

单轴晶体包层抛物型渐变光纤中基模功率分析

陈 川 余 恬*

(山东大学信息科学与工程学院, 济南 250100)

摘 要 研究了以单轴晶体为包层, 纤芯为各向同性非均匀材料光纤的功率传输特性. 在纤芯满足弱渐变条件的假定下, 按矢量场法进行了分析. 针对基模讨论了包层的轴向与横向的介电常量比 τ 对光纤截面上功率分布的影响. 结果表明, τ 对低频情况影响显著, 而对高频情况则影响很小. 当此种结构的光纤用做单模光纤时, 选用 τ 较大的包层材料有利于提高传输效率.

关键词 光纤光学; 渐变光纤; 晶体包层; 功率分布

中图分类号 O431 **文献标识码** A

0 引言

渐变光纤一般是指折射率在纤芯中沿径向渐变而在包层中仍为常量的光纤, 目前应用的主要是由各向同性材料制作包层和纤芯的光纤. 理论和试验方面的研究工作, 主要是集中在包层为均匀材料, 芯层折射率满足径向渐变的光纤^[1~7]. 对于以各向异性晶体材料为包层, 纤芯为均匀材料的光纤, 人们也做了许多理论研究工作, 文献[8]、[9]研究了该类光纤的传输和截止特性, 文献[10]、[11]对以单轴各向异性材料为内包层的双包层 W 型光纤的传输特性和偏振特性进行了讨论, 等等. 但对于由各向异性晶体材料构成包层的渐变光纤, 目前在理论上的研究开展不多, 例如包层材料对传输功率的影响就尚不清楚. 本文以芯层折射率分布满足抛物型弱渐变, 包层为单轴晶体各向异性材料且其主光轴沿光纤轴线方向的光纤模型作为研究对象, 采用矢量场分析法, 在芯-包界面边界条件的严格约束下, 对包层材料的折射率特性对基模功率传输特性的影响进行了讨论.

1 场的轴向分量

以光纤轴线为 z 轴, 建立圆柱坐标系 (r, θ, z) . 设纤芯半径为 a , 芯内介电常量 $\epsilon(r)$ 呈抛物型分布, 即折射率分布为

$$n(r) = \frac{\epsilon(r)}{\epsilon_0} = n_0 \sqrt{1 - \frac{n_0^2 - n_1^2}{n_0^2} \frac{r^2}{a^2}} \quad (0 \leq r \leq a) \quad (1)$$

又设包层为单轴晶体, 其光轴沿光纤轴线方向, 轴向折射率为 n_z , 横向折射率为 n_t . 考虑到包层与芯层的介质性质不同, 在交界面上一般折射率不等, 故本文仅考虑 $n_t < n_1$ 的情况, 如图 1.

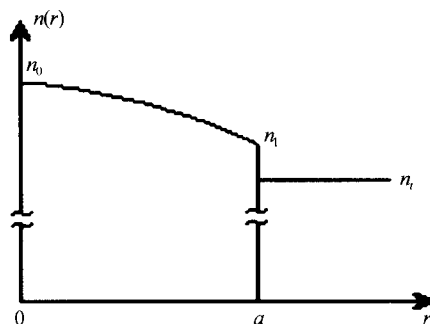


图 1 纤芯与包层中的折射率分布
Fig. 1 The distribution of refractive index in core and cladding

在纤芯内部, 电场强度和 \mathbf{E}_1 磁场强度 \mathbf{H}_1 (下标 1 代表纤芯内) 分别满足波动方程

$$[\nabla^2 + k^2 n^2(r)] \mathbf{E}_1 + \nabla \left[\frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_1 \right] = 0 \quad (2)$$

$$[\nabla^2 + k^2 n^2(r)] \mathbf{H}_1 + \nabla \left[\frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \cdot \mathbf{H}_1 \right] = 0 \quad (3)$$

式中 $k = \omega/c$ 为真空的波数, ω 为光波的角频率, $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ 为真空中的光速. 假定 $\epsilon(r)$ 或 $n(r)$ 随 r 的变化很弱, $\nabla \epsilon / \epsilon \ll 1$ (此称为弱渐变条件), 以至于式 (2), (3) 中的 $\nabla \epsilon / \epsilon$ 项可以忽略, 则方程组简化为

$$[\nabla_t^2 + k^2 n^2(r) - \beta^2] \begin{bmatrix} E_{1z} \\ H_{1z} \end{bmatrix} = 0 \quad (0 \leq r < a) \quad (4)$$

式中 $\beta = kn$, n 为受导波沿轴向的等效折射率. 因为 H_{1z} 与 E_{1z} 满足同样的方程, 故可设 $H_{1z} = i\rho E_{1z} / \eta_0$, 这里 ρ 为与时空坐标无关的无量纲常量, $\eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$ 为真空中的波阻抗.

