第35卷第6期　　光　子　学　报　　Vol. 35 No. 6
2006年6月　　ACTA PHOTONICA SINICA　　June 2006

标量衍射理论的非傍轴近似及其有效性*

邓小玖　高　峰　刘彩霞　王　飞　胡继刚

（合肥工业大学物理系，合肥 230009）

摘　要　当光束束腰（或衍射孔孔径）可与波长相比拟或光束具有较大的发散角时，傍轴近似不再成立．在标量瑞利-索末菲衍射积分的基础上，进一步研究了衍射场的非傍轴近似解，并详细分析了解的有效性．以平面波圆孔衍射为例，对衍射场的精确解、非傍轴近似解以及菲涅耳近似解进行了详细的数值计算和比较研究．结果表明，非傍轴近似对微小孔衍射非常精确、有效．

关键词　物理光学；标量衍射理论；非傍轴近似；圆孔衍射；有效性

中图分类号　O463.1　　**文献标识码**　A

0　引言

对于大多数光学衍射与光束传输的实际问题，傍轴标量衍射理论都是非常精确、有效的．然而，对强聚焦光束或二极管激光器发出的光束，当束腰宽度为波长量级、发散角很大时，傍轴近似不再成立，甚至标量近似都已不再成立[1~7]．近年来国内外关于非傍轴衍射的研究工作十分活跃，文献[5,6]给出了在自由空间传播的非傍轴光束的级数解，级数解的适用范围与光束的束腰宽度、发散角、传输距离以及所使用的级数解的阶次有关[5,8]．文献[9～11]给出了平面孔衍射场的非傍轴近似解，其有效性问题还需要作进一步研究．本文在标量瑞利-索末菲衍射积分的基础上，进一步研究了衍射场的非傍轴近似解，详细分析了解的有效性．以平面波圆孔衍射为例，对衍射场的精确解、非傍轴近似解以及菲涅耳近似解进行了详细的数值计算和比较研究．

1　衍射场的非傍轴近似解

光波入射到无限大不透明带孔 Σ 的平面衍射屏上时，$z>0$ 空间的标量衍射场，一般采用第一类瑞利-索末菲衍射积分表示[10,12]

$$E(x,y,z)=\frac{k}{2\pi\mathrm{i}}\iint_{\Sigma}E(x_1,y_1)\frac{\exp(\mathrm{i}kR)}{R}\cdot\left(1+\frac{\mathrm{i}}{kR}\right)\frac{z}{R}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1 \tag{1}$$

式中 $k=2\pi/\lambda$，$R=[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+z^2]^{1/2}$ 为源点 $(x_1,y_1,0)$ 与场点 (x,y,z) 之间的距离．式(1)满足 $z=0$ 处衍射场的边界条件，通常被认为是描述整个衍射空间 $(z>0)$ 标量衍射场的精确解．虽然由式(1)可以精确计算非傍轴标量衍射场，然而由于其数学与数值计算上的复杂性，在实际应用中极为不便，需要寻找有效的近似公式．为了对式(1)作非傍轴近似，在式(1)的指数因子中将 R 近似表示为

$$R\approx r+\frac{x_1^2+y_1^2-2xx_1-2yy_1}{2r} \tag{2}$$

式中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，其它项中取 $R\approx r$，并假设

$$kR\gg 1 \tag{3}$$

则式(1)近似表示为

$$E(x,y,z)\approx\frac{1}{\mathrm{i}\lambda}\cdot\frac{z}{r^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\iint_{\Sigma}E(x_1,y_1)\cdot\exp\left[\frac{\mathrm{i}k(x_1^2+y_1^2)}{2r}\right]\exp\left[\frac{-\mathrm{i}k(xx_1+yy_1)}{r}\right]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1 \tag{4}$$

式(4)便是标量衍射的非傍轴近似公式，与众所周知的菲涅耳衍射公式非常相似，称之为广义菲涅耳衍射，在傍轴区过渡到菲涅耳衍射．非傍轴近似的条件可进一步表示为

$$r\gg\lambda \tag{5a}$$

$$r^2\gg(x_1^2+y_1^2-2xx_1-2yy_1)_{\max} \tag{5b}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{(x_1^2+y_1^2-2xx_1-2yy_1)^2_{\max}}{8r^3}<\frac{\pi}{16} \tag{5c}$$

式中不等式(5c)右边选取 $\pi/16$，能基本满足式(4)近似成立的要求，但根据准确度要求，仍具有一定的任意性，以上近似条件为非傍轴近似的充分条件．显然，衍射孔孔径较小时（与光波波长 λ 相比），非傍轴近似的适用范围由式(5a)、(5b)、(5c)共同决定，孔径较大时由不等式(5c)确定．

