

一维周期性增益介质的临界长度*

彭 鹏 王永昌**

(西安交通大学理学院现代物理研究所, 西安 710049)

摘 要 用传输矩阵方法研究了一维周期性增益介质的透射频谱随系统层数的变化规律. 研究发现: 对层数一定的介质, 透射率在某些频率上有很大的峰值; 增加层数, 尖峰在频谱图上出现的位置会发生移动, 且对不同的频段, 其位置随介质层数的变化规律是不同的. 考察了这种系统中每个频率的光所对应的临界长度, 解释了不同频段激光出现位置随层数变化的规律. 比较了周期系统和随机系统中临界长度与频率关系的异同, 用群速度理论和能带理论对此做了解释.

关键词 传输矩阵; 透射率; 临界长度; 群速度

中图分类号 O734 **文献标识码** A

0 引言

近年来, 对于光在一维周期性增益介质及一维随机增益介质中传播特性的研究引起了广泛的关注^[1~7]. 一维周期性介质, 由于其交替变化的折射率, 而具有光子禁带及光子局域化的特征, 如果周期性介质所用材料是带增益的材料, 则在一些频率会出现激光现象. 一维随机增益介质的研究对最近新出现的随机激光器的理论研究有重要的意义. 文献[1]研究了一维随机增益介质的临界长度; 文献[2]中给出了一维周期性增益介质的临界长度的定义, 并指出对周期性系统, 当其长度为临界长度附近一个很小的范围时, 才会出现激光现象, 小于或大于临界长度都没有激光产生. 本文用传输矩阵的方法研究了一维周期性增益介质的光透射率随介质层数变化的关系, 考察了在这种系统中, 每个频率的光所对应的临界长度, 从而得到周期系统中临界长度与频率的关系图; 用数据拟和的方法得到了一维随机增益系统中临界长度与频率的关系; 用能带理论和群速度的理论解释了两种系统中临界长度与频率关系的异同.

1 理论模型

采取与文献[2]中类似的一维周期结构: 多层模

型中包含两种交替排列的介电常量不同的材料 $\epsilon_1 = \epsilon_0 - i\epsilon''$, $\epsilon_2 = 3\epsilon_0 - i\epsilon''$, 厚度分别为 $a = 100 \text{ nm}$, $b = 350 \text{ nm}$, 其中 $\epsilon'' > 0$, 介电常量中虚部为负, 代表系统对光的放大作用, 由于抽运光在增益介质中是均匀分布的, 因此假定在整个增益介质层中 ϵ'' 是一个常量, 文中取 $\epsilon'' = 0.006$. 因为 a, b 确定, 所以系统包含两种材料的层数, 即对应系统的长度, 以后提到层数和系统长度时, 将不加区分. 对非磁性的材料, 在一维情况下, 只考虑电磁波垂直入射的情形, 由不含时的 Maxwell 方程可得

$$\frac{\partial^2 E(z)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(z) E(z) = 0 \quad (1)$$

电场可以如下形式的解

$$E_{1n}(z) = A_n e^{ik_1(z-z_{n1})} + B_n e^{-ik_1(z-z_{n1})} \quad (2a)$$

$$E_{2n}(z) = C_n e^{ik_2(z-z_{n2})} + D_n e^{-ik_2(z-z_{n2})} \quad (2b)$$

式中, $k_1 = (\omega/c) \sqrt{\epsilon_1}$, $k_2 = (\omega/c) \sqrt{\epsilon_2}$. 对 TE 波, 利用界面处电场 E_x 和磁场 H_y ($H_y \propto \partial E_x / \partial z$) 的连续性条件可得

$$\begin{bmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \end{bmatrix} = (M_n) \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中

$$(M_n) = \begin{bmatrix} e^{-ik_1 a} [\cos(k_2 b_n) - \frac{i}{2} (\frac{k_1 + k_2}{k_2} + \frac{k_2}{k_1}) \sin(k_2 b_n)] & \frac{i}{2} e^{-ik_1 a} (\frac{k_1}{k_2} - \frac{k_2}{k_1}) \sin(k_2 b_n) \\ -\frac{i}{2} e^{ik_1 a} (\frac{k_1}{k_2} - \frac{k_2}{k_1}) \sin(k_2 b_n) & e^{ik_1 a} [\cos(k_2 b_n) + \frac{i}{2} (\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1}) \sin(k_2 b_n)] \end{bmatrix} \quad (4)$$