省略因子 $e^{i(\beta z + \theta - \omega t)}$ ($l = 0, 1, 2, \dots$; 下同), 记 $E_{1z}(a) = E_0$, 则式 (4) 在 $r=0$ 有限的解可写为^[12]

$$E_{1z} = E_0 \frac{r^l}{a^l} e^{-\frac{\nu_0}{2} (\frac{r^2}{a^2} - 1)} \frac{F(\alpha_l; l+1; \nu_0 r^2 / a^2)}{F(\alpha_l; l+1; \nu_0)} \quad (5)$$

式中 $F(\alpha_l; l+1; \zeta)$ 为合流超几何函数

$$F(\alpha_l; l+1; \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_l)_k \zeta^k}{k! (l+1)_k} \quad (6)$$

* Tel: 0531-8378251 Email: yutian@sdu.edu.cn
收稿日期: 2005-02-07

$$\zeta = \frac{v_0}{a^2} r^2, v_0 = \tilde{\omega} \sqrt{n_0^2 - n_1^2} \quad (7)$$

$$\alpha_l = \frac{l+1}{2} - \frac{u_0^2}{4v_0}, u_0 = \tilde{\omega} \sqrt{n_0^2 - n^2} \quad (8)$$

记号 $(x)_k$ 代表连乘积 $x(x+1)(x+2)\cdots(x+k-1)$, $\tilde{\omega} = \omega a/c$ 为无量纲常量.

假设,包层介质的光沿 z 轴,即有

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} n_t^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_t^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x E_x \\ e_y E_y \\ e_z E_z \end{bmatrix} \quad (9)$$

又设介质为磁各向同性: $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, 则由 Maxwell 方程组可得

$$(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} n_t^2) \mathbf{E} = (1-\tau) [i\beta \nabla + \frac{\omega^2}{c^2} n_t^2 e_z] E_z \quad (10)$$

$$(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} n_t^2) \mathbf{H} = -i\omega \epsilon_0 n_t^2 (1-\tau) (\nabla E_z) \times e_z \quad (11)$$

式中 τ 为包层的轴向与横向的介电常量比: $\tau = \epsilon_z/\epsilon_t = n_z^2/n_t^2$. 由式(10)和(11)可得关于包层中电场和磁场 z 分量的方程

$$[\nabla_t^2 + \tau(k^2 n_t^2 - \beta^2)] E_{2z} = 0 \quad (12)$$

$$[\nabla_t^2 + k^2 n_t^2 - \beta^2] H_{2z} = 0 \quad (13)$$

设包层无限厚,则式(12)、(13)的解为

$$E_{2z}(r) = E_0 Q(\tau w, r) \quad (14)$$

$$H_{2z}(r) = i \frac{\rho}{\eta_0} E_0 Q(w, r) \quad (15)$$

$$Q(s, r) = K_l(sr/a) / K_l(s) \quad (16)$$

K_l 为 l 阶的虚宗量贝赛尔函数, $w = \tilde{\omega} \sqrt{n^2 - n_t^2}$.

2 场的横向分量

场的各横向分量可由 E_z 和 H_z 导出. 在包层中

$$E_{2r} = iE_0 \frac{a^2 \omega}{c w^2} [-n Q'(w, r) + \frac{l\rho}{r} Q(\tau w, r)] \quad (17)$$

$$E_{2\theta} = E_0 \frac{a^2 \omega}{c w^2} [\frac{\ln}{r} Q(w, r) - \rho Q'(\tau w, r)] \quad (18)$$

$$H_{2r} = E_0 \frac{\epsilon_0 a^2 \omega}{w^2} [n\rho Q'(\tau w, r) - \frac{\ln^2}{r} Q(w, r)] \quad (19)$$

$$H_{2\theta} = iE_0 \frac{\epsilon_0 a^2 \omega}{w^2} [\frac{\ln\rho}{r} Q(\tau w, r) - n_t^2 Q'(w, r)] \quad (20)$$

