

求解梯度光纤模场的近似里兹-伽略金方法*

王子华 张 辉 肖中银

(上海大学通信与信息工程学院, 上海 200072)

摘 要 提出里兹-伽略金方法的一个近似或改进, 即里兹-伽略金方法仅仅用来得到梯度型光纤的传播常量和纤芯中的模式场. 包层场用修正贝塞尔函数以及已经求得两个参量: 包层径向衰减常量和场在纤芯-包层界面上的值重新构建. 计算结果表明包层场准确度的改进是相当显著的, 将这一近似方法应用于计算两根光纤之间的耦合系数, 其结果与准确值几乎没有办法区分.

关键词 光纤光学; 梯度型光纤; 拉盖尔-高斯函数展开; 模式场; 耦合系数

中图分类号 TN253 **文献标识码** A

0 引言

为了很好地设计和运用光纤及光纤器件, 必须先知道光纤的传播特性以及光纤中传播模式的电磁场分布. 此外, 光纤中传播模的准确的横向场分布对了解光纤特性, 计算光纤连接损耗, 微弯曲损耗以及耦合系数等都是至关重要的. 除了很少几种折射率分布形状光纤存在模场的解析解而外, 大多数光纤的模式场必须采用近似方法求解, 如微扰方法^[1], WKB 方法^[2], 或各种各样的变分方法^[3]. 求解梯度光纤还可以用数值方法, 如瑞利-里兹方法^[4], 幂级数展开方法^[5], 有限元方法^[6], 多层分割法^[7]等等. 虽然数值方法是精确的, 它们往往较繁琐而且计算时间很长. 使用拉盖尔-高斯基函数求解光纤的里兹-伽略金方法^[8]或变分方法^[9]似乎兼备了简单和准确两个优点, 且由于这些基函数与真正的光纤模式场很接近, 因此只需要计算很少几项就有足够的准确度了. 可是拉盖尔-高斯基函数来表示光纤包层场是很不适当的, 因为高斯函数衰减太快. 所以如果用很少几项拉盖尔-高斯基函数展开, 只保证纤芯场足够精确, 包层场准确度是很差的^[10].

本文用近似的里兹-伽略方法求解光纤模场. 在用里兹-伽略金方法得到传播常量和模式场之后, 舍弃拉盖尔-高斯函数包层场表示式, 代之以修正贝塞尔函数. 这样包层场的准确度得以改善, 包层场的表示式也大大简化了. 作为近似的里兹-伽略金方法的一个应用, 文中还计算了两根梯度光纤之间的耦合系数.

1 求解光纤的里兹-伽略金方法及其近似

考虑一个圆对称光纤, 其坐标选取为圆柱坐标 (r, θ, z) . z 轴与光纤轴线重合, 其折射率分布 $n(R)$ 为

$$n^2(R) = n_{cl}^2 + (n_{co}^2 - n_{cl}^2)F(R) \quad (1)$$

式中 n_{co} 为梯度型纤芯折射率最大值, n_{cl} 为均匀的包层折射率. 径向坐标被纤芯半径 a 归一化为 $R = r/a$. $F(R)$ 为归一化分布函数. 模场径向部分 Ψ 满足方程

$$\frac{d^2 \Psi}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\Psi}{dR} + [V^2(F(R) - B) - \frac{m^2}{R^2}] \Psi = 0 \quad (2)$$

式中 $V = ka \sqrt{n_{co}^2 - n_{cl}^2}$ 和 $B = [(\beta/k)^2 - n_{cl}^2]/(n_{co}^2 - n_{cl}^2)$ 为归一化频率与归一化传播常量, k 为自由空间传播常量, β 为模的传播常量, m 为周向模指数(模场周向分布为 $\cos m\theta$ or $\sin m\theta$). 将模场展开成拉盖尔-高斯基函数^[8]

$$\Psi = \sum_n c_n \phi_n \quad 0 < R < \infty \quad (3)$$

式中

$$\phi_n = [2V \frac{n!}{(n+m)!}]^{1/2} \exp(-\frac{X}{2}) X^{m/2} L_n^m(X) \quad (4)$$

