

单模光纤弯曲损耗理论模型的修正

王雪珍 卞保民 纪运景 李振华

(南京理工大学信息物理与工程系, 南京 210094)

摘 要 考虑到光纤在弯曲后由于内应力的作用而引起的折射率改变, 对单模光纤弯曲损耗的理论模型进行了修正, 并将修正前后的理论模型的计算结果与实验结果进行比较. 结果表明, 修正后的理论模型计算结果更加符合实验值, 这为分析强弯曲状态下单模光纤的导光特性提供了重要的参考依据.

关键词 单模光纤; 弯曲损耗; 内应力; 保角变换

中图分类号 TN252 **文献标识码** A

0 引言

随着单模光纤的应用日益广泛, 对其宏弯损耗特性的研究也日益引起人们的重视. 在理论上, 可以求解弯曲光纤的本征方程来分析其弯曲损耗, 但是数学计算过程十分繁琐. 为此, 通常采用近似理论方法^[1~7]或数值计算方法^[8,9]研究. 其中典型的单模光纤弯曲损耗的理论模型思路为: 将弯曲损耗与单模光纤基模传播常量虚部联系^[10]; 将传播常量虚部与波动方程后向场在轴芯上的强度联系^[11]; 而后求解由弯曲光纤转化而来的等效直光纤的波动方程, 得到后向场在光纤轴芯上的强度进而得到弯曲损耗系数^[4,6]. 在求解等效直光纤的折射率分布时, 忽略了弯曲光纤的折射率分布与原直光纤的差异, 这样会使得最终计算得到的等效直光纤的折射率相对于原直光纤的变化比实际情况变化大. 为了修正这种差异, 有文献^[12]指出, 需要对弯曲半径进行修正. 但是对于不同的光纤, 不同波长的传输光, 没有一个统一的修正公式.

为了修正这种差异, 本文从等效直光纤实际的折射率分布出发, 在推导等效直光纤的折射率分布时, 考虑了弯曲光纤相对于原直光纤由于内应力的产生而引起的折射率变化, 对此模型进行修正, 修正后的理论模型结果比较好地与实验结果相符.

1 理论模型

1.1 光纤的弯曲损耗

将求解单模光纤的弯曲损耗转化为求解弯曲光纤基模传播常量的虚部. 据 C. Vassallo 的研究, 弯曲光纤传播常量的虚部跟传输波后向场在光纤轴芯上的强度有关, 为了求解后向场在光纤轴芯上的强度, 可以求解等效直光纤的波动方程^[4,6], 此等效直光纤是利用保角变换将弯曲光纤的几何形变转换成

折射率畸变得到的.

根据光纤的模式理论^[10], 某个模式对应的传播常量 β_i 是该模式的特征参量. 如将 β_i 的实部表示为 $\text{Re}(\beta_i)$, 虚部表示成 $\text{Im}(\beta_i)$, 则其波动方程的通解可表示为

$$u = u_0 \exp [(\text{Im}(\beta_x)x + \text{Im}(\beta_y)y + \text{Im}(\beta_z)z)] \cdot \exp \{-j[\text{Re}(\beta_x)x + \text{Re}(\beta_y)y + \text{Re}(\beta_z)z]\} \quad (1)$$

式中 u 表示 E, H, D, B 的任一坐标分量, u_0 表示振幅.

近似认为单模光纤中基模只沿着 z 方向传播. 当光纤为直光纤时, 其 β_z 的虚部为零, 而相应的弯曲光纤 β_z 的虚部将不为零, 可将弯曲损耗系数 α 表示为

$$\alpha = \ln(P_o/P_i) = \ln[u_o/u_i]^2 = -2\text{Im}(\beta_z) \quad (2)$$

式中 P_o, P_i 分别表示输出和输入光功率.

而传播常量虚部与后向场在光纤轴芯上的强度有一定的关系^[11]

$$\text{Im}(\beta_z) = \frac{u^2}{\beta V^2 K_1^2(\alpha w)} \Psi_{\text{pert}}(0, 0) \quad (3)$$

式中 β 表示传播常量, V 表示归一化频率, K_1 表示变形的贝塞尔函数, w 表示包层中横向传播常量, Ψ_{pert} 表示后向场.