上标“ \prime ”表示对 r 求导

$$Q'(s, r) = -\frac{1}{K_l(s)} [\frac{l}{r} K_l(\frac{s}{a} r) + \frac{s}{a} K_{l-1}(\frac{s}{a} r)] \quad (21)$$

将式(17)~(20)中的下标2改为1, w^2 改为 $-u^2(r) = -\tilde{\omega}^2 [n^2(r) - n^2]$, $Q(\tau w, r)$ 和 $Q(w, r)$ 都改为 $E_{1z}(r)$, n_t^2 改为 $n^2(r)$, 即给出纤芯中的各横向分量. $E'_{1z}(r)$ 为

$$E'_{1z}(r) = \left\{ \frac{1}{r} + \left[\frac{2\alpha_l}{l+1} \frac{F(\alpha_l+1; l+2; \frac{v_0}{a^2} r^2)}{F(\alpha_l; l+1; \frac{v_0}{a^2} r^2)} - 1 \right] \right\} \cdot$$

$$\frac{v_0}{a^2} r \} E_{1z}(r) \quad (22)$$

3 特征方程与截止频率

芯-包界面上场的切向分量应连续,由此得特征方程

$$\frac{l^2 n^2}{a^2} \frac{V^4}{u^4 w^4} = \left[\frac{E'_{1z}(a)}{E_0 u^2} + \frac{Q'(\tau w, a)}{w^2} \right] \times [n_t^2 \frac{E'_{1z}(a)}{E_0 u^2} + n_t^2 \frac{Q'(w, a)}{w^2}] \quad (23)$$

式中 $u = u(a) = \tilde{\omega} \sqrt{n_1^2 - n^2}$. V 为归一化频率, $V^2 = u^2(a) + w^2 = \tilde{\omega}^2 (n_1^2 - n_t^2)$.

式(23)可被视为关于 $E'_{1z}(a)$ 的一元二次方程, 从而有

$$E'_{1z}(a) = \frac{E_0 (n_1^2 - n^2)}{2(n^2 - n_t^2)} \times \left\{ -[Q'(\tau w, a) + \frac{n_t^2}{n_1^2} Q'(w, a)] \pm \sqrt{[Q'(\tau w, a) - \frac{n_t^2}{n_1^2} Q'(w, a)]^2 + \frac{4l^2 n^2 (n_1^2 - n_t^2)^2}{a^2 (n_1^2 - n^2)^2}} \right\} \quad (24)$$

基模是截止频率最低的模式. 若截止时 $\omega = 0$, 则因为此时 v_0, u_0 皆为 0, 而 $F(\alpha, \gamma, 0) = 0$ (对任意的 α 和 γ), 从而 $Q'(w, a) = l/a$ 为有限, 故按式(24)应有

$$n_1^2 Q'(\tau w, a) + n_t^2 Q'(w, a) = \pm \sqrt{[n_1^2 Q'(\tau w, a) - n_t^2 Q'(w, a)]^2 + \frac{4l^2 n_t^2}{a^2}} \quad (25)$$

由式(21)可知, 对 $l=1$, $w \rightarrow 0$ 时 $Q'(w, a)$ 和 $Q(\tau w, a)$ 皆 $\rightarrow -1/a$, 于是式(25)成为 $-(n_1^2 + n_t^2) = \pm(n_1^2 + n_t^2)$. 显然仅当右边取“ $-$ ”时等式才成立. 由此可知, 式(24)中“ \pm ”号取“ $-$ ”, 并且当 $l=1$ 时, 即为基模的特征方程.

4 功率限制因子

光纤的功率限制因子为 $p = (1 + P_2/P_1)^{-1}$, P_1, P_2 依次为纤芯和包层中的传输功率. 由式(17)~(19)等式写出芯层和包层中 Poynting 矢量的轴向分量, 对光纤的横截面积分, 即可求得 P_1 和 P_2 , 进而有

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{n[n_t^2 C(\tau w) + \rho^2 C(w)] + l\rho(n^2 + n_t^2)}{(n^2 - n_t^2)^2 (nA - 2l\rho B) / E_0^2} \quad (26)$$

式中

$$A = \int_0^a \frac{[n^2(r) + \rho^2]}{[n^2(r) - n^2]^2} \{ [E'_{1z}(r)]^2 + \frac{l^2}{r^2} E_{1z}^2(r) \} r dr \quad (27)$$

$$B = \int_0^a \frac{[n^2(r) + n^2]}{[n^2(r) - n^2]^2} E_{1z}(r) E'_{1z}(r) dr \quad (28)$$

$$C(s) = \frac{1}{K_l^2(s)} \int_a^\infty \left\{ \frac{s^2}{a^2} [K_l(\frac{s}{a} r)]^2 + \frac{l^2}{r^2} K_l^2(\frac{s}{a} r) \right\} r dr \quad (29)$$