式中 $X = VR^2$, $L_n^m(X)$ 为连带勒让得多项式^[11], n 为径向模指数. 式(4)中的基函数归一化为

$$\int_0^\infty \phi_n \phi_{n'} R dR = \delta_{nn'} \quad (5)$$

在实际计算过程中级数式(3)必须在有限项 $n = N$ 之后截断, 将其代入式(2), 再将式(2)两边乘以 ϕ_n 并在全空间进行积分, 便得到一线性方程组. 求解这一线性方程组是有现成程序调用的, 因此十分简便, 其结果会得到归一化传播常量和模场展开系数 c_n , 也即模式场 Ψ ^[8].

选取拉盖尔-高斯基函数展开有其独特的优点. 因为它们是无无限抛物形折射率分布的模场, 满足光纤中心及离轴线无限远处的边界条件, 并且处处连

* 国家自然科学基金(60277025)和上海市重点学科建设项目(T0102)资助
Tel: 021-56333252 Email: zhwang@staff.shu.edu.cn
收稿日期: 2005-03-29

续,其导数也处处连续. 它们用一个函数形式表示纤芯内及包层中的模场,这一优点也因此而产生一个重要的缺点,即基函数的高斯函数性态使得用其表示的模场在包层中衰减太快. 显然纤芯和包层模场用同一个函数表示,且里兹-伽略金方法只用很少几项展开的话,包层场的近似程度就会很差. 于是将包层场用修正贝塞尔函数来代替. 至于传播常量和纤芯中模场的准确度是很高的,保留不变. 这就是近似的里兹-伽略金方法,其径向模场成为

$$\Psi_m = \begin{cases} \Psi = \sum_n c_n \phi_n & 0 < R \leq 1 \\ \Psi(1) \frac{K_m(\omega R)}{K_m(\omega)} & 1 \leq R < \infty \end{cases} \quad (6)$$

式中用 Ψ 表示里兹-伽略金方法中的模场式(3), $\Psi(1)$ 表示其 $R=1$ 处的值, $\omega = \sqrt{BV}$ 为包层归一化衰减常量. 这样一来,没有增加任何一点计算就将包层场简化了. 包层场采用了精确的函数形式后,准确度也大大提高. 值得注意的是:式(6)中的 $\Psi(1)$ 与 ω 是近似的(尽管包层场的函数形式是精确的),随着展开项数的增加逐渐逼近它们的准确值. 与文献[4],[9]不同,那里虽然也用修正贝塞尔函数表示包层场,但是在求解方程之前;而这里是在求解方程之后.

由于阶跃折射率光纤的传播常量与模式场有精确解^[10],而阶跃光纤又是梯度光纤的一个特例,因此将其作为一个例子来检验本文方法的准确度. $V=2$ 时阶跃光纤的 LP_{01} 模在包层中径向场 Ψ 的相对误差随归一化径向坐标的变化曲线示于图1. 由式(3)表示的模场在 $N=10$ 处截断. 图中实线为本文方法结果;点线为求解光纤的里兹-伽略金方法结果^[8]. 同样的两种方法误差曲线的比较当 $V=5$ LP_{01} 模时,示于图2;当 $V=5$ LP_{02} 模时,示于图3;当 $V=4$ LP_{11} 模时,示于图4. 从图1~4可以看出,采用本文方法的近似(或改进)后,包层场的准确度大大提高,特别当 V 或 R 很大时更是如此. 于是求

