

# 等衍射长度超短脉冲贝塞耳-高斯光束的传输特性

邹其徽 吕百达

(四川大学激光物理与化学研究所, 成都 610064)

**摘要** 使用复解析信号法, 研究了衍射长度与频率无关的超短脉冲贝塞耳-高斯光束在自由空间中的传输, 推导出了解析表达式并进行了理论和计算分析. 结果表明: 在无衍射长度内, 等衍射长度超短脉冲贝塞耳-高斯光束的横向光强分布扩展很小. 在无衍射长度之外, 横向光强分布有显著扩展. 但是, 在无衍射长度内轴上脉冲波形仍有展宽. 随传输距离增加轴上蓝移单调增加逐渐达到一渐近值. 随横向距离增加轴外光谱移动由蓝移变为红移.

**关键词** 激光光学; 超短脉冲贝塞耳-高斯光束; 等衍射长度; 复解析信号; 光谱移动

**中图分类号** O435 **文献标识码** A

## 0 引言

1987 年, Durnin 提出了无衍射贝塞耳光束<sup>[1]</sup>, 同年, Gori 引入了空间分布为贝塞耳-高斯函数的贝塞耳-高斯光束<sup>[2]</sup>. 之后, 人们对脉冲贝塞耳光束的传输进行了研究<sup>[3~6]</sup>. 贝塞耳 X 波是不同频率分量的贝塞耳光束的叠加<sup>[5]</sup>, 具有在空间位置保持其横向和纵向的集中分布特性. Porras 引入了几个光周期的贝塞耳-高斯脉冲光束<sup>[6]</sup>, 其空间参量与频率有关, 它携带有限能量, 并在无衍射长度范围内保持无衍射特性. 本文设入射超短脉冲场的空间分布为贝塞耳-高斯函数, 衍射长度与频率无关, 使用复解析信号法推导出了超短脉冲贝塞耳-高斯光束在自由空间中的传输公式及其功率谱, 并对其时空特性和光谱特性进行了计算和分析.

## 1 传输方程

在频域中, 单色分量光脉冲在真空中传输时, 其光场满足亥姆霍兹方程<sup>[7]</sup>

$$(\nabla^2 + k^2)E(r, z, \omega) = 0 \quad (1)$$

式中  $\nabla^2$  是拉普拉斯算符,  $k = \omega/c$  为波数,  $\omega$  为角频率,  $c$  为光速,  $E(r, z, \omega)$  为频域中的光场,  $r = xi + yj$  为横向坐标. 设  $z=0$  面处光场为

$$E(r_0, 0, \omega) = S(\omega)J_0(\alpha r_0) \exp\left[-\frac{k(x_0^2 + y_0^2)}{2z_0}\right] \quad (2)$$

式中  $r_0 = x_0i + y_0j$  为入射面的横向坐标,  $\alpha$  为贝塞耳函数的空间参量并设它与频率无关,  $z_0$  为高斯光束的衍射长度(瑞利长度)并设它与频率无关<sup>[6]</sup>,  $J_0(\cdot)$  表示第一类零阶贝塞耳函数,  $S(\omega)$  为轴上光谱, 它是脉冲信号  $A(t)$  的傅里叶变换谱, 即

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) \exp(i\omega t) dt \quad (3)$$

贝塞耳-高斯脉冲光束是式(1)在傍轴近似下的解<sup>[6]</sup>, 在旋转对称情况下, 频率为  $\omega$  的光场  $E(r, z, \omega)$  在真空中传输到  $Z$  平面处的光场可表示为<sup>[2]</sup>

$$E(r, z, \omega) = -\frac{i\omega}{cz} \exp\left[i\frac{\omega z}{c}\right] \int_0^\infty E(r_0, 0, \omega) \cdot J_0\left[\frac{\omega r r_0}{cz}\right] \exp\left[\frac{i\omega}{2cz}(r_0^2 + r^2)\right] r_0 dr_0 \quad (4)$$

利用积分公式

$$\int_0^\infty J_\nu(\chi r) J_\nu(\beta r) \exp(-\delta^2 r^2) r dr = \frac{i^\nu}{2\delta^2} \exp\left[-\frac{\chi^2 + \beta^2}{4\delta^2}\right] J_\nu\left[i\frac{\chi\beta}{4\delta^2}\right] \quad (5)$$