为了获得弯曲光纤中后向传播场在光纤轴芯上的强度, 直接求解弯曲光纤的波动方程在数学上比较繁琐, 通常的做法是将弯曲光纤等效成直光纤^[4,6], 两者的区别在于将弯曲光纤的几何形变转换成等效直光纤的折射率畸变. 等效直光纤的波动方程如下

$$\frac{d^2 \tilde{\Psi}_q(x, \zeta)}{dx^2} + \{k_0^2 n^2 - \beta_0^2 - \zeta^2\} \Psi_q(x, \zeta) = 0 \quad (4)$$

式中 ζ 为 y 分量的傅里叶变换共轭量, β_0 为未受扰动直光纤基模传播常量.

最后通过计算后向场轴芯上的强度得到弯曲损耗系数为^[6]

$$\alpha = 2 \frac{u^2}{\beta V^2 K_1^2(W)} \int_0^\infty \frac{\exp[-a(w^2 + \zeta^2)^{1/2}]}{(w^2 + \zeta^2)^{1/2}} \cdot$$

$$\frac{Ai[X_2(0, \zeta)]}{Bi[X_2(a, \zeta)]} \left\{ \frac{\chi_2^{1/2} \chi_3^{1/2}}{[\chi_2 \cos^2 \Theta(\zeta) + \chi_3 \sin^2 \Theta(\zeta)]} \right\} d\zeta \quad (5)$$

式中

$$u = (k_0^2 n_1^2 - \beta^2)^{1/2} \quad (6)$$

$$w = (\beta^2 - k_0^2 n_2^2)^{1/2} \quad (7)$$

$$W = w \cdot a \quad (8)$$

$$\begin{cases} \chi_q = \left(\frac{2k_0^2 q_a^2}{R}\right)^{2/3} [-X_q(b, \zeta)] \\ \Theta(\zeta) = \frac{2}{3} [-X_q(b, \zeta)]^{3/2} + \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (9)$$

$$X_q(x, \zeta) = \left(\frac{R}{2k_0^2 n_q^2}\right)^{2/3} \{\beta^2 + \zeta^2 - k_0^2 n^2\} \quad (10)$$

式中 a 为光纤纤芯半径, b 为包层半径, n 是等效直光纤的折射率分布, β 为单模光纤基模的传播常量, k_0 为真空中的波数, Ai, Bi 是艾利函数, R 为弯曲半径, n_q 表示在 q 区域光纤的折射率, $q=2, 3$ 分别表示在包层和保护层.

要计算上式, 需要知道等效直光纤的折射率分布形式.

1.2 等效直光纤的折射率分布

如图 1, 推导等效直光纤的折射率分布应该分成两步. 首先考虑由原先的直光纤转变成弯曲光纤时弯曲光纤的折射率分布 $n_u(x', y')$ 的形式, 而后考虑将弯曲光纤的几何形变转化成折射率畸变进而得到几何形状等同于原直光纤的等效直光纤的折射率分布 $n(u, v)$. 原阶跃均匀直光纤的折射率分布形式为 $n_0(x, y)$, 纤芯、包层、保护层的折射率分别为 n_1, n_2, n_3 .

图 2 为均匀纯弯曲光纤的示意图, 即为图 1 的中间部分. 根据力学分析^[13], 可以假设光纤弯曲时

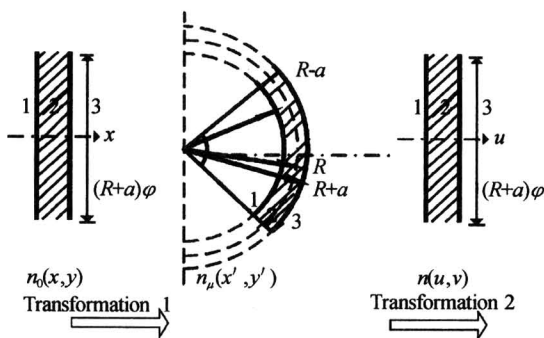


图 1 折射率变换图
Fig. 1 Transformation of refractive index

原来的横截面仍为平面, 而且只在轴向有拉伸应力. z 是光纤纤轴, 与 z 轴垂直的是 x, y 平面.