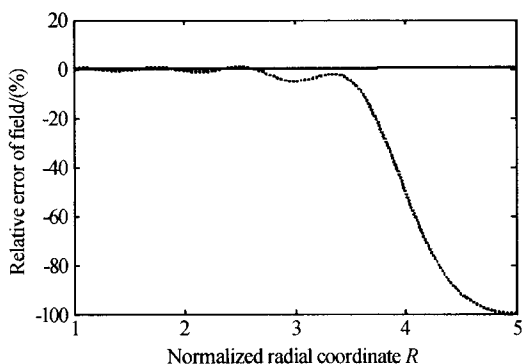


图1 $V=2$ 时 LP_{01} 模包层场的相对误差
Fig. 1 Relative error of field in cladding, for $V=2$ LP_{01} mode

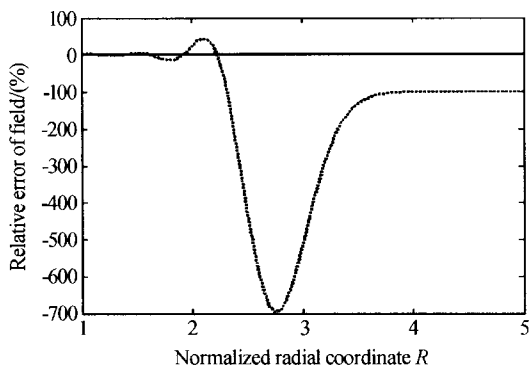


图2 $V=5$ 时 LP_{01} 模包层场的相对误差
Fig. 2 Relative error of field in cladding, for $V=5$ LP_{01} mode

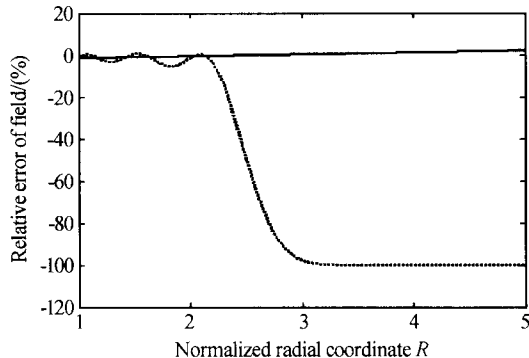


图3 $V=5$ 时 LP_{02} 模包层场的相对误差
Fig. 3 Relative error of field in cladding, for $V=5$ LP_{02} mode

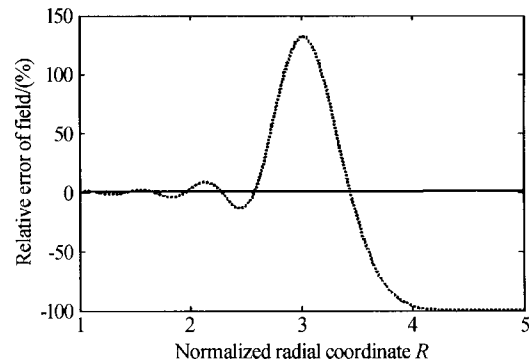


图4 $V=4$ 时 LP_{11} 模包层场的相对误差
Fig. 4 Relative error of field in cladding, for $V=4$ LP_{11} mode

解光纤的里兹-伽略金方法主要缺点就这样被克服掉了.

2 用近似的里兹-伽略金方法计算光纤耦合系数

由于耦合系数的计算要用到光纤包层场的积分^[12],包层场准确度的提高必然导致耦合系数准确度的提高,这就使本文方法找到了一个很好的应用^[13~15]. 下面用近似的里兹-伽略金方法计算两个相同的梯度光纤 LP_{01} 模之间的耦合系数. 设平行放置的两根光纤1和2,它们的纤芯半径分别为 a_1 和 a_2 (为简单计,这里考虑两根相同的光纤,于是有

$a_1 = a_2$), 具有圆对称的折射率分布

$$n_i^2(R_i, \varphi_i) = \begin{cases} n_{cl}^2 + (n_{co}^2 - n_{cl}^2)F_i(R_i) & \text{for } 0 \leq r_i \leq a_i \\ n_{cl}^2 & \text{for } a_i < r_i \end{cases} \quad (i=1,2) \quad (7)$$