2　圆孔的非傍轴衍射及其有效性

设 x_1oy_1 面上，有一无限大不透明平面屏，屏上开有一半径为 ρ_0 的小圆孔，圆心在坐标原点，$z>0$ 为衍射区．设入射光为垂直照射线偏振的单位振幅单色平面波，假设

$$E(x_1,y_1,0)=\begin{cases}1 & x_1^2+y_1^2\leqslant\rho_0^2\\0 & x_1^2+y_1^2>\rho_0^2\end{cases} \tag{6}$$

---

*教育部专项科研基金（011001B2）和合肥工业大学科研发展基金（041003F）资助项目

Tel：0551-2902262　　Email：dengxjxls@sina.com

收稿日期：2005-09-05

将式(6)代入式(4),可求得圆孔衍射的非傍轴近似解

$$E_a(x,y,z)\approx\frac{kz}{\mathrm{i}r^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\int_0^a\exp\left(\frac{\mathrm{i}k\rho_1^2}{2r}\right)J_0(k\rho\rho_1/r)\rho_1\mathrm{d}\rho_1 \tag{7}$$

式中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\rho_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$. 将式(7)应用于傍轴区便过渡到圆孔的菲涅耳衍射[13]

$$E_b(x,y,z)=\frac{2\pi}{\mathrm{i}z\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\exp\left(\frac{\mathrm{i}k\rho^2}{2z}\right)\cdot\int_0^a\exp\left(\frac{\mathrm{i}k\rho_1^2}{2z}\right)J_0(k\rho\rho_1/z)\rho_1\mathrm{d}\rho_1 \tag{8}$$

运用与第一类瑞利-索末菲衍射积分等价的角谱衍射理论计算圆孔衍射的精确解[14~16]

$$E_c(x,y,z)=\int_0^\infty\rho_0J_1(\rho_0k_\rho)J_0(\rho k_\rho)\cdot\exp\left(\mathrm{i}z\sqrt{k^2-k_\rho^2}\right)\mathrm{d}k_\rho \tag{9}$$

将非傍轴近似条件式(5c)应用于圆孔衍射,可得圆孔衍射非傍轴近似解的适用范围为

$$r^3>4(\rho_1^2-2\rho_1\rho\cos\theta)_{\max}^2/\lambda=4(\rho_0^2+2\rho_0\rho)^2/\lambda \tag{10}$$

式中 θ 为矢量 $\boldsymbol{\rho}$ 与 $\boldsymbol{\rho}_1$ 之间的夹角. 在相同准确度要求下圆孔菲涅耳衍射的适用范围可表示为[17]

$$z^3>4(\rho_1^2+\rho^2-2\rho_1\rho\cos\theta)_{\max}^2/\lambda=4(\rho_0+\rho)^4/\lambda \tag{11}$$

数值计算表明,由不等式(10)确定的圆孔衍射的非傍轴近似条件是充分的,但并非必要. 适当放宽式(10)的要求,采用

$$r^3>4(\rho_0^2+\rho_0\rho)^2/\lambda \tag{12}$$

作为圆孔衍射的非傍轴近似条件,则更为准确. 取 $\rho_0=0.5\lambda$、λ、2λ,由式(11)、(12)计算圆孔衍射的非傍轴近似与菲涅耳近似的适用范围,其范围为相应曲线与 I 轴构成的区间,如图 1. 图中 α,β,γ 为非傍轴近似; α',β',γ' 为菲涅耳近似; $\alpha,\alpha'-\rho_0=0.5\lambda$; $\beta,\beta'-\rho_0=\lambda$; $\gamma,\gamma'-\rho_0=2\lambda$. 由式(7)、(8)、(9)计算观察面上衍射场的强度分布,如图 2,曲线 a、b、c 分别表示圆孔标量衍射场的非傍轴近似解 E_a、菲涅耳近似解 E_b 与精确解 E_c.