下面分析弯曲光纤内应力与应变的关系. 应力应变的符号分别为 σ, s , 两者都为二阶对称张量, 所

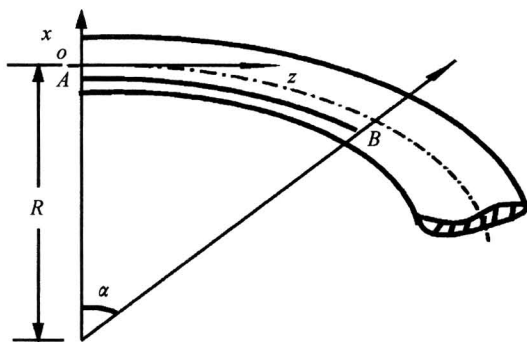


图 2 均匀纯弯曲光纤
Fig. 2 Sketch map of even pure bending fibers

以下标缩写规则将之表示为有 6 个分量的向量. 如图 2, 与 z 轴平行的线段 \overline{AB} 弯曲前的长度为

$$dz = R d\alpha \quad (10)$$

弯曲后光纤径向各点对应的长度为

$$dz' = (R + x) d\alpha \quad (11)$$

则 z 方向的应变为

$$s_3 = \frac{dz' - dz}{dz} = \frac{x}{R} \quad (12)$$

因为只有轴向应力, 便有 $\sigma_3 \neq 0, \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = 0$, 据胡克定律, 在弹性范围内应力与应变有如下关系

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ s_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ s_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned} \quad (13)$$

$$s_4 = \frac{1}{G} \sigma_4 \quad s_5 = \frac{1}{G} \sigma_5 \quad s_6 = \frac{1}{G} \sigma_6$$

如此, 便得到应变的各个分量

$$\begin{aligned} s_4 &= s_5 = s_6 = 0 \\ s_1 &= s_2 = -\mu s_3 = -\mu x / R \end{aligned} \quad (14)$$

式中, μ 是光纤材料的泊松比, E 是拉压弹性模量, G 为剪切弹性模量.

根据弹光效应将应变与相对介电抗渗张量的变化相联系

$$\begin{bmatrix} \delta b_1 \\ \delta b_2 \\ \delta b_3 \\ \delta b_4 \\ \delta b_5 \\ \delta b_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{12} & p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (p_{11} - p_{12})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (p_{11} - p_{12})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (p_{11} - p_{12})/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{bmatrix} \quad (15)$$

式中 $[\delta b_{ij}]$ 表示有无应力作用两种情况下相对介电抗渗张量的变化, $[p_{ij}]$ 表示材料的弹光系数张量矩阵. 可得到相对介电抗渗张量各分量的变化

$$\begin{aligned}\delta b_1 &= p_{11}\mu x/R + p_{12}\mu x/R - p_{12}x/R = -p'x/R \\ \delta b_2 &= p_{12}\mu x/R + p_{11}\mu x/R - p_{12}x/R = -p'x/R \\ \delta b_3 &= p_{12}\mu x/R + p_{12}\mu x/R - p_{11}x/R = -p''x/R \\ \delta b_4 &= \delta b_5 = \delta b_6 = 0\end{aligned}\quad (16)$$

式中

$$\begin{aligned}p' &= \mu p_{11} + (\mu - 1)p_{12} \\ p'' &= 2\mu p_{12} - p_{11}\end{aligned}\quad (17)$$

弯曲前

$$[n_{i,j}^2] = [b_\mu(0)]^{-1}\quad (18)$$

弯曲后

$$n_\mu^2 = b_\mu^{-1}(s) = \frac{1}{b_\mu(0) + \delta b_\mu} = n_0^2 \frac{1}{1 + n_0^2 \delta b_\mu}\quad (19)$$

式(18)、(19)中的 $b_\mu(0)$ 和 $b_\mu(s)$ 分别为无应力作用和有力作用下材料的相对介电抗渗张量.