撇号“'”表示对括号中的整个宗量求导. ρ 可由 $E_{1\theta}(a) = E_{2\theta}(a)$ 得到

$$\rho = \frac{\ln[(n^2 - n_i^2)E_{1z}(a) + (n_i^2 - n^2)E_0 Q(w, a)]}{a[(n^2 - n_i^2)E'_{1z}(a) + (n_i^2 - n^2)E_0 Q'(w, a)]} \quad (30)$$

5 对基模的计算结果及分析

对基模的特征方程进行数值求解, 得到等效折射率 n 随归一化频率 V 的变化曲线, 见图 2. 结合该结果, 根据式(26)可以得到功率限制因子 p 随 V 的变化曲线, 见图 3. 计算中取 $n_0 = 1.5, n_1 = 1.49, n_i = 1.48$.

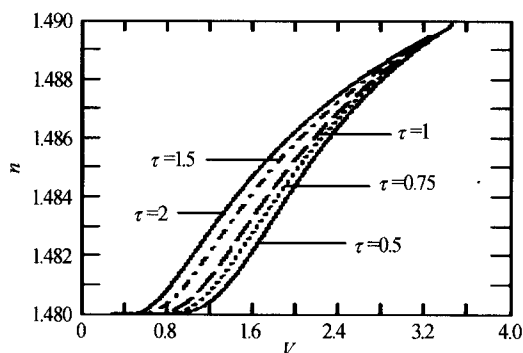


图 2 不同 τ 值下的基模色散曲线

Fig. 2 The dispersion curves of fundamental mode with different τ

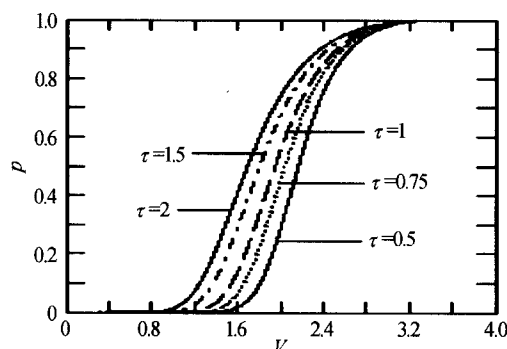


图 3 不同 τ 值下基模的 $p \sim V$ 曲线

Fig. 3 The $p \sim V$ curves of fundamental mode with different τ

在两图中, $\tau=1$ 对应于包层为各向同性介质的情况, $\tau < 1$ 和 $\tau > 1$ 的情况则分别位于 $\tau=1$ 曲线的两边. 由图 3 可见, 无论 τ 取何值, 随着 V 的增加, 芯子中的功率都是逐渐增大的, 这与各向同性材料的光纤情况相同. 在相同的 V 值下, τ 值大的曲线对应的 p 值较大, 即功率较多集中在纤芯中, 这与包层为晶体, 芯子为各向同性均匀材料的光纤中传输功率的分布规律类似.

此外还可看出, 在相同的 V 值下, τ 值大的曲线对应的 n 和 p 值均较大. 但在频率较高处, 不同 τ 值的曲线逐渐汇合在一起. 这表明 τ 值的不同对低频段有较大影响, 但对高频段的影响差别不大.

另外, 尽管基模无截止频率, 但从图中可以看

到, 在接近于 0 的较低频段内, 基模的等效折射率 n 十分接近于 n_i , 同时纤芯内的传输功率也接近于 0, 这说明在频率较低时, 光功率实际上是难以在此种光纤中传输的. 但 τ 值越大, 该频率范围越小. 如所周知, TE 和 TM 模的第一个截止频率就是单模区的截止频率. 在本文取定的计算参量下, 单模区的截止频率 ($F(\alpha_0; 1; v_0) = 0$ 的第一个根) 是 $V = 1.78$, 它与 τ 无关. 故由图 3 可见, 在单模区域内不论 $\tau > 1$ 或 $\tau < 1$ 都能够进行功率传输, 但是要采用该类光纤实现单模传输还是应当选用 τ 比 1 大得较多的包层材料.