(M_n) 为一个单元的传输矩阵, 对由 N 个单元组成的介质层的传递矩阵为 $M_{(N)} = \sum M_n$, 设入射波为

$E_{(z)} = e^{ik_1 z} + r e^{-ik_1 z}$, 出射波为 $E_{(z)} = t e^{ik_1(z-L)}$, r, t 分别为反射及透射振幅, 则

$$\begin{bmatrix} 1 \\ r \end{bmatrix} = M_{(N)} \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

展开得: $t = 1/M_{11}$, $r = M_{21}/M_{11}$. 反射及透射系数为

*国家自然科学基金(No. 60277003)资助项目
** Tel: 029-82668004 Email: ycwang@mail.xjtu.edu.cn
收稿日期: 2005-01-19

$R = |r|^2$, $T = |t|^2$. 由此,可以得到层数为 N 的系统,透射率随频率的变化关系如图 1.

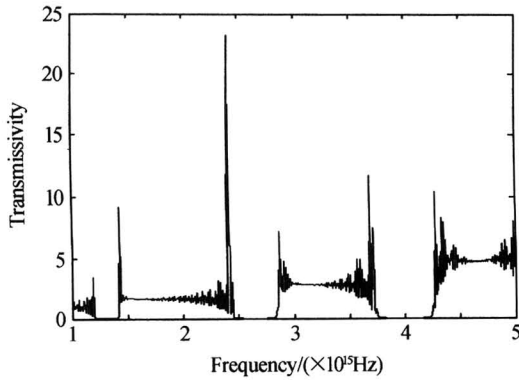
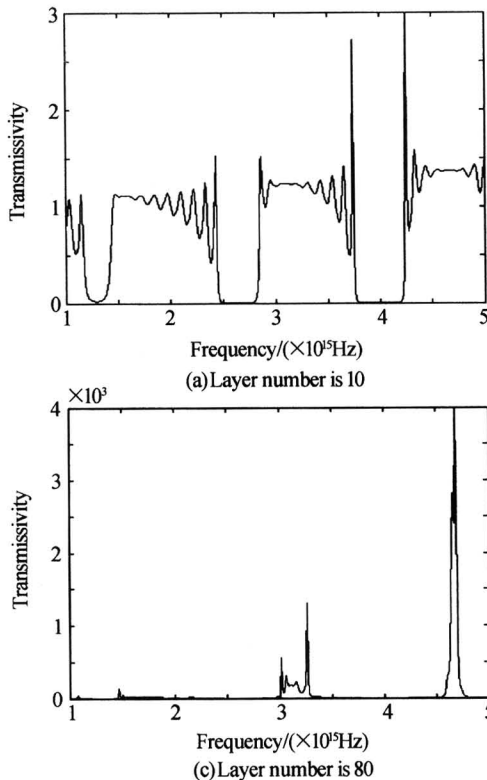


图 1 $N = 50$, 增益周期系统透射率与频率的关系
Fig. 1 $N = 50$, relation between transmissivity and frequency in periodic system with gain



2 数值计算的结果及分析

2.1 透射率与频率的关系随层数变化规律

保持 $a, b, \epsilon_1, \epsilon_2$ 不变,改变介质的层数(即系统的长度),考察透射率与频率的关系随层数变化的改变,得到图 2.

从图 2 得到光谱图被禁带分割成若干允带;当层数较少时,在带边出现尖峰(受激激光现象),随着层数的增加,每个允带内的尖峰向中间靠拢,且高频部分靠拢的快,峰值增高的也快. 继续增加层数,各允带内的尖峰先后合并为一个尖峰. 随着层数继续增加,高频段的尖峰的峰值开始变小,低频段的尖峰的峰值变大,表现为最高峰由高频向低频移动.