将式(2)、(5)代入式(4), 积分化简得

$$E(r, z, \omega) = -\frac{i\omega}{cz} \frac{1}{2g^2} \exp\left[i\frac{\omega z}{c} + i\frac{\omega r^2}{2cz}\right] S(\omega) \cdot \exp\left[-\frac{\alpha^2 + \omega^2 r^2/c^2 z^2}{4g^2}\right] J_0\left[i\frac{\alpha\omega r}{4g^2 cz}\right] \quad (6)$$

式中

$$g^2 = \omega/(2czq) \quad (7)$$

$$q = \frac{i + \xi}{1 + \xi^2}, \xi = \frac{z}{z_0} \quad (8)$$

将式(8)、(7)代入式(6)中化简得

$$E(r, z, \omega) = -iqS(\omega) \exp\left\{i\omega\left[\frac{z_0\xi}{c} + \frac{r^2}{2cz_0\xi} - \frac{r^2}{2cz_0\xi(1+\xi^2)}\right]\right\} \exp\left[-i\frac{cz_0\alpha^2\xi}{2\omega(1+\xi^2)}\right] \exp\left[-\frac{\omega r^2}{2cz_0(1+\xi^2)}\right] \cdot \exp\left[-\frac{cz_0\alpha^2\xi^2}{2\omega(1+\xi^2)}\right] J_0\left[i\frac{\alpha qr}{2}\right] \quad (9)$$

其相应的功率谱为

$$|E(r, \xi, \omega)|^2 = \frac{1}{1+\xi^2} |S(\omega)|^2 \exp\left[-\frac{\omega r^2}{cz_0(1+\xi^2)}\right] \cdot \exp\left[-\frac{cz_0\alpha^2\xi^2}{\omega(1+\xi^2)}\right] \left|J_0\left[\frac{i\alpha r\xi - \alpha r}{2(1+\xi^2)}\right]\right|^2 \quad (10)$$

由式(10)看出, 衍射长度与频率无关的超短脉冲贝

塞耳-高斯光束的功率谱中的贝塞耳函数的参量与频率无关, 仅与空间位置及空间参量有关.

设初始时轴上脉冲为高斯脉冲<sup>[8,9]</sup>, 即

$$A(t) = \exp\left[-\left(a_g \frac{t}{T}\right)^2\right] \cos(\omega_c t) \quad (11)$$

式中  $a_g = \sqrt{2 \ln 2}$ ,  $T$  为脉冲宽度(FWHM 定义),  $\omega_c$  为脉冲的载波频率. 定义  $m = T/T_c$  为脉冲所包含的振荡光周期数,  $T_c$  为与  $\omega_c$  相对应的振荡周期. 其高斯脉冲的傅里叶频谱为

$$S(\omega) = \frac{1}{2} [f(\omega - \omega_c) + f^*(-\omega - \omega_c)] \quad (12)$$

式中

$$f(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \exp\left[-\frac{\gamma^2}{4p}\right] \quad (13)$$

$$p = a_g^2/T^2, * \text{ 表示复共轭}$$

将式(12)代入式(10)中得超短脉冲贝塞耳-高斯光束的功率谱为

$$|E(r, \xi, \omega)|^2 = \frac{1}{8p(1+\xi^2)} \exp\left[-\frac{\omega r^2}{c z_0(1+\xi^2)}\right] \cdot \exp\left[-\frac{c z_0 \alpha^2 \xi^2}{\omega(1+\xi^2)}\right] \left| J_0\left[\frac{i \alpha r \xi - \alpha r}{2(1+\xi^2)}\right] \right|^2 \left\{ \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_c)^2}{2p}\right] + \exp\left[-\frac{(\omega + \omega_c)^2}{2p}\right] + 2 \exp\left[-\frac{\omega^2 + \omega_c^2}{2p}\right] \right\} \quad (14)$$

对式(14)求角频率的偏导数, 并令  $\partial |E(r, z, \omega)|^2 / \partial \omega = 0$ , 得

$$\frac{p(c^2 z_0^2 \alpha^2 \xi^2 - r^2 \omega^2)}{c z_0 \omega^2 (1+\xi^2)} \left[ 1 + \exp\left[\frac{\omega \omega_c}{p}\right] \right]^2 = \omega \left[ 1 + \exp\left[\frac{\omega \omega_c}{p}\right] \right]^2 + \omega_c \left[ 1 - \exp\left[\frac{2\omega \omega_c}{p}\right] \right] \quad (15)$$

式(15)为功率谱取极大值时, 角频率满足的关系.