光纤的弹光效应很微弱, $n_0^2 \delta b_\mu \ll 1$,于是把上式展开,忽略二阶项,得

$$n_\mu^2 = n_0^2 (1 - n_0^2 \delta b_\mu)\quad (20)$$

折射率各个分量的变化为

$$\begin{aligned}\delta n_1^2 &= \delta n_2^2 = n_0^2 (n_0^2 p'x/R) \\ \delta n_3^2 &= n_0^2 (n_0^2 p''x/R) \\ \delta n_4^2 &= \delta n_5^2 = \delta n_6^2 = 0\end{aligned}\quad (21)$$

忽略双折射效应,得到弯曲光纤与直光纤的折射率关系如下

$$n_\mu^2 = n_0^2 (1 + n_0^2 p'x/R)\quad (22)$$

等效直光纤的折射率分布的推导过程. 文献^[14]用保角变换将弯曲矩形波导的几何形状等效成折射率发生了一定畸变的等效直矩形波导. 这里套用其思想,将这种方法运用到应力作用下的弯曲光纤.

如图 1,如要将 $x'z'$ 复平面内阴影部分变换为 uv 复平面阴影部分,则可利用下面的解析函数 f

$$W = f(Z) = R \ln(Z/R)\quad (23)$$

式中

$$\begin{aligned}Z &= x' + iy' = \rho \cos \varphi + i \rho \sin \varphi \\ W &= U + iv\end{aligned}\quad (24)$$

则

$$\left| \frac{dZ}{dW} \right| = \exp(u/R)\quad (25)$$

当 $Z=R-a$ 时

$$u_{\min} = R \ln(1-a/R)\quad (26)$$

当 $Z=R+a$ 时

$$u_{\max} = R \ln(1+a/R)\quad (27)$$

所以变换的直光波导在 u 轴上是在

$$R \ln(1-a/R) \leq u \leq R \ln(1+a/R)\quad (28)$$

的范围内.

设

$$k_{x,y}^2 = k_0^2 n_\mu^2\quad (29)$$

这里的 k_0 为传输光在真空中的波数,根据保角变换,得到

$$k_{u,v}^2 = |dZ/dW|^2 k_0^2 n_\mu^2 = k_0^2 n_\mu^2 \exp(2u/R)\quad (30)$$

又因为 $|u| \ll R$,所以

$$k_{u,v}^2 \approx k_0^2 n_\mu^2 (1 + 2u/R)\quad (31)$$

注意:这里的 k 的下标表示其所在的坐标系.

根据式(26)和(27)可知

$$u_{\min} \approx -a\quad (32)$$

$$u_{\max} \approx a$$

所以可以认为变换前后几何形状没变,只是折射率发生了变化,而且变换后的几何形状的中心与原来直光纤的一致,所以可以将 u 换成 x ,得到

$$n^2 = n_\mu^2 (1 + 2x/R)\quad (33)$$

由式(33)和式(22)综合,并忽略二阶项,得到等效直光纤的折射率分布形式为

$$n^2 = n_0^2 [1 + (2 + n_0^2 p')x/R]\quad (34)$$

2 结果比较与分析

提取了文献^[7]中的单模光纤弯曲损耗的实验数据,此光纤是ND74型阶跃光纤,纤芯半径是 $1.95 \mu\text{m}$,包层半径是 $48 \mu\text{m}$,折射率参量如表 1. 并将修正前后的计算结果与之进行了比较,如图 4. 虚线是修正前的理论模型计算结果;实线是修正后的理论模型计算结果;星号标记的点表示实验结果. 计算过程中的弹光系数和泊松比为^[15].

$$P_{11} = 0.121; P_{12} = 0.270; \mu = 0.1.$$

表 1 光纤参量表

λ/nm	n_1	n_2	n_3
633	1.5145	1.5105	1.53
790	1.5113	1.5073	1.53

从图 4 中可看出,修正后得到的理论计算结果比修正前小,更符合实验计算结果. 图 3 为修正前后等效直光纤的折射率分布,图(b)为图(a)纤芯部分折射率分布的放大图. 从图中可以看出,修正后等效直光纤的折射率相对于原直光纤的差异要比修正前小,因为原理论模型没有将弯曲后光纤由于内应力的作用而引起的折射率变化考虑在内,而这种变化会使得远离曲率中心区域的折射率较原来的变小,靠近曲率中心区域的折射率较原来的变大;利用保角变换将弯曲光纤的几何形变变成等效直光纤的折射率畸变的变化趋势与前面的情况相反. 前者的变化趋势会拉大纤芯和包层中的折射率差异,而

后者则会减小. 这样就使得修正后理论模型的计算结果小于修正前的模型得出的结果, 根据数值计算还发现修正后的结果很好地与实验数据相符合.