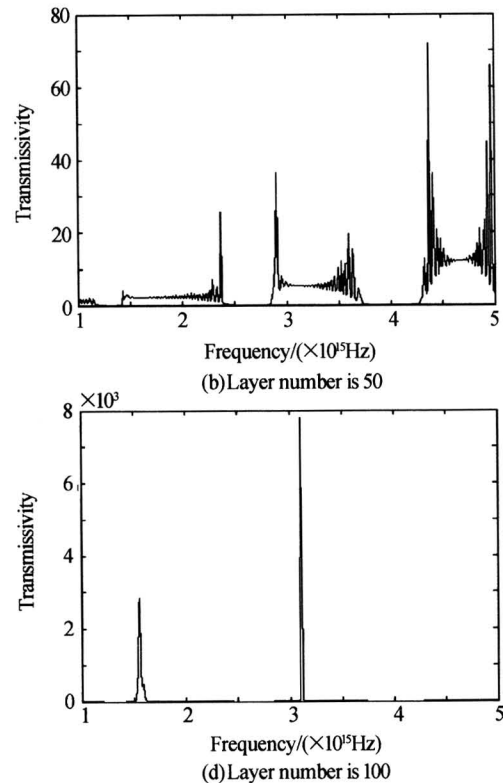


图 2 带增益周期系统在不同层数时光的透射率与频率的关系

Fig. 2 Relation between transmission and frequency in periodic system with gain when layer number changes

2.2 一定频率下透射率随层数的变化规律

为解释这一现象,利用文献[1]提出的一维周期系统的临界长度的概念,对长系统($L \gg L_c$),有公式

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\partial \ln T}{\partial L} = -\xi_1^{-1}, \xi_1 \text{ 为增益长度,透射率将随系统}$$

长度增加指数减小;对短系统 $L \ll L_c$,有 $\frac{\partial \ln T}{\partial L} = \xi_1^{-1}$,

透射率将随系统长度增加指数增加. 用传输矩阵方法,得到一定频率下系统的透射率随层数的变化关系如图 3(图中入射频率为 3.7×10^{15} Hz). 由图 3 可知,透射率并不像上述理论中那样随长度光滑的

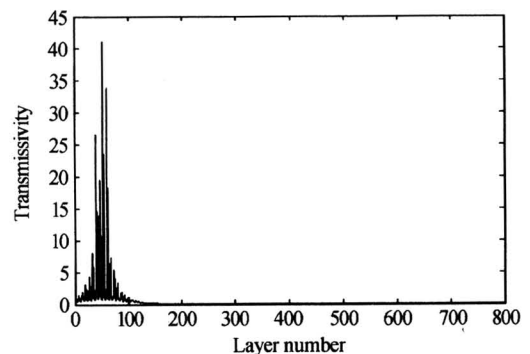


图 3 透射率与系统层数的关系

Fig. 3 Relation between the transmission and the layer number of the system

以指数形式变化,而是在接近临界长度时,出现分立的峰,这是由系统的谐振条件引起的,把透射率达到最大时的层数对应的系统长度称为系统对应这一频率的临界长度. 图 3 中的最大值与图 2 中的最大值是相对应的,因此可以通过研究系统的临界长度与频率的关系来分析图 2 中的现象.

2.3 周期性系统中临界长度与频率的关系

考察某一频段系统的临界长度,得到图 4,图 4 中的曲线呈现两个特点:一是有禁带,即在某些频段处中断;二是越靠近带边临界长度越小. 此图可以很好的解释图 2 中的现象:1)在带边处看到其临界长度很小,也就是我们在图 1 中看到的层数很小时,激光现象出现在带边;2)高频段中间的临界长度小于低频段中间的临界长度,所以随着层数的增加高频段的尖峰先重合;3)由图 3,对一定频率,当系统长度超过临界长度时,透射率剧减,所以当层数较大时,高频段的激光现象消失.

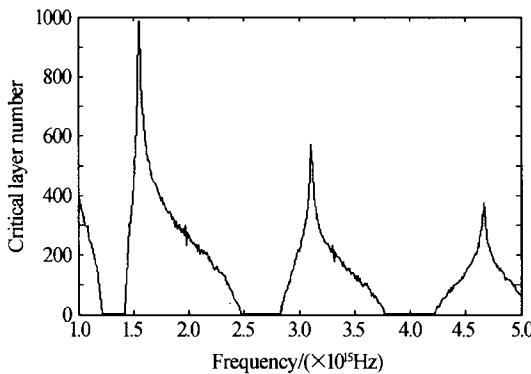


图 4 周期系统临界层数与频率的关系
Fig. 4 Relation between critical layer number and frequency in periodic system

3 理论解释

3.1 随机系统中临界长度与频率的关系

考虑文献[1]中对一维随机增益介质的临界长度的研究,文献[1]给出了临界长度的表达式 $L_{sr} \approx (l_g \xi_0)^{0.5}$, l_g 为增益长度,当随机量很小时,文献[1]推出了 $l_g = 2c/\epsilon''\omega$; ξ_0 为无增益时随机系统的局域化长度,文献[3]研究了全频段的局域化长度的行为.