由于  $\exp(\omega \omega_c / p) \gg 1$ , 由式(15)得

$$\Delta \omega = \omega - \omega_c = \frac{a_g^2 (c^2 z_0^2 \alpha^2 \xi^2 - r^2 \omega^2)}{m^2 T_c^2 c z_0 \omega^2 (1+\xi^2)} \quad (16)$$

由式(16)看出, 在轴上 ( $r=0$ )  $\Delta \omega > 0$ , 超短脉冲贝塞耳-高斯光束的轴上功率谱取极大值时, 角频率大于载波频率, 即轴上光谱蓝移, 光谱蓝移大小与光周期数、衍射长度、空间参量及传输距离有关, 光谱蓝移的最大值出现轴上. 因  $\partial \Delta \omega / \partial \xi > 0$  ( $r=0$ ), 故轴上蓝移随传输距离单调增加. 此外, 由式(16)知, 随着横向距离增加, 光谱蓝移减小. 当  $r < c z_0 \alpha \xi / \omega_c$  光谱为蓝移; 当  $r > c z_0 \alpha \xi / \omega_c$  光谱为红移. 当  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\Delta \omega = 0$ , 与等衍射长度超短脉冲高斯光束的轴上光谱一致<sup>[10]</sup>. 当  $z_0 \rightarrow \infty$  时,  $\Delta \omega = 0$ , 即超短脉冲贝塞耳光束的轴上光谱无移动, 与文献<sup>[11]</sup>一致.

在远场 ( $\xi \gg 1$ ), 由式(16)知功率谱取极大值的轴上光谱蓝移为

$$\Delta \omega = \frac{\sqrt[3]{2} \omega_c^2}{3 \sqrt[3]{\eta}} + \frac{\sqrt[3]{\eta}}{3 \sqrt[3]{2}} - \frac{2 \omega_c}{3} \quad (17)$$

式中

$$\eta = 27b + 2\omega_c^3 + 3 \sqrt{81b^2 + 12b\omega_c^3}, \\ b = c z_0 \alpha^2 a_g^2 / (m^2 / T_c^2) \quad (18)$$

即在远场, 超短脉冲贝塞耳-高斯光束的轴上的光谱蓝移  $\Delta \omega$  趋于一渐近值.

为了能研究几个光周期、甚至一个光周期的超短脉冲而不产生光束奇异行为<sup>[12]</sup>, 本文使用复解析信号, 光场的复解析信号解  $E^+(r, z, t)$  可根据单边逆傅里叶变换得<sup>[13]</sup>

$$E^+(r, z, t) = \int_0^\infty E(r, z, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega = \frac{i q}{\sqrt{2p}} J_0 \cdot \int_0^\infty \left\{ \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_c)^2}{4p}\right] + \exp\left[-\frac{(\omega + \omega_c)^2}{4p}\right] \right\} \cdot \exp(-i\omega t') \exp\left[-\left[\frac{c z \alpha^2}{2\omega} + \frac{\omega r^2}{2c z}\right] \frac{\xi}{1+\xi^2}\right] \cdot \exp\left[-i\left[\frac{c z \alpha^2}{2\omega} + \frac{\omega r^2}{2c z}\right] \frac{1}{1+\xi^2}\right] d\omega \quad (19)$$

式中  $t' = t - z/c - r^2/2cz$  为当地时间. 由式(19)可见, 等衍射长度超短脉冲贝塞耳-高斯光束在自由空间中传输时其时间和空间部分是不可分离的. 空间部分在传输中保持  $J_0(\cdot)$  形式, 但其参量变为复数, 时间部分的演化与空间衍射效应有关.