从图 4 中还可以发现弯曲损耗随着弯曲半径变

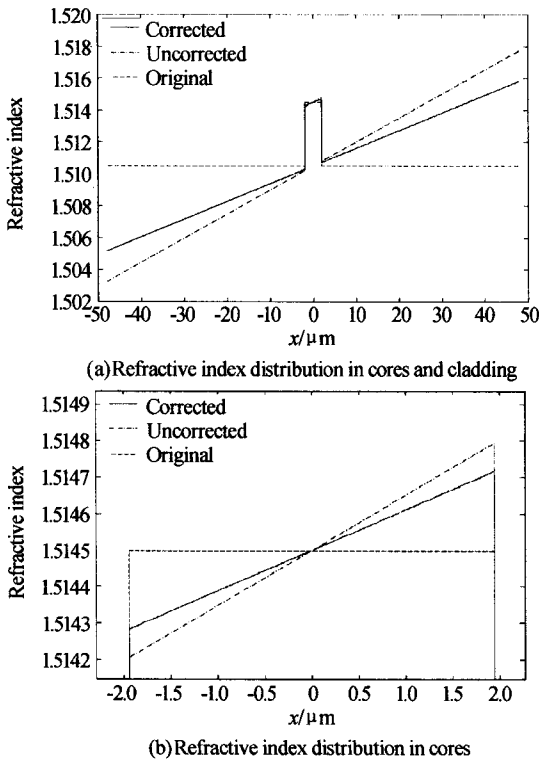


图 3 折射率分布
Fig. 3 Refractive index distribution

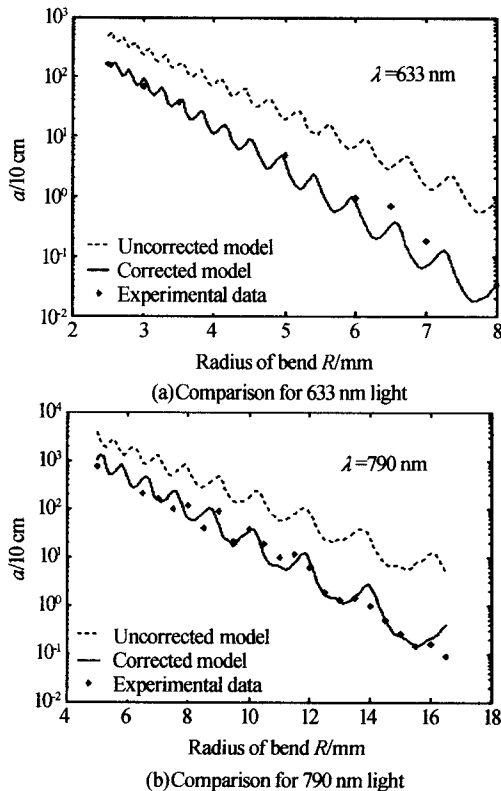


图 4 修正前后理论值与实验结果的比较
Fig. 4 Comparison between theoretical and experimental results

化曲线的一个显著特点, 即单位弧长单模光纤弯曲损耗随弯曲半径是呈振荡变化的. 这是由在包层中传播的 Whispering gallery 模与包层中的基模发生耦合作用导致的^[7]. 当两个模式发生同相耦合的时候, 出现弯曲损耗的极小值; 当发生异相耦合时, 出现弯曲损耗的极大值. 对于同一根光纤, 振荡的周期及峰值、谷值的位置随着传输光波长和弯曲半径的不同而不同.

3 结论

本文对目前比较典型的单模光纤弯曲损耗的理论模型进行了修正, 考虑了原模型中忽略的将光纤弯曲成弯曲光纤时由于内应力的产生而导致的折射率变化, 并进行了理论计算. 结果表明, 修正后的理论模型的计算结果与实验结果基本一致.

