

基于液晶空间光调制器的光栅衍射效率*

程 欣¹ 任秀云² 韩玉晶¹ 国承山^{1, **}

(1 山东师范大学物理系, 济南 250014)

(2 哈尔滨工业大学(威海)信息科学与工程学院, 山东威海 264209)

摘 要 基于 Jones 矩阵理论和液晶弹性自由能理论, 分析计算了扭曲向列型液晶空间光调制器 (TN-LCSLM) 的复振幅调制特性. 以显示一维矩形光栅为例, 详细计算了不同输入输出偏振器配置下的一级衍射效率. 数值计算结果和分析表明, 在加输出偏振器和不加输出偏振器两种情况下都存在一个具有最大一级衍射效率的取向配置.

关键词 液晶; 空间光调制器; 光栅; 衍射效率

中图分类号 O436.1 **文献标识码** A

0 引言

液晶空间光调制器 (LCSLM) 是一种基于液晶分子电致双折射效应的有源波面变换器件. 根据写入信号的不同, 空间光调制器可分为光寻址型和电寻址型两种, 其中电寻址型空间光调制器因带有计算机视频接口, 具有良好的可编程、数字化和动态实时显示特性, 得到了广泛应用. LCSLM 在投影显示等几何光学成像的应用中, 涉及的主要是其对入射光强度的调制特性. 而在现代光学信息处理中, 则主要是把 LCSLM 作为衍射波面变换器件来使用. 例如, 把计算机设计的衍射光学元件直接显示到计算机实时控制的空间光调制器上, 可实现对入射光波的实时或动态调制^[1,2]. 利用衍射光学和程控高分辨率液晶空间光调制器相结合形成的动态全息波前变换技术^[3]可以进行实时的三维物体再现^[4,5]、制备参量可调的阵列菲涅耳波带片^[6]、产生动态全息光镊^[7]、形成阵列光学涡旋^[8]以及实现光学涡旋数字全息^[9]等; 已经在实时光信息处理^[10]、自适应光学^[11]、原子光学^[12]、光学微操纵^[13]、干涉测量^[14,15]等研究领域得到了成功的应用, 并显示了广阔的发展前景. 在这类应用中, 我们感兴趣的主要是 LCSLM 的衍射效率, 所涉及的主要是它的相位或复振幅调制特性. 因此, 详细分析液晶空间光调制器的复振幅调制特性, 探索实现最佳衍射效率的实验条件和配置就变得非常重要.

本文基于 Jones 矩阵理论和液晶弹性自由能理论, 详细分析计算了 TN-LCSLM 的复振幅调制特性; 并以显示一维矩形光栅为例分析计算了不同输入输出偏振器配置下的一级衍射效率. 数值计算结果和分析表明, 在加输出偏振器和不加输出偏振器

两种情况下都存在一个具有最大一级衍射效率的系统配置. 该研究结果为基于 TN-LCSLM 的动态全息波面变换实验中实现系统的最大输出衍射效率提供了参考依据.

1 TN-LCSLM 的衍射效率

作为衍射波面变换器件使用时, TN-LCSLM 有加输出偏振器和不加输出偏振器两种工作状态. 当不加输出偏振器时, 入射偏振光经调制以后出射的一般为椭圆偏振光. 如果不考虑光学器件的吸收损耗, 不加输出偏振器时系统的强度透过率为常量, 即与所施加的外加调制电压无关. 但此时相位调制仍然是输入偏振器取向参量和外加电压的函数. 在实际应用中, TN-LCSLM 主要是作为衍射器件, 用于显示计算全息图等波面变换图样, 利用光的相干衍射特性实现波面变换. 因此在不加输出偏振器的情况下, 虽然 TN-LCSLM 不能用于投影显示等纯强度调制应用, 但它仍可以作为衍射调制器件使用. 当加输出偏振器时, 透射光将始终是线偏振光, 其振幅和相位均随外加调制电压、输入和输出偏振器的相对取向变化而变化. 此时, 既可用于一般的投影显示, 也可用作衍射波面变换器件.

当 TN-LCSLM 作为衍射波面变换器件使用时, 在很多情况下都希望它能具有尽可能大的衍射效率. 在实际实验中我们可以观察到, 对于特定的衍射图样, 采用不同的输入输出偏振器配置和不同的偏振器取向参量, 系统的实际衍射效率会发生很大的变化. 为了实现最大衍射效率输出, 必须弄清衍射效率与调制电压、输入输出偏振器配置及其取向参量的关系.