(R_i, φ_i) 式中 $i=1,2$ 为它们以各自的轴线为中心的柱坐标, 这两个坐标的 z 轴沿横向错开一段距离 d . n_{cl} 为共同的包层折射率

耦合系数定义为^[12]

$$C_{12} = \frac{k}{2n_{cl} \text{core}2} \iint \Delta n_2^2(r_2) \Psi_1(r_1) \Psi_2(r_2) dA \quad (8)$$

式中 $\Delta n_2^2(r_2)$ 为纤芯 2 与其周围包层的折射率差, $\Psi_1(r_1)$ 和 $\Psi_2(r_2)$ 为假设光纤 1 或 2 单独存在时(或两根光纤相距无限远)的 LP_{01} 模式场. 将近似的里兹-伽略金方法得到的 Ψ_1 和 Ψ_2 代入式(8)计算耦合系数, 得到了更为精确的结果. 也因为两根阶跃光纤之间的耦合系数有精确的解析解, 将其作为一个例子来检验本文方法计算耦合系数的准确度. 不同 V 值情况下, 两根相同的阶跃光纤基模之间无量纲的耦合系数 $\frac{C_{12}a}{\sqrt{2\Delta}}$ (这里 Δ 为纤芯和包层的相对折

射率差)随归一化距离 $D = \frac{d}{a}$ 的变化曲线示于图 5. 这里展开项数目 $N=10$. 图中实线为 $V=3$, 虚线为 $V=4$, 点线为 $V=5$ 时的耦合系数; 精确值用小圆点“o”表示以进行比较. 由图 5 可见本文方法的结果与精确值几乎无法区分. 而用里兹-伽略金方法计算耦合系数的误差在展开项少到 $N=10$ 时是相当大的, 尤其是当间距 D 很大时.

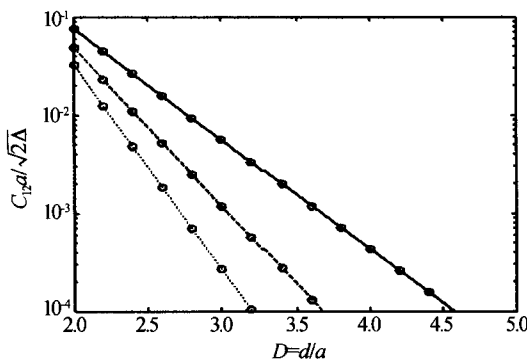


图 5 耦合系数与距离的关系
Fig. 5 The coupling coefficient as a function of distance

3 结论

本文提出里兹-伽略金方法的一个近似或改进, 即里兹-伽略金方法仅仅用来得到梯度光纤的传播常量和纤芯中的模式场. 包层场用准确的函数形式以及已经求得两个参量 w 和 $\Psi(1)$ 重新构建. 修正贝塞尔函数包层场比拉盖尔-高斯基函数展开式的包层场更简单更精确. 于是没有增加一点计算量

就克服了里兹-伽略金方法的主要缺点. 计算结果表明包层场准确度的改进是相当显著的, 特别是当 V 或 R 很大, N 很小的时候. 将这一近似方法应用于两根光纤之间耦合系数的计算, 其结果与准确值几乎没有办法区分. 而原来用里兹-伽略金方法计算耦合系数的准确度是不够的, 因为耦合系数的计算是需要用到包层场的积分的.

