Pendry 等人的建议, 利用以铜为主的复合材料首次制造出在微波波段具有负电容率、负磁导率的物质^[3]. 之后, J. B. Pendry 提出利用左手介质可制成完美透镜^[4], 杨立功等又进一步研究有限透镜孔径对左手介质透镜成像的影响^[5]. 最近, 有学者对圆形光纤的传播特性进行了研究^[6]. 本文就左手介质椭圆光波导的基模传播特性进行研究, 并与右手介质椭圆光波导进行对比, 分析负电容、负磁导率和椭圆波导偏心率对基模传播特性的影响.

1 模式本征方程

本文考虑的 LHM 椭圆光波导, 芯层是由 LHM 构成, 其 ϵ 和 μ 都小于 0, 外面为真空, 椭圆光波导的半长轴和半短轴长分别为 a 和 b . 图 1 为左手介质椭圆光波导横截面结构.

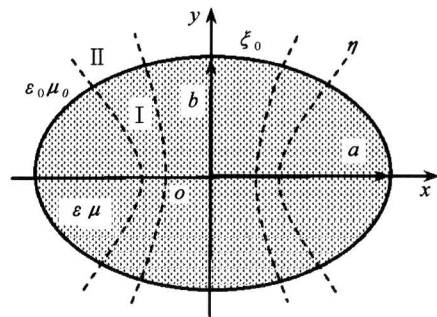


图 1 左手介质椭圆光波导横截面结构
Fig. 1 The cross section of an elliptical fiber made from LHM

假设传播方向是沿 z 轴正方向, 所有电磁波均以因子 $e^{-i\beta z}$ 沿 z 变化. 本文中因子 $e^{j(\omega t - \beta z)}$ 已省略. 在椭圆坐标系中, 应用分离变量法, 得电磁场 z 方向分量的偶模表示式为^[7].

$$E_{z1} = \sum_m A_m J e_m(\xi, \gamma_1^2) c e_m(\eta, \gamma_1^2) \quad (1)$$

$$H_{z1} = \sum_m B_m J o_m(\xi, \gamma_1^2) s e_m(\eta, \gamma_1^2) \quad (2)$$

$$E_{z2} = \sum_m C_m K e_m(\xi, \gamma_2^2) c e_m(\eta, \gamma_2^2) \quad (3)$$

$$H_{z2} = \sum_m D_m K o_m(\xi, \gamma_2^2) s e_m(\eta, \gamma_2^2) \quad (4)$$

式中, ξ 和 η 别为椭圆坐标系的径向和角向坐标, $\gamma_i^2 = q^2 (k_0^2 n_i^2 - \beta^2) / 4$, $q = \sqrt{a^2 - b^2}$, β 为 z 方向的传播常量, k_0 为真空中的波数, n_i 为 i 区介质的折射率. $c e_m(\eta, \gamma^2)$ 、 $s e_m(\eta, \gamma^2)$ 为马修函数, $J e_m(\xi, \gamma^2)$ 、 $J o_m(\xi, \gamma^2)$ 为第一类修正马修函数, $K e_m(\xi, \gamma^2)$ 、 $K o_m(\xi, \gamma^2)$ 为第二类修正马修函数^[7]. A_m 、 B_m 、 C_m 、 D_m 为待定常量. 由麦克斯韦方程组, 可得在椭圆坐标系中电磁场横向分量与电磁场纵向分量的关系^[8]

$$E_{\eta_i} = \frac{-j}{q \sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta} (\beta^2 - k_0^2 n_i^2)} \cdot \left[\omega \mu_i \frac{\partial H_{z_i}}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial E_{z_i}}{\partial \eta} \right] \quad (5a)$$

$$H_{\eta_i} = \frac{-j}{q \sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta} (\beta^2 - k_0^2 n_i^2)} \cdot \left[\beta \frac{\partial H_{z_i}}{\partial \eta} - \omega \epsilon_i \frac{\partial E_{z_i}}{\partial \xi} \right] \quad (5b)$$