假设液晶屏输入面上液晶分子的指向矢与实验室坐标的 x 轴的夹角为 Ψ_D , 液晶池厚度为 d , 入射光场振幅为 1 的单位平面波. 在液晶屏前置一起偏器, 其透光轴与 x 轴的夹角为 ζ_1 , 根据计算液晶屏

* 国家自然科学基金(10474043)资助项目

** Tel: 0531-86182521 Email: guochsh@sdu.edu.cn

收稿日期: 2005-09-21

透射光场的 Jones 矩阵理论^[16], 透过液晶屏的光场的复振幅透过率可写为

$$t = R(-\Psi_D)M_dR(\Psi_D)\begin{Bmatrix} \cos \zeta_1 \\ \sin \zeta_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_x \exp(i\varphi_x) \\ A_y \exp(i\varphi_y) \end{Bmatrix} \quad (1)$$

式中

$$M_d = \exp[-i\phi_d(V)] \prod_{m=1}^N R(-\alpha_m)M_mR(\alpha_m) \quad (2)$$

$$\phi_d(V) = \frac{\pi n_o d}{\lambda N} \sum_{m=1}^N \left[1 + \frac{n_e}{\sqrt{n_e^2 \sin^2 \theta_m + n_o^2 \cos^2 \theta_m}} \right] \quad (3)$$

$$M_m = \begin{bmatrix} \exp(-i\Gamma_m/2) & 0 \\ 0 & \exp(i\Gamma_m/2) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\Gamma_m = \frac{2\pi}{\lambda} (n_{em} - n_o) d \quad (5)$$

$$n_{em} = \frac{n_e}{\sqrt{n_e^2 \sin^2 \theta(z) + n_o^2 \cos^2 \theta(z)}} \quad (6)$$

式中, α_m 和 θ_m 是将液晶盒沿传播方向分成 N 个薄层时分别对应第 m 个液晶薄层的液晶指向矢的扭曲角和倾斜角; $R(\alpha)$ 为旋转变换矩阵. 一般情况下, α_m 和 θ_m 是外加电压和液晶材料参量的复杂函数, 但可以利用液晶的弹性自由能理论^[17] 给出其数值计算结果.

将式(2)~(6)和 α_m 、 θ_m 的数值计算结果依次代入式(1), 就可以具体计算出在不同外加电压情况下透过 TN-LCSLM 光场的复振幅. 一般情况下, 输出光场为一椭圆偏振光, 可用实验室坐标下的 x 分量(振幅为 A_x , 相位为 φ_x)和 y 分量(振幅为 A_y , 相位为 φ_y)来表示.

不加输出偏振器时, 系统的强度透过率显然为一常量, 与外加电压以及输入偏振器的取向无关; 但输出光波的偏振态是变化的, 即 φ_x 和 φ_y 的相位调制各不相同, 相位调制不仅与外加电压有关, 而且与输入偏振器的取向、系统双折射参量等有关.

在液晶盒后加一输出检偏器, 其透光轴与 x 轴的夹角为 ζ_2 , 则系统的复振幅透过率为

$$t' = \exp(-i\varphi_d) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P_x R(\zeta_2 - \Psi_D) \cdot M_d R(\Psi_D) \begin{Bmatrix} \cos \zeta_1 \\ \sin \zeta_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C \exp(i\varphi_C) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

基于上述 TN-LCSLM 的复振幅调制特性, 就可以进一步计算作为衍射器件使用时的衍射效率. 为简单起见, 考虑将一个周期为 $2a$ 的一维矩形光栅显示到 TN-LCSLM 上的情况. 图 1 是该一维周期光栅的灰度, 图中黑白两部分对应的液晶单元上分别施加不同的电压值.

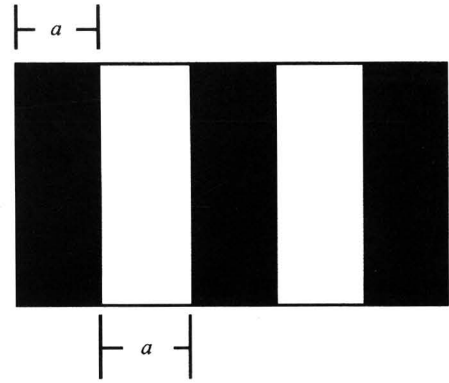


图 1 一维矩形光栅图样

Fig. 1 Geometry of a rectangular grating pattern

对于不加输出检偏器的情况, 系统的复振幅透过率可表示为

$$t_g = [t_B \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) + t_W \text{rect}\left(\frac{x-a}{a}\right)] * \text{com} b\left(\frac{x}{2a}\right) \quad (8)$$