在低频段 ($\omega \ll \frac{2\pi c}{a} = \omega_0$): $\xi_0 \approx \frac{12}{a\sigma^2\omega^2}$ (a 为随机多层介质中每一层的平均厚度, σ 为随机量的大小);

在高频段 ($\omega \gg \frac{2\pi c}{a} = \omega_0$): $\xi_0^{-1} \sim c_1 + c_2/\omega + \dots$, c_1, c_2

为常量,由系统的特征决定,当 $\omega \rightarrow \infty$ 时 $\xi_0 \rightarrow 1/c_1$,就是说在高频段 ξ_0 趋向某一最小值;在中频段,文献[3]用数值方法得出 ξ_0 平滑的由高频段过渡到低频段. 由讨论中,可以得到从低频到高频,临界长度

与频率的关系式从 $L_{sr} \propto \frac{1}{\omega^{3/2}}$ 过渡到 $L_{sr} \propto \frac{1}{\omega^{1/2}}$. 考虑到在频率的两个极限下的行为构造式(6)来描述全频段临界长度的行为

$$L_{sr} = \frac{1}{A\omega^{1/2}[1 - \exp(-B\frac{\omega}{\omega_0})]} \quad (6)$$

式中 $\omega = \frac{2\pi c}{a}$, A, B 为常量,由 σ 和 c_1 [3]确定.

以文献[3]中的模型为例,给出一组 A, B 的值,考察文献[3]中图 1 的局域化长度在高频及低频的数据,可以得出 $B \approx 1$, A 的值不影响讨论得结果,所以可以令 $A=1$,由此可画出随机介质中临界长度与频率的关系如图 5.

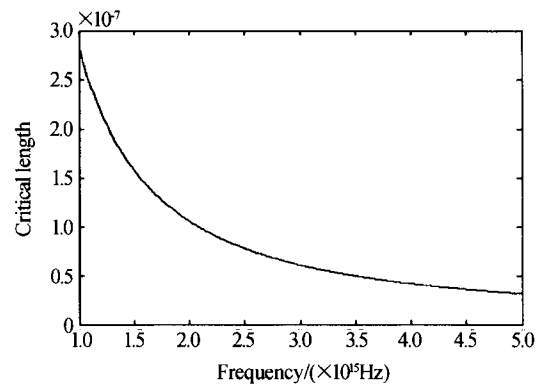


图 5 随机系统临界长度与频率的关系
Fig. 5 Relation between critical layer number and frequency in random system

考察图 4 与图 5 的异同可见,相同点是两图中的临界长度随频率增大在整体上都有下降的趋势;不同点是图 5 为连续的,而图 4 有间断且靠近禁带时临界长度很小. 本文认为有两种作用使图 4 区别于图 5,一是由于周期性调制形成的禁带使图 4 有间断;二是由于在带边光子群速度下降,使得激光现象更容易实现[4,8],从而在图 4 中越靠近带边,临界长度越小. 周期性调制的作用很多文献已讨论过[5~8],本文只具体讨论群速度对临界长度的影响.

3.2 周期系统中带边光子群速度下降对临界长度的影响

首先计算无增益时,周期性系统中光子传播的群速度,模型仍采用文章开始时的 ab 交替的周期模型. $V_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\rho}$, ρ 为模式密度,对 N 层系统

$$\rho_N = (1/D) \{ (1/2) [\sin(2N\beta)/\sin\beta] [\eta' + \eta\xi\xi'(1-\xi^2)] - N\eta\xi'/(1-\xi^2) \} / \{ \cos^2 N\beta + \eta^2 [\sin(N\beta)/\sin\beta]^2 \} \quad (7)$$

式中 $D = N(a+b)$ 为系统的总长度, $\xi = \cos\beta = \text{Re}\{1/t\}$, $\eta = -\text{Im}\{1/t\}$, t 为单位层的透射系数. 式(7)的详细推导过程见文献[5]. 图 6 为群速度与频

率的关系(其中 $N=50$):由图 6 可知,在禁带边群速度变得很小.可以认为带边的光子在系统中经历了一个多重反射的过程,这种频率的光子是以 V_g 慢慢渗透过系统的.如果系统为带增益的,这就意味着带边的光子得到更大的增益,这样的光子更容易得到受激放大,对应图 4 所示的带边的临界长度较小的现象.