等衍射长度超短脉冲贝塞耳-高斯光束在任意传输面上的光强分布可根据巴塞伐定理求出, 由式(14)得

$$I(r, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |E(r, z, t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |E(r, z, \omega)|^2 d\omega = \frac{1}{4p(1+\xi^2)} \left| J_0\left[\frac{i \alpha r \xi - \alpha r}{2(1+\xi^2)}\right] \right|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_c)^2}{2p}\right] + \exp\left[-\frac{(\omega + \omega_c)^2}{2p}\right] + 2 \exp\left[-\frac{\omega^2 + \omega_c^2}{2p}\right] \right\} \cdot \exp\left[-\frac{\omega r^2 \xi}{c z_0 \xi (1+\xi^2)} - \frac{c z_0 \alpha^2 \xi^2}{\omega (1+\xi^2)}\right] d\omega \quad (20)$$

## 2 数值计算和结果分析

超短脉冲贝塞耳-高斯光束的无衍射长度  $L_F$  为  $L_F = (2kz_0)^{1/2} / \alpha$ <sup>[14]</sup>. 因此, 载波频率  $\omega_c = 2.36 \text{ fs}^{-1}$  和  $\alpha = 50, 100, 200 \text{ mm}^{-1}$  对应  $L_F$  分别为 7.94, 3.97, 1.98 mm. 图 1 给出了  $z = 2, 4, 8, 16 \text{ mm}$  的超短脉冲贝塞耳-高斯光束的轴上脉冲波形. 计算参量为:  $m = 1, \alpha = 200 \text{ mm}^{-1}, z_0 = 1000 \text{ mm}$ . 由图 1 看出, 在无衍射长度内 ( $z < L_F = 19.8 \text{ mm}$ ) 超短脉冲贝塞耳-高斯光束的轴上脉冲波形随传输距离增加而展宽<sup>[14]</sup>.

图 2 给出了  $\xi = 0.05, 0.6, 1.3$  的超短脉冲贝塞耳-高斯光束的归一化横向光强分布. 计算参量为:  $m = 1, \omega_c = 2.36 \text{ fs}^{-1}, \alpha = 200 \text{ mm}^{-1}, z_0 = 10 \text{ mm}$ .

由图2看出,在无衍射长度( $\xi=0.05$ )内,光强分布集中在轴上,光束扩展很小.传输距离大于无衍射长度( $\xi=0.6$ )时,横向光强分布显著扩展,轴外光强增大.传输距离进一步增大到衍射长度 $z_0$ 时,光束剖面为中心出现凹陷;几个衍射长度( $\xi=3$ )时,光束剖面成为环状分布.

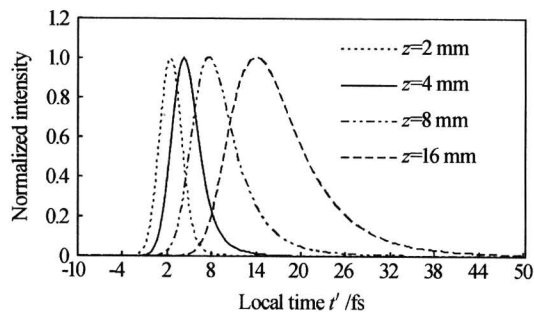


图1 超短脉冲贝塞耳-高斯光束的轴上脉冲波形  
Fig. 1 On-axis temporal forms of ultrashort pulsed Bessel-Gauss beams

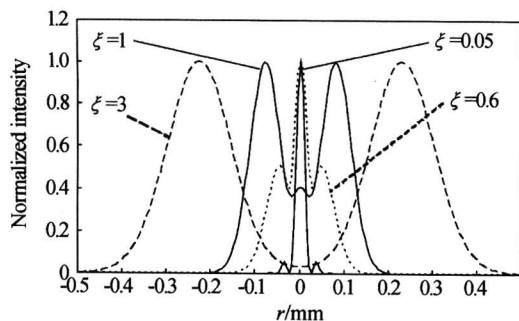


图2 超短脉冲贝塞耳-高斯光束的归一化横向光强分布  
Fig. 2 Normalized transversal intensity distributions of ultrashort pulsed Bessel-Gauss beams

图3给出了 $\alpha=100, 200$ 和 $400 \text{ mm}^{-1}$ 的超短脉冲贝塞耳-高斯光束的归一化横向光强分布.计算参量为: $\omega_c=2.36 \text{ fs}^{-1}$ ,  $m=1$ ,  $z_0=10 \text{ mm}$ ,  $\xi=0.1$ .由图3看出,在无衍射长度内( $z_0 \xi < L_F=1.98 \text{ mm}$ ),空间参量 $\alpha$ 越大,横向光强分布越集中于轴上.