$$E_{\xi} = \frac{j}{q \sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta} (\beta^2 - k_0^2 n_i^2)} \cdot \left[\omega \mu_i \frac{\partial H_{z_i}}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial E_{z_i}}{\partial \xi} \right] \quad (5c)$$

$$H_{\xi} = \frac{-j}{q \sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta} (\beta^2 - k_0^2 n_i^2)} \cdot \left[\beta \frac{\partial H_{z_i}}{\partial \xi} + \omega \epsilon_i \frac{\partial E_{z_i}}{\partial \eta} \right] \quad (5d)$$

将式(1)~(4)代入式(5a)、(5b)得 E_{η_i} 、 H_{η_i} ，利用 E_{z_i} 、 H_{z_i} 、 E_{η_i} 、 H_{η_i} 在 $\xi = \xi_0$ ($\xi_0 = \ln \sqrt{(a+b)/(a-b)}$) 时连续的边界条件，在求和时作近似处理^[9]，取求和号中 $m=n$ 项，可得偶模的本征方程

$$\begin{aligned} & -\pi^2 \alpha^2 J e_m(\xi_0, \gamma_1^2) J o_m(\xi_0, \gamma_1^2) [\beta^2 Z U K e_m(\xi_0, \gamma_2^2) \cdot \\ & K o_m(\xi_0, \gamma_2^2) + k_0^2 Y W K e'_m(\xi_0, \gamma_2^2) K o'_m(\xi_0, \gamma_2^2)] + \\ & \pi \alpha Y J e_m(\xi_0, \gamma_1^2) K o_m(\xi_0, \gamma_2^2) [\pi \mu_r k_0^2 W J o'_m(\xi_0, \gamma_1^2) \cdot \\ & K e'_m(\xi_0, \gamma_2^2) + \beta^2 V Z J o_m(\xi_0, \gamma_1^2) K e_m(\xi_0, \gamma_2^2)] + \\ & \pi \alpha W J o_m(\xi_0, \gamma_1^2) K e_m(\xi_0, \gamma_2^2) [\pi \epsilon_r k_0^2 Y J e'_m(\xi_0, \gamma_1^2) \cdot \\ & K o'_m(\xi_0, \gamma_2^2) + \beta^2 X U J e_m(\xi_0, \gamma_1^2) K o_m(\xi_0, \gamma_2^2)] - \\ & W Y K e_m(\xi_0, \gamma_2^2) K o_m(\xi_0, \gamma_2^2) [\beta^2 X V J e_m(\xi_0, \gamma_1^2) \cdot \\ & J o_m(\xi_0, \gamma_1^2) + \pi^2 k_0^2 n^2 J e_m(\xi_0, \gamma_1^2) J o_m(\xi_0, \gamma_1^2)] = 0 \quad (6) \end{aligned}$$