式中, t_B 和 t_W 分别对应光栅黑白区域的复振幅透过率. 由式(1)给出. 用单位平面波照明, 只考虑透射光的一级衍射项. 将式(1)代入式(8), 可算得其相对衍射效率 η_1 为

$$\eta_1 = \eta_x + \eta_y = [A_{xB}^2 + A_{xW}^2 - 2A_{xB}A_{xW} \cos(\Delta\varphi_x)] + [A_{yB}^2 + A_{yW}^2 - 2A_{yB}A_{yW} \cos(\Delta\varphi_y)] \quad (9)$$

式中, A_{xB} 、 A_{xW} 和 A_{yB} 、 A_{yW} 分别为式(1)中的 A_x 和 A_y 对应显示光栅黑白两种状态时的值, $\Delta\varphi_x = \varphi_{xB} - \varphi_{xW}$ 和 $\Delta\varphi_y = \varphi_{yB} - \varphi_{yW}$ 则分别为透过光栅黑白区域的光场之间的相位差.

对于加输出检偏器的情况, 式(8)中的 t_B 和 t_W 应改为 t'_B 和 t'_W , 并由式(7)决定. 类似地, 可以算出这种情况下对应透射光场的一级衍射光的衍射效率 η_1' 为

$$\eta_1' = C_B^2 + C_W^2 - 2C_B C_W \cos(\Delta\varphi) \quad (10)$$

式中, C_B 和 C_W 是式(7)中的 C 对应显示光栅黑白两种状态时的值; $\Delta\varphi = \varphi_{CB} - \varphi_{CW}$ 为对应的相位差. 由于液晶指向矢分布与外加驱动电压的复杂关系, 由式(9)和式(10)仍然很难给出衍射效率与外加驱动电压以及输入、输出偏振器取向的解析关系, 但基于以上公式可以进行定量的数值计算和分析.

2 计算结果与讨论

液晶在外电场作用下达到平衡态时, 总自由能趋于最小, 据此应用变分法就可以求解出平衡态下指向矢的空间分布. 基于 Matlab 程序, 采用 Jacobi 迭代法具体数值计算了扭曲向列液晶盒中分子指向矢的空间分布. 图 2(a) 和 (b) 分别给出了液晶指向矢的扭曲角 ϕ 和倾斜角 θ 沿 z 轴的变化情况. 计算

中所采用的参量为 $\epsilon_0 = 3.6$, $\epsilon_{11} = 7.3$, $k_{11} = k_{22} = k_{33} = 22.78 \times 10^{-12} \text{ N}$, $n_o = 1.4794$, $n_e = 1.5763$, 液晶层厚度 $d = 5 \mu\text{m}$; 入射面指向矢初始锚定方向为 $\phi = 0$ 和 $\theta = 0$, 出射面液晶指向矢的初始锚定方向为 $\phi = \pi/2$ 和 $\theta = 0$; 阈值电压 $V_{th} = 2.263 \text{ V}$. 由图 2 可知, 当外加电压小于 V_{th} 时, 扭曲角 ϕ 沿 z 轴呈线性变化, 即从入射面取向膜的锚定方向连续均匀地扭转至出射面上取向膜的锚定方向. 随着外加电压的增加, 液晶盒中呈现出复杂的情况, 扭曲角和倾斜角是深度 z 和电压 V 的非线性函数. 扭曲角 ϕ 关于中点奇对称, 而倾斜角 θ 的变化关于中线是偶对称的.

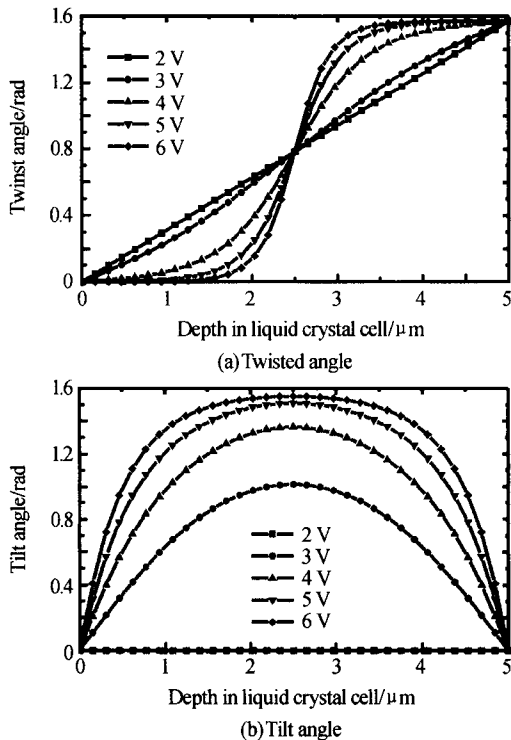


图 2 在不同电压下液晶指向矢的空间分布
 Fig. 2 Distribution of the LC director angle along optical axis under various voltages

根据上面液晶指向矢分布的数值计算结果和式 (1), 可以求得当起偏器和检偏器透光轴取向为 $\zeta_1 = 0$ 和 $\zeta_2 = \pi/2$ 情况下, TN-LCSLM 系统的总的强度透过率曲线, 结果如图 3.