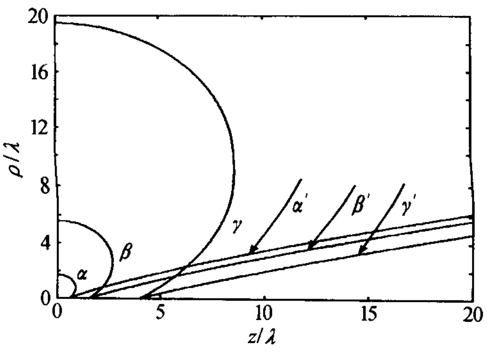
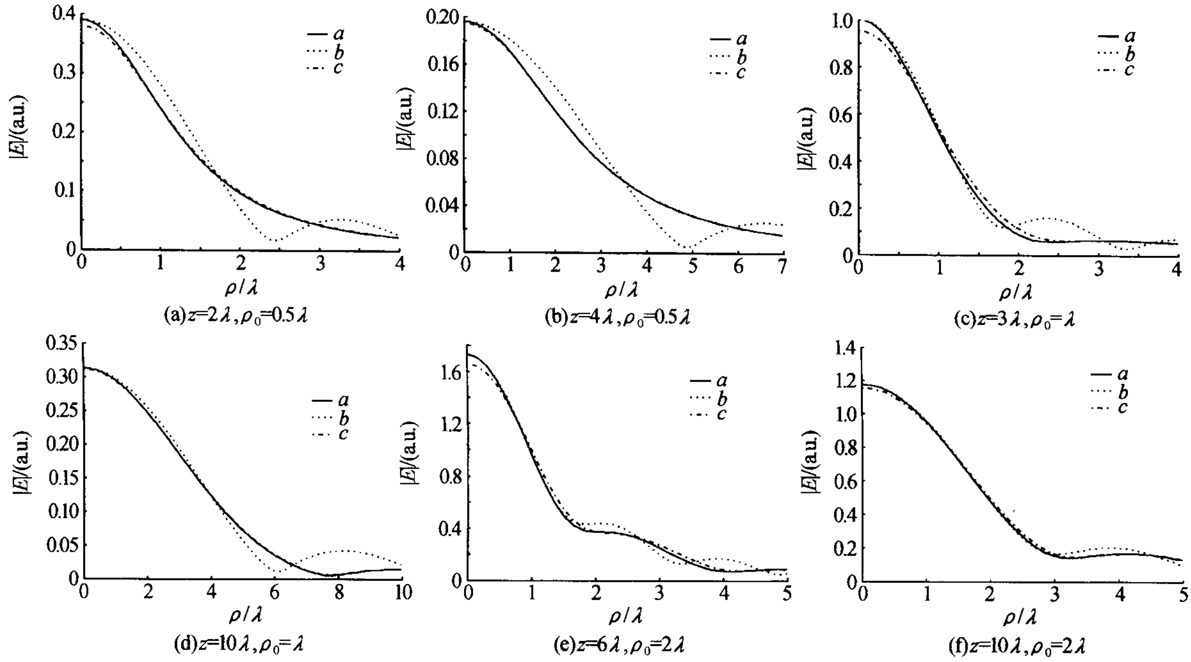


图 1　非傍轴近似与菲涅耳近似适用范围比较

Fig. 1　Comparison of the applicable region between the non-paraxial aproximation and fresnel approximation



(a)$z=2\lambda,\rho_0=0.5\lambda$　(b)$z=4\lambda,\rho_0=0.5\lambda$　(c)$z=3\lambda,\rho_0=\lambda$

(d)$z=10\lambda,\rho_0=\lambda$　(e)$z=6\lambda,\rho_0=2\lambda$　(f)$z=10\lambda,\rho_0=2\lambda$

图 2　场振幅随 ρ/λ 的变化

Fig. 2　Field aplitudes versus ρ/λ

3 结论

计算结果表明,除衍射孔附近的较小区域外,非傍轴近似解(广义菲涅耳衍射)与衍射场的精确积分解非常好地吻合,而且数学形式也比较简单,能节省大量计算机时. 由式(12)确定的圆孔衍射非傍轴近似的适用范围,在近轴区,还应满足 $z\gg\lambda$ 和 $z\gg\rho_0$ 的条件(一般取 $z>3\lambda$ 和 $z>3\rho_0$,即可满足一定的准确度要求). 由图 1,2 可知,圆孔衍射非傍轴近似的适用范围要远远大于菲涅耳近似,菲涅耳近似不能

描述微小孔的非傍轴衍射．最后必须强调指出，研究光束的非傍轴传播，还须考虑光场的矢量修正，限于篇幅，在此不作进一步讨论．

参考文献

1 Agrawal G P, Pattanayak D N. Gaussian beam propagation beyond the paraxial approximation. *J Opt Soc Am A*,1979,**69**(4): 575～578

2 Takenaka T, Yokota M, Fukumitsu O. Propagation of light beams beyond the paraxial approximation. *J Opt Soc Am A*, 1985,**2**(6): 826～829