式中

$$\alpha = (\beta^2 - k_0^2 n^2) / (\beta^2 - k_0^2)$$

$$X = \int_0^{2\pi} c e'_m(\eta, \gamma_1^2) s e_m(\eta, \gamma_1^2) d\eta$$

$$V = \int_0^{2\pi} s e'_m(\eta, \gamma_1^2) c e_m(\eta, \gamma_1^2) d\eta$$

$$Y = \int_0^{2\pi} s e_m(\eta, \gamma_1^2) s e_m(\eta, \gamma_2^2) d\eta$$

$$Z = \int_0^{2\pi} s e_m(\eta, \gamma_1^2) c e'_m(\eta, \gamma_2^2) d\eta$$

$$U = \int_0^{2\pi} c e_m(\eta, \gamma_1^2) s e'_m(\eta, \gamma_2^2) d\eta$$

$$W = \int_0^{2\pi} c e_m(\eta, \gamma_1^2) c e_m(\eta, \gamma_2^2) d\eta$$

同样的方法可得奇模特征方程，计算表明，在作同样的近似处理的条件下，奇模本征方程和偶模本征方程相同。

2 数值计算

由本征方程可以看出，其传播特性与左手介质的 μ_r 和 ϵ_r 的正负有关，而与 n 的正负无关，因此左手介质光波导的传播特性与右手介质光波导的传播

特性从理论上说应当是有差别的，同时其电容率与磁导率的大小也会影响波导的传播特性，同时还可看出，波导的椭圆度也对波导的传播特性有影响，这些参量对传播特性的影响程度如何，由于此本征方程为超越方程，只能通过数值计算来分析左手介质椭圆光波导的传播特性。由于马修函数和修正马修函数在常用的数值计算软件都没有完全给出，只能通过自编程序解决，这是本文的难点和关键。作者在参考文献[10]的基础上，编写了所有马修函数、修正马修函数及其导数的计算程序，程序计算结果与文献[7]中所给出的一些结果比较完全相符。

波导传播特性的一个重要方面是分析其截止频率，为此本文计算了波导的归一化频率 ($k_0 a$) 与归一化传播常量 (β/k_0) 之间的关系。计算中取 $m=1$, $n=-1.5$, $\mu_r = -2.25$, $\epsilon_r = -1.0$, $b=0.8a$ (图 2(a)) 和 $b=0.6a$ (图 2(b))。图 2 是左手介质椭圆光波导在不同偏心率的情况下，波导基模的归一化传播常量随归一化频率的变化关系，计算结果表明，椭圆波导的偏心率对其传播特性的影响很大，当偏心率增大时，其归一化的截止频率减小。

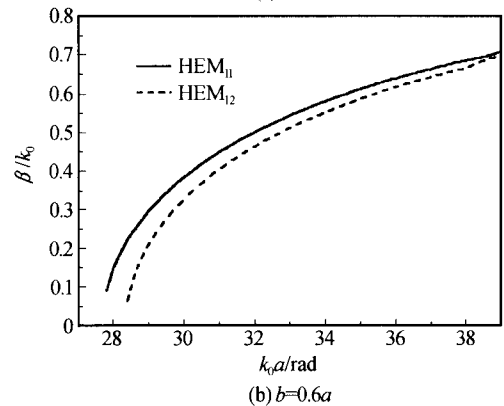
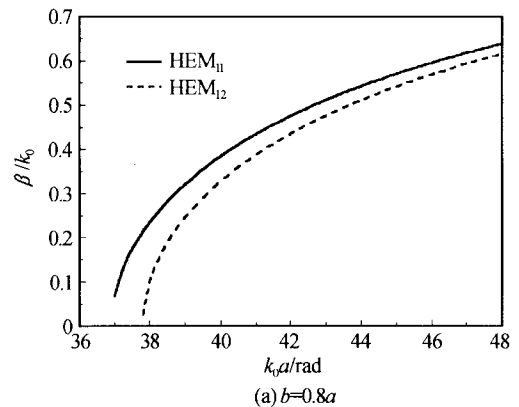


图 2 归一化传播常量与归一化频率的变化关系
Fig. 2 Normalized propagation constant vs normalized frequency for the different eccentricities

为比较左手介质光波导的传播特性与右手介质光波导的传播特性的差异，给出两种介质的数值计算示例。由表 1 可以看出，相同结构的左手介质椭圆

光波导与右手介质光波导的基模传播特性差别不大,这种差别在工程应用中应当说可不予以考虑.表 2 和表 3 分别给出了在不同电容率和不同磁导率的条件下,左手介质光波导归一化频率与归一化传播常量的数值计算示例,计算表明,左手介质的电容

率与磁导率对左手介质椭圆波导基模传播特性的影响也很小.当然,这些结论是在文中的近似情况下得出的,如果考虑到 $m \neq n$ 项,左手介质的电容率与磁导率对左手介质椭圆波导传播特性应当有更大的影响.