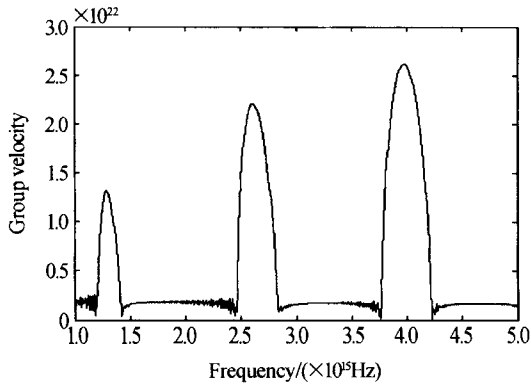


图 6 周期系统中光子群速度与频率的关系

Fig. 6 Relation between group velocity and frequency in periodic system

4 结论

本文用传输矩阵的方法研究了一维周期增益介质的透射光谱随系统长度的变化规律,这一变化规律可以用周期系统的临界长度与频率的关系作出解释.在文献[1],[3]的基础上构造了在全频段上一维随机增益系统的临界长度与频率的关系式.在随机系统中,临界长度随频率增长单调递减;在周期系统中临界长度与频率的关系曲线被禁带分为若干部分,且在禁带边缘临界长度很小.用能带理论可以解释禁带现象,用带边群速度的行为可以解释带边临界长度变小的现象.对于两种系统中临界长度与频率关系的联系也可以理解为:随机系统可以用各

种周期系统叠加而成,从而随机系统的临界长度与频率的关系可以用不同周期系统的临界长度与频率的关系的以一定的权重叠加而得.本文将增益系数看成常量,更细致地计算需要把增益系数看成频率的函数.

参考文献

- 1 Zhang Z Q. Light amplification and localization in randomly layered media with gain. *Phys Rev B*, 1995, **52** (11):7960~7964
- 2 Jiang X Y, Soukoulis C M. Transmission and reflection studies of periodic and random systems with gain. *Phys Rev B*, 1999, **59**(9): 6159~6166
- 3 Sheng P, Zhang Z Q, White B, *et al.* Minimum wave-localization length in a one-dimensional random medium. *Phys Rev Lett*, 1986, **57**(8):1000~1003
- 4 Dowling J P, Scalora M, Bloemer M J, *et al.* The photonic band edge laser: a new approach to gain enhancement. *J Appl Phys*, 1994, **75**(4): 1896~1899
- 5 陈慰宗,付灵丽,郑新亮,等.一维光子晶体中的电磁模密度. *光子学报*, 2003, **32**(2):239~243
Chen W Z, Fu L L, Zheng X L, *et al.* *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(2):239~243
- 6 段晓峰,牛燕雄,张维,等.一维光子晶体光学传输特性分析. *光子学报*, 2003, **32**(9): 1086~1089
Duan X F, Niu Y X, Zhang C, *et al.* *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(9):1086~1089
- 7 季家熔,叶卫民,朱志宏,等.光子晶体滤波特性分析. *光子学报*, 2004, **33**(6):700~703
Ji J R, Zhu H Z, Ye W M, *et al.* *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(6):700~703
- 8 Bendickson J M, Dowling J P, Scalora M. Analytic expressions for the electromagnetic mode density in finite, one-dimensional, photonic band-gap structures. *Phys Rev E*, 1996, **53**(4):4107~4121

Critical Length of One-dimensional Periodic Systems with Gain

Peng Peng, Wang Yongchang**

Institute of Modern Physics, School of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049

Received date: 2005-01-19

Abstract The relation between the transmission spectrum and the system layers in periodic system with gain was studied by the transfer-matrix method. It is found that, with certain layers, the transmission coefficient is very large at some frequencies, and when the system layers increase, these peaks will move in the spectrum. And for different part in the spectrum, the changes of peaks are different. The critical length of system for different frequencies was studied, which explains the changes of peaks in different part of the spectrum. The relation between the critical length and the frequency in random system was studied next, which shows some differences with this relation in periodic system. The differences can be explained by group velocity theory and energy band theory.

Keywords Transfer-matrix; Transmission coefficient; Critical length; Group velocity



Peng Peng was born on October 7, 1982, in Shanxi province. He studied physics in Xi'an Jiaotong University from 2000 to 2004. Now he is a graduate student in the same university and majors in theoretical physics.