3 Duan Kailiang, Lü Baida. Propagation properties of vectorial elliptical Gaussian beams beyond the paraxial approximation. *Optics & Laser Technology*, 2004, **36**(6): 489～496

4 徐锦心，赵道木，周国泉，等．半导体激光器的 M^2 因子可以小于 1. 光子学报，2001，**30**(3)：381～383
Xu J X, Zhao D M, Zhou G Q, *et al*. *Acta Photonica Sinica*,2001,**30**(3): 381～383

5 Chen C G, Konkola P T, Ferrera J, *et al*. Analyses of vector Gaussian beam propagation and the validity of paraxial and spherical approximations. *J Opt Soc Am A*, 2002,**19**(2): 404～412

6 Ciattoni A, Crosignani B, Porto P D. Vectorial free-space optical propagation: a simple approach for generating all-order nonparaxial corrections. *Optics Communications*,2000,**177**(1-6): 9～13

7 Varga P, Török P. The Gaussion wave solution of Maxwell′s equations and the validity of scalar wave approximation. *Optics Communications*, 1998, **152**(1-3): 108～118

8 段开椋，吕百达．非傍轴光束级数修正解的有效性．中国激光，2004，**31**(4)：432～436
Duan K L, Lü B D. *Chinese J Lasers*,2004,**31**(4): 432～436

9 Gibson S F, Lanni F. Diffraction by a circular aperture as a model for three-dimensional optical microscopy. *J Opt Soc Am A*,1989,**6**(9): 1357～1367

10 Sheppard C J R, Hrynevych M. Diffraction by a circular aperture: a generalization of Fresnel diffraction theory. *J Opt Soc Am A*, 1992,**9**(2): 274～281

11 Duan K L, Lü B D. Nonparaxial diffraction of vectorial plane waves at a small aperture. *Optics & Laser Technology*, 2005,**37**(3): 193～197

12 Harvey J E. Fourier treatment of near field scalar diffraction theory. *Am J Phy*,1979,**47**(11): 974～980

13 江晓清，林强．圆孔“衍射波”的位相特性．光子学报，2000，**29**(5)：440～443
Jiang X Q, Lin Q. *Acta Photonica Sinica*, 2000, **9**(5): 440～443

14 邓小玖，吴本科．微小孔近场衍射中的传播波和倏逝波．计算物理，2001，**18**(3)：211～214
Deng X J, Wu B K. *Chinese J Computational Physics*, 2001,**18**(3): 211～214

15 周国泉，赵道木，王绍民．平面波经小圆孔衍射的轴上光强特性．光学学报，2003，**23**(1)：22～25
Zhou G Q, Zhao D M, Wang S M. *Acta Optica Sinica*, 2003,**23**(1): 22～25

16 周国泉，赵道木，王绍民．平面波经微小圆孔衍射的传输特性．光子学报，2002，**31**(7)：874～876
Zhou G Q, Zhao D M, Wang S M. *Acta Photonica Sinica*,2002,**31**(7): 874～876

17 Goodman J W. 傅里叶光学导论．北京：科学出版社，1976. 66～67
Goodman J W. Introduction to Fourier Optics. Beijing: Science Press, 1976. 66～67

Non-paraxial Approximation of Scalar Diffraction Theory and Its Validity

Deng Xiaojiu, Gao Feng, Liu Caixia, Wang Fei, Hu Jigang
Department of physics, Hefei University of Technology, Hefei 230009

Received date: 2005-09-05

Abstract It is well known that the paraxial approximation is no longer valid for the beams with large divergence angle and small spot size comparable with the wavelength. Thus, a rigorous non-paraxial treatment becomes necessary. In this paper, based on the scalar Rayleigh-Sommerfeld diffraction formula, the non-paraxial approximation solution and its validity are studied. Detailed numerical calculations for the exact solution, non-paraxial approximation solution and Fresnel approximation solution of circular aperture diffraction are performed and compared; It is shown that the non-paraxial approximation solution is rigorous and valid for the diffraction of a small aperture.

Keywords Physical optics; Scalar diffraction theory; Non-paraxial approximation; Circular aperture diffraction; Validity

Deng Xiaojiu was born in 1960. He received his B. S. degree from the Department of Modern Physics of University of Science and Technology of China in 1983. He received his M. S. degree from Hefei University of Technology in 1989. He is now a professor in the Department of physics, Hefei University of Technology. He has published over 50 papers. His major research interests include diffraction optics, beam transformation and the basic theory of quantum mechanics.