表 1 相同结构的左手介质椭圆光波导与右手介质光波导传播特性对比

$k_0 a$	β/k_0 ($m=1$ $n=-1.5$ $\mu_r=-2.25$ $\epsilon_r=-1.0$ $b=0.8a$)		β/k_0 ($m=1$ $n=1.5$ $\mu_r=2.25$ $\epsilon_r=1.0$ $b=0.8a$)	
	HEM ₁₁	HEM ₁₂	HEM ₁₁	HEM ₁₂
37.0	0.0680876738510131		0.0680877144438552	
37.2	0.123733522898864		0.123733578417129	
37.4	0.160665092597961		0.160665257268371	
37.6	0.19012989354248		0.190130023953704	
37.8	0.215225118873596	0.0267978014272689	0.215225326363677	0.0267977498948287
38.0	0.237348229145812	0.105873566127777	0.237348335633392	0.1058734592811580
38.2	0.25727340934906	0.146751288898468	0.257273545914611	0.1467511760166160
28.4	0.275484053038024	0.178049888610839	0.275484204094696	0.1780496070790100
38.6	0.292306148741149	0.204230030351257	0.292306301665649	0.2042299868231200
38.8	0.307972480667114	0.227076569290161	0.307972624952392	0.2270764313362120

表 2 左手介质折射率对椭圆光波导传播特性的影响

$k_0 a$	β/k_0 ($m=1$ $n=-1.5$ $\mu_r=-2.25$ $\epsilon_r=-1.0$ $b=0.8a$)		β/k_0 ($m=1$ $n=-1.2$ $\mu_r=-1.44$ $\epsilon_r=-1.0$ $b=0.8a$)	
	HEM ₁₁	HEM ₁₂	HEM ₁₁	HEM ₁₂
37.0	0.0680876738510131		0.0680876766783905	
37.2	0.123733522898864		0.123733502886199	
37.4	0.160665092597961		0.160665106206512	
37.6	0.19012989354248		0.190129872891845	
37.8	0.215225118873596	0.0267978014272689	0.215225175301818	0.0267977687775611
38.0	0.237348229145812	0.105873566127777	0.237348184571533	0.105873534812088
38.2	0.25727340934906	0.146751288898468	0.257273394852752	0.146751251547546
28.4	0.275484053038024	0.178049888610839	0.275484053032837	0.178049758140869
38.6	0.292306148741149	0.204230030351257	0.292306150603790	0.204230137884979
38.8	0.307972480667114	0.227076569290161	0.307972322828674	0.227076582398071

表 3 左手介质磁导率对椭圆光波导传播特性的影响

$k_0 a$	β/k_0 ($m=1$ $n=-1.5$ $\mu_r=-2.25$ $\epsilon_r=-1.0$ $b=0.6a$)		β/k_0 ($m=1$ $n=-1.5$ $\mu_r=-1.2$ $\epsilon_r=-1.875$ $b=0.6a$)	
	HEM ₁₁	HEM ₁₂	HEM ₁₁	HEM ₁₂
27.8	0.0906264728164673		0.0906264270500183	
28.0	0.149435393218994		0.149435256080627	
28.2	0.190129956253051		0.190129893542480	
28.4	0.222883236251831	0.0650663035240173	0.222883281263732	0.0650663130737304
28.6	0.250841990219116	0.134579869544982	0.250842009164428	0.134579892372894
28.8	0.275484059585571	0.178049841140747	0.275484053038024	0.178049888610839
29.0	0.297647149642944	0.212159218887329	0.297647194338989	0.212159195252990
29.2	0.317861585540771	0.240933172180175	0.317861806433105	0.240933045535278
29.4	0.336489577392578	0.266121879745483	0.336489679183960	0.266121928367614
29.6	0.353791076660156	0.288677842407226	0.353791240869140	0.288677826931762

3 结论

本文用分离变量的方法,在略去高次项的情况下,得到的左手介质椭圆光波导偶模的本征方程,且奇偶模是简并的.通过数值计算,分析了椭圆波导的偏心率、左手介质的电容率、磁导率对左手介质椭

圆光波导基模传播特性的影响,数值计算结果表明,波导的椭圆度对左手介质光波导基模传播特性的影响较大,在略去高次项时,左手介质的电容率与磁导率对波导基模的传播特性较小.将左手介质椭圆光波导与右手介质椭圆光波导的基模传播特性进行的对比,发现在相同结构的情况下,相同折射率的左手

介质椭圆光波导与右手介质光波导的基模传播特性差别不大.