6 结论

1) 采用矢量场法, 对由单轴各向异性材料构成包层的抛物型弱渐变光纤进行了初步分析, 导出了满足芯-包边界条件的特征方程, 以及传导模式在芯子与包层内的传输功率表达式. 2) 绘制出了不同 τ 值下纤芯内的等效折射率 n 随归一化频率 V 变化的色散曲线及芯子内的功率因数 p 随 V 的变化曲线, 并对结果进行了讨论. 参量 τ 对低频区有较显著的影响, 但对较高频段的影响可以忽略. 因此, τ 对单模传输的影响较大, 而对多模区的影响较弱. 在单模传输时, τ 值越大, 传输功率便越集中于芯层, 故可通过选择 τ 的值来改变传输功率在芯子与包层间的分布, 也可以根据芯子与包层中功率的分布情况来测量单轴晶体的某些光传输性质.

参考文献

- 1 Hashimoto M, Nemoto S, Makimoto T. Analysis of guided waves along the cladded optical fiber; Parabolic-index core and homogeneous cladding. *IEEE Trans Microwave Theory Tech*, 1977, **MTT-25**(1): 11~17
- 2 Yamada R, Inabe Y. Guided waves in an optical square-law medium. *J Optical Soc Am*, 1974, **64**(5): 964~968
- 3 王子华, 吴智勇. 用耦合波理论求解渐变折射率光纤的传播常量和模式场. *光子学报*, 1997, **26**(2): 115~120
Wang Z H, Wu Z Y. *Acta Photonica Sinica*, 1997, **26**(2): 115~120
- 4 Liu Juihsiang, Liu Hungtsai. Gradient refractive-index optical rod prepared from methacrylate derivatives. *Optics Letters*, 1997, **22**(10): 668~670
- 5 Wang Zihua, Shao Xiaodong. Analysis of graded-index optical fibers by regional mode expansion and coupled regional mode theory. *Acta Photonica Sinica*, 1997, **26**(9): 818~823
- 6 储九荣, 温序铭, 徐传骧, 等. 梯度型聚合物光纤中折射率分布模型. *光子学报*, 2002, **31**(8): 1012~1015
Chu J R, Wen X M, Xu C X, et al. *Acta Photonica Sinica*, 2002, **31**(8): 1012~1015

- 7 刘凯, 于荣金. 多模梯度折射率塑料光纤带宽的分析. 光子学报, 2002, **31**(7): 819~823
Liu K, Yu R J. *Acta Photonica Sinica*, 2002, **31**(7): 819~823
- 8 Stevenson J L, Dyott R B. Optical fiber waveguide with a single-crystal core. *Electron Letter*, 1974, **10**: 449~450
- 9 Cozens J. Propagation in cylindrical fibers with anisotropic crystal cores. *Electron Letter*, 1974, **12**: 413~415
- 10 Zhang X P, Tan Z H. Analysis of transmission characteristics of doubly clad fibers with an inner cladding made of uniaxial crystal materials. *Opt Commun*, 2002, **204**(6): 127~136
- 11 张晓萍, 谭志红. 以单轴晶体为内包层的双包层光纤偏振特性研究. 量子电子学报, 2002, **19**(3): 245~249
Zhang X P, Tan Z H. *Chinese Journal of Quantum Electronics*, 2002, **19**(3): 245~249
- 12 廖延彪. 光纤光学. 北京: 清华大学出版社, 2000. 35
Liao Y B. *Fiber Optics*. Beijing: Qinghua Univ. Press, 2000. 35

Analysis on Power Distribution of Parabolic Weakly-graded Index Optical Fiber with Uniaxial Crystal Cladding

Chen Chuan, Yu Tian

School of Information Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250100

Received date: 2005-02-07

Abstract The parabolic index optical fiber with uniaxial crystal cladding was studied by the vector-field method under the assumption of weakly-graded-index in the core. The power distribution in core and cladding for fundamental mode is analyzed. It is shown that the influence of parameter τ (the ratio of axial-permittivity to transverse-permittivity in the cladding) to the power distribution for lower frequency is obvious, but it is negligible for higher frequency. Using the material of large τ to make the cladding is advantaged for the single-mode transmission in this kind of fiber.

Keywords Fiber optics; Graded-index fiber; Crystal cladding; Power distribution

Chen Chuan was born in September, 1976. He is now a graduate student in Shandong University. His major is Electronic-magnet and Microwave technology. His interests are optical Communication and sensor technology.