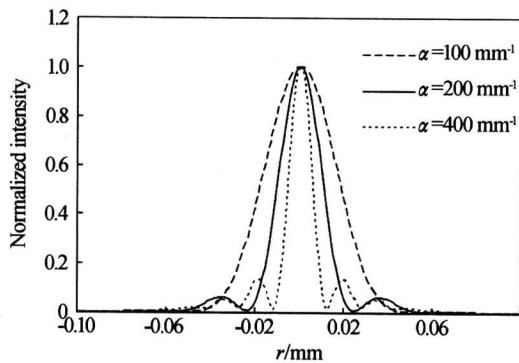


图3 超短脉冲贝塞耳-高斯光束的归一化横向光强分布  
Fig. 3 Normalized transversal intensity distributions of ultrashort pulsed Bessel-Gauss beams

图4给出了超短脉冲贝塞耳-高斯光束的轴上光谱蓝移与传输距离的关系.计算参量为: $z_0=10 \text{ mm}$ ,

$\omega_c=2.36 \text{ fs}^{-1}$ ,  $\alpha=100 \text{ mm}^{-1}$ ,  $m=1$ .由图4看出,随传输距离增加,蓝移单调增大到式(17)预示的渐近值 $0.63 \text{ fs}^{-1}$ .

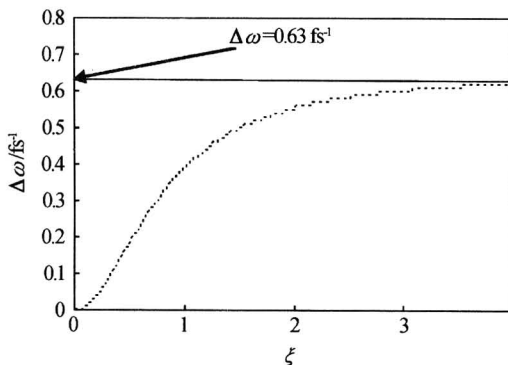


图4 轴上光谱蓝移与传输距离的关系  
Fig. 4 On-axis blue shift  $\Delta\omega$  versus propagation distance  $\xi$

图5给出了 $\xi=0.1, 1.0$ 和 $5.0$ 平面处的超短脉冲贝塞耳-高斯光束的功率谱取极大值时的角频率与横向距离的关系.计算参量为: $z_0=10 \text{ mm}$ ,  $\omega_c=2.36 \text{ fs}^{-1}$ ,  $\alpha=100 \text{ mm}^{-1}$ ,  $m=1$ .由图5看出,随横向距离增加,功率谱取极大值的角频率单调减小,光谱蓝移减小,当横向距离增大到一定值时,出现红移.由 $r=c z_0 \alpha \xi / \omega_c$ 计算得到对应于 $\xi=0.1, 1.0, 5$ ,其光谱蓝移和光谱红移分界的横向距离 $r=0.01, 0.13, 0.65 \text{ mm}$ .

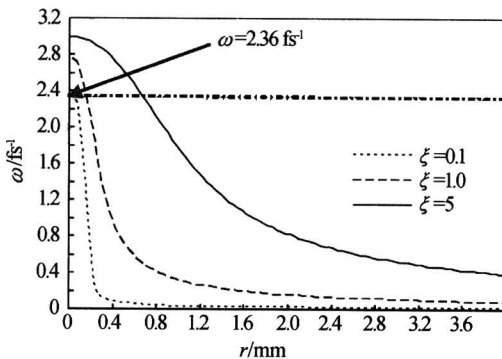


图5 超短脉冲贝塞耳-高斯光束的功率谱取极大值时的角频率与横向距离的关系  
Fig. 5 Angular frequency  $\omega$  versus transversal coordinate  $r$  at the maximum power spectrum

### 3 结论

本文采用复解析信号法研究了衍射长度与频率无关的超短脉冲贝塞耳-高斯光束在自由空间中的传输特性.研究表明:传输距离在无衍射长度内,超短脉冲贝塞耳-高斯光束的轴上脉冲波形随传输距离增加而展宽.空间参量 $\alpha$ 越大,横向光强越集中于轴上.当传输距离大于无衍射长度时,横向光强分布显著扩展.随传输距离增加,轴上光谱蓝移单调增大到渐近值.随横向距离增加,光谱蓝移减小,然后出现红移.