参考文献

- 1 Veselago V G. Electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ . *Sov Phys Uspekhs*, 1968, **10**(4): 509~514
- 2 Pendry J B, Holden A J, Robbins D J, *et al.* Conductors and enhanced nonlinear phenomena. *IEEE Trans Microwave Theory Tech*, 1999, **47**(11): 2075~2084
- 3 Smith D R, Padilla W J, Vier D C, *et al.* Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity. *Phys Rev Lett*, 2000, **84**(18): 4184~4187
- 4 Pendry J B. Negative refraction makes a perfect lens. *Phys Rev Lett*, 2000, **85**(18): 3966~3969, 4184~4187
- 5 杨立功, 顾培夫, 黄弼勤. 从几何光学研究负折射率透镜的有限尺寸效应. *光子学报*, 2003, **32**(11): 1196~1198
Yang L G, Gu P F, Huang B Q. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(11): 1196~1198
- 6 何金龙, 沈林放, 何赛灵, 等. 负折射率介质光纤的导模异常特性分析. *光子学报*, 2004, **33**(11): 1328~1330
He J L, Shen L F, He S L, *et al.* *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(11): 1328~1330
- 7 Gutiérrez-Vega J C. Theory and numerical analysis of the Mathieu functions, <http://homepages.mty.itesm.mx/jgutierrez/mathieu.htm>
- 8 董建峰, 聂秋华. 椭圆光波导解析解及第一个高阶模的截止频率研究. *光通信研究*, 1995, (3): 35~39
Dong J F, Nie Q H. *Study on Optical Communications*, 1995, (3): 35~39
- 9 Yeh G. Elliptical dielectric waveguide. *Journal of Applied Physics*, 1962, **11**(11): 3225~3243
- 10 Zhang S J, Jin J M. Computation of special functions. New York: John Wiley & Sons, Inc. 1996

Propagation Characteristics of Fundamental Mode in an Elliptical Optical Waveguide Made from Left Handed Materials

Xiong Tianxin^{1,2}, Yang Rugui¹

¹ Institute of Electromagnetic Fields and Microwave Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031

² School of Physics & Electronic Engineering, Sichuan Normal University, Chengdu 610066

Received date: 2005-11-08

Abstract Using the method of separation of variables in the elliptical coordinate system, the approximate eigenequation for an elliptical optical waveguide made from LHM is given. To find the propagation characteristics of fundamental mode in the elliptical optical waveguide, numerical methods are applied. Numerical examples reveal the influences of the permittivity, permeability of LHM and the eccentricity of the elliptical optical waveguide made from LHM on the fundamental mode propagation characteristics. These results show that the propagation characteristic of fundamental modes in the elliptical optical waveguide is influenced weakly by the permittivity and permeability of LHM and influenced strongly by the eccentricity of the elliptical optical waveguide. In addition, fundamental mode propagation characteristics in an elliptical optical waveguide made from LHM are compared with fundamental mode propagation characteristics in an elliptical optical waveguide made from RHM.

Keywords Elliptical optical waveguide; Left handed material; Propagation characteristic; Mathieu function



Xiong Tianxin was born in 1965. He received his master's degree in physics from Sichuan Normal University, Chengdu, China. Since 2001, he has been an associate professor. He is currently working toward Ph. D. at Southwest Jiaotong University, Chengdu, China. His research interests include electromagnetic theory, dielectric waveguides and microstrip antennas.