参考文献

- 1 Adams M J. The cladded parabolic-index profile waveguide: Analysis and application to stripe-geometry lasers. *Opt Quant Elect*, 1978, **10**(1): 17~29
- 2 Hartog A H, Adams M J. On the accuracy of the WKB approximation in optical dielectric waveguides. *Opt Quant Elect*, 1977, **9**(3): 223~232
- 3 Ghetak A K, Thyagarajan K. Graded index optical waveguides; a review, in E. Wolf ed. *Progress in Optics*, 1980, **XVIII**: 1~126
- 4 Okoshi T, Okamoto K. Analysis of wave propagation in inhomogeneous optical fibers using a variational method. *IEEE Trans Microwave Theory Tech*, 1974, **22**(11): 938~945
- 5 Gambling W A, Matsumura H, Ragdale C M. Wave propagation in a single-mode fiber with dip in the refractive index. *Opt Quant Elect*, 1978, **10**(5): 301~309
- 6 Okamoto K, Okoshi T. Vectorial wave analysis of inhomogeneous optical fibers using finite element method. *IEEE Trans Microwave Theory Tech*, 1978, **26**(2): 109~144
- 7 Clarricoats P J B, Chan K B. Electromagnetic wave propagation along radially inhomogeneous dielectric cylinders. *Electron Lett*, 1970, **6**(22): 694~695
- 8 Meunier J P, Pigeon J, Massot J N. A general approach to the numerical determination of modal propagation constants and field distributions of optical fibers. *Opt Quant Elect*, 1981, **13**(1): 71~83
- 9 Angelis G D, Panariello G, Scaglione A. A variational method to approximate the field of weakly guiding optical fibers by Laguerre-Gauss/Bessel expansion. *J Lightwave Technol*, 1999, **17**(12): 2665~2674
- 10 Adams M J. It discusses the slab waveguides but also suits to optical fibers. *An Introduction to Optical Waveguides*. New York: John Wiley & Sons, 1981. 100~102
- 11 Abramowitz M, Stegun A. *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover, 1965
- 12 Snyder A W. Coupled-mode theory for optical fibers. *J Opt Soc Am*, 1972, **62**(11): 1267~1277
- 13 鄢达, 李铮, 唐丹. 熔锥型单模光纤耦合器的模型. *光子学报*, 2003, **32**(11): 1316~1320
- Feng D, Li Z, Tang D. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**

- (11);1316~1320
- 14 薛春荣,祝生祥,肖志刚. 锥形光纤间的耦合特性. 光子学报,2004,33(7):803~805
Xue C,Zhu S X,Xiao Z G. *Acta Photonica Sinica*,2004,33(7):803~805
- 15 林小莉,李平,王强. 熔锥型光纤耦合器的扭转响应. 光子学报,2004,33(5):540~543
Lin X,Li P,Wang Q. *Acta Photonica Sinica*,2004,33(5):540~543

Approximate Ritz-Galerkin Method for Field Distribution of Graded-Index Optical Fibers

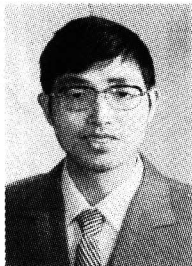
Wang Zihua,Zhang Hui,Xiao Zhongyin

School of Communications and Information Engineering, Shanghai University, Shanghai 200072

Received date:2005-03-29

Abstract Ritz-Galerkin method is used only for obtaining propagation constant and the radial mode field in core region of graded-index optical fibers. Cladding field has been constructed by using the accurate functional form (modified Bessel function) with two approximate parameters; the transverse decay constant in the cladding and the field value at core-cladding interface, which are already known. Numerical results show that the improvement on accuracy is significant. This approximate Ritz-Galerkin method has been applied to the calculation of coupling coefficient between two step-index optical fibers. Results are agreed well with exact values.

Keywords Fiber optics; Graded-index optical fibers; Laguerre-Gauss expansion; Modal fields; Coupling coefficient



Wang Zihua was born on September 27, 1946, in Zhejiang Province, received B. S. degree at Harbin Institute of Technology in 1968 and M. S. degree at Shanghai University of Science and Technology in 1981. Now he is a professor at School of Communication and Information Engineering, Shanghai University. His research interests include fiber and integrated optics, microwave theory and antenna. He is the author or co-author of more than 170 papers.