参考文献

- Marcuse D. Curvature loss formula for optical fibers. *J Opt Soc Am*, 1976, **66**(3): 216~220
- Marcuse D. Bend loss of slab and fiber modes computed with diffraction theory. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 1993, **29**(12): 2957~2961
- Leonard L. Radiation from curved dielectric slabs and fibers. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 1974, **MTT-22**(4): 718~727
- Hagen R. Bending losses of coated single-mode fibers: a simple approach. *Journal of Lightwave Technology*, 1992, **10**(5): 544~551
- Charles V. Scalar-field theory and 2-D ray theory for bent single-mode weakly guiding optical fibers. *Journal of Lightwave Technology*, 1985, **LT-3**(2): 416~423
- Luca F, Giuseppe M. Bend loss in single-mode fibers. *Journal of Lightwave Technology*, 1997, **15**(4): 671~679
- Alun J H, Peter F C. Bend loss measurements on high numerical aperture single-mode fibers as a function of wavelength and bend radius. *Journal of Lightwave Technology*, 1986, **LT-4**(1): 34~40
- Saijonmaa J, Yevick D. Beam-propagation analysis of loss in bent optical waveguides and fibers. *J Opt Soc Am*, 1983, **73**(12): 1785~1791
- Hua D, Guang H J, Joseph H, et al. Investigation of 3-D semivectorial finite-difference beam propagation method for bent waveguides. *Journal of Lightwave Technology*, 1998, **16**(5): 915~922
- 大越孝敬, 冈本胜就, 保立和夫著, 刘时衡等译. 通信光纤. 北京: 人民邮电出版社, 1989. 14~22
Liu S H. *Communication Fibers*. Beijing: Posts & Telecom Press, 1989. 14~22
- Vassallo C. Perturbation of a LP mode of an optical

- fibre by a quasi-degenerate field; a simple formula. *Optics and Quantum Electronics*, 1985, **17**(2): 201~205
- 12 Nagano K, Kawakami S, Nishida S. Change of the refractive index in an optical fiber due to forces. *Applied Optics*, 1978, **17**(13): 2080~2085
- 13 曾甫泉. 光纤理论与技术. 西安: 西安交通大学出版社, 1990. 164~173
Zeng P Q. *Optical Fiber Theory and Technology*. Xi' An; Xi' An Jiaotong University Press, 1990. 164~173
- 14 Mordehai H. Analysis of curved optical waveguides by conformal transformation. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 1975, **QE-11**(2): 75~83
- 15 廖延彪. 偏振光学. 北京: 科学出版社, 2003. 337~341
- Liao Y B. *Polarization Optics*. Beijing: Science Press, 2003. 337~341
- 16 游善红, 郝素君, 殷宗敏, 等. 单模光纤中弯曲损耗的测试及分析. *光子学报*, 2003, **32**(4): 409~412
You S H, Hao S J, Yin Z M, *et al.* *Acta Photonica Sincia*, 2003, **32**(4): 409~412
- 17 孔勇, 郭明秀, 陆雨田. 掺铒光纤放大器的弯曲损耗对增益的影响. *光子学报*, 2003, **32**(8): 900~903
Kong Y, Guo M X, Lu Y T. *Acta Photonica Sincia*, 2003, **32**(8): 900~903
- 18 Zheng S L, Zhang X M, Chen K S. Far field pattern and differential mode attenuation of POF. *Acta Photonica Sincia*, 2003, **32**(12): 1435~1437

Theoretical Model Modify of Bending Loss of Mono-mode Fiber

Wang Xuezheng, Bian Baomin, Ji Yunjing, Li Zhenhua

Information Physics and Engineering Department, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094

Received date: 2005-07-18

Abstract Considering the refractive index change of bending fiber relative to straight fiber due to internal stress of bending fiber, bending loss model of mono-mode fiber was modified. On the basis of modification, the three results were compared, i. e., experimental data obtained by other authors, corrected and uncorrected theoretical results. The result shows that the corrected results accord with experimental data well. It will provide as an important reference for analyzing transmission characteristics of light in strong bending mono-mode fibers.

Keywords Mono-mode fiber; Bending loss; Internal stress; Conformal transformation



Wang Xuezheng was born in Zhejiang, China, on 23th October, 1979. She received the B. S. from Nanjing University of Science and Technology, Jiangsu, China in 2002 and received the M. E. from the same university majored in Optical Engineering in 2004. In the period of her reading for M. E., she was engaged in research on optical fiber's mode theory, pure bending loss and application of mono-mode fibers. In August 2004, she became the teacher of Physics Experiment Center of Nanjing University of S&T, where her current interests are the research of all kinds of ways to compute pure bending losses of mono-mode fibers and fiber devices.