## 参考文献

- 1 Durnin J, Miceli J J, Eberly J H. Diffraction-free beams. *Phys Rev Lett*, 1987, **58**(15): 1499~1501
- 2 Gori F, Guattari G. Bessel-Gauss beams. *Opt Commun*, 1987, **64**(6): 491~495
- 3 Hu W, Guo H. Ultrashort pulsed Bessel beams and spatially induced group-velocity dispersion. *J Opt Soc Am*, 2002, **A19**(1): 49~53
- 4 Overfelt P L. Bessel-Gauss pulses. *Phys Rev*, 1991, **A44**(6): 3941~3947
- 5 Saari P, Reivelt K. Evidence of X-shaped propagation-invariant localized light wave. *Phys Rev Lett*, 1997, **79**(21): 4135~4138
- 6 Porras M A, Borghi R, Santarsiero M. Few-optical-cycle Bessel-Gauss pulsed beams in free space. *Phys Rev*, 2000, **E62**(4): 5729~5737
- 7 楚晓亮, 张彬. 超短脉冲在放大介质中传输特性研究. *光子学报*, 2004, **33**(6): 641~644  
Chu X L, Zhang B. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(6): 641~644
- 8 王淮生, 傅守利, 郑迎东. 在超短脉冲照射下光栅的瞬时 Talbot 效应的研究. *光子学报*, 2002, **31**(2): 152~156  
Wang H S, Fu S L, Zheng Y D. *Acta Photonica Sinica*, 2002, **31**(2): 152~156
- 9 陈宏平, 曹志彤. 超短光脉冲通过分层介质的远场频谱特性. *光子学报*, 2003, **32**(11): 1294~1298  
Chen H P, Cao Z T. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(11): 1294~1298
- 10 Lü B, Liu Z. Spatial and temporal properties of ultrashort pulses propagating in free space. *J Mod Opt*, 2003, **50**(5): 815~823
- 11 Porras M A. Diffraction effects in few-cycle optical pulses. *Phys Rev (E)*, 2002, **E65**(2): 026606(1~11)
- 12 傅喜全, 郭弘, 胡巍, 等. 超短脉冲传输缓变包络近似理论的失效和空间奇异性的形成与消除. *物理学报*, 2001, **50**(9): 1693~1698  
Fu X Q, Guo H, Hu W, et al. *Acta Physica Sinica*, 2001, **50**(9): 1693~1698
- 13 Melamed T, Felsen L B. Pulsed-beam propagation in lossless dispersive media I Theory. *J Opt Soc Am (A)*, 1998, **A15**(5): 1268~1276
- 14 Porras M A, Borghi R, Santarsiero M. Suppression of dispersive broadening of light pulses with Bessel-Gauss beams. *Opt Commun*, 2002, **206**(1): 235~241

## Propagation Properties of Ultrashort Pulsed Bessel-Gauss Beams with Constant Diffraction Length

Zou Qihui, Lü Baida

*Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064*

Received date: 2005-02-07

**Abstract** The complex analytical signal representation was applied to study the free-space propagation of ultrashort pulsed Bessel-Gauss beams with constant diffraction length. Closed-form expressions were derived and analyzed both theoretically and numerically. It is shown that within the diffraction-free range, the spreading of transversal intensity distributions of ultrashort pulsed Bessel-Gauss beams is small, whereas beyond this range a remarkable spreading appears. But, within the diffraction-free range there is still a broadening of on-axis pulse forms. With increasing propagation distance, the on-axis blue shift increases monotonously and then reaches gradually its asymptotic value. The off-axis spectral shift changes from the blue shift to the red one as the transversal distance increases.

**Keywords** Laser optics; Ultrashort pulsed Bessel-Gauss beam; Constant diffraction length; Complex analytical signal representation; Spectral shift



**Zou Qihui** was born in 1968 and graduated from Sichuan Normal University in 1989. Now he is working as a Ph. D. candidate at Institute of Laser Physics and Chemistry in Sichuan University. His research interests include the propagation and transformation of ultrashort pulsed beams.