由图 3 可知, 当施加电压低于阈值电压时, 透射光强较大并且几乎保持不变; 当外加电压高于阈值电压并逐渐增大时, 透射光强则随着逐渐减小; 当外加电压足够大时, 透射光变得很弱, 系统几乎不透明. 在常规的液晶显示和投影应用中就是利用了液晶的这种强度透过率随驱动电压变化的性质. 因此在这种应用中, 输入输出偏振器是必需的元件.

在 TN-LCSLM 的电压—强度透过率曲线的近似线性变化范围内, 适当选取两个工作电压点 (如图 3 中黑色圆点所示) 对应实际矩形光栅的两种不同

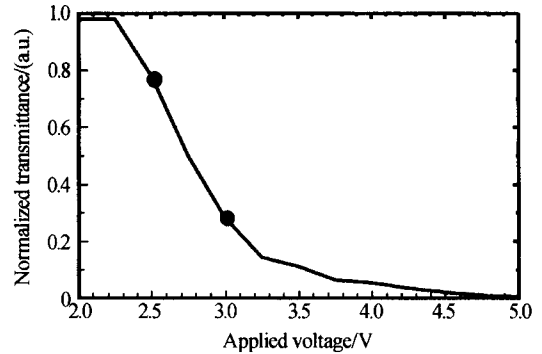


图 3 输入输出偏振器透光轴的取向分别为 $\zeta_1 = 0$ 和 $\zeta_2 = \pi/2$ 时, TN-LCSLM 系统的强度透过率与外加电压的关系

Fig. 3 Normalized Transmittance of the TN-LCSLM under various voltages when the orientations of the input and output polarizers are taken as $\zeta_1 = 0$ and $\zeta_2 = \pi/2$ respectively

调制状态 (图 1 中黑白两部分). 利用式 (9) 和式 (10) 就可分别计算不加检偏器和加检偏器时等效液晶光栅的衍射效率. 首先考虑不加检偏器的情况. 用计算机模拟一维矩形光栅一级衍射项的衍射效率随起偏器透光轴取向角 ζ_1 变化的情况. 模拟结果如图 4 中的曲线 B.

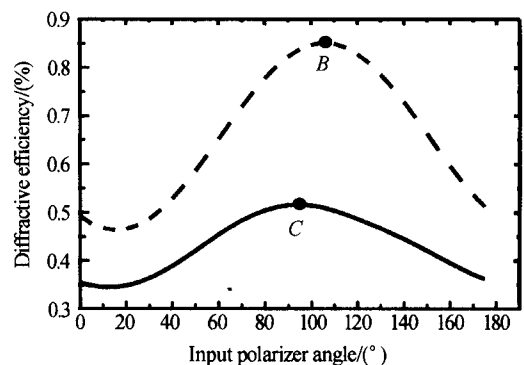


图 4 不同输出偏振器配置下 TN-LCSLM 的一级衍射效率与输入偏振器取向的关系

Fig. 4 The first-order diffraction efficiency of the TN-LCSLM under various configurations of output polarizer

由计算机模拟结果可知, 当起偏器透光轴取向在 $0 \sim 180^\circ$ 范围内改变时该矩形光栅的一级衍射效率是变化的, 并且存在一个最大值, 如图 4 中曲线 B 上的黑色圆点所标注的状态. 在所设定的模拟条件和坐标系下, 一级衍射效率的这一最大值对应起偏器透光轴取向为 105° 时的配置条件; 相对起偏器透光轴取向为 18° 时的情况 (对应衍射效率的最小值), 衍射效率增加了约 1 倍.

再考虑在系统输出端加输出检偏器的情况. 由于在该配置下, 系统的一级衍射效率不仅受输入起偏器的透光轴取向的影响, 还受输出检偏器透光轴取向的影响. 为了找出具有最大一级衍射效率的取向配置, 首先给定一个输入起偏器透光轴的取向角,

然后分别计算对应不同的输出检偏器取向(从 0 变到 180°)时系统透射光场的一级衍射效率. 计算结果表明, 当输出检偏器的取向改变时, 系统的一级衍射效率也相应发生变化, 并且存在一个极大值. 该极大值的大小与输入起偏器透光轴的具体取向有关. 图 4 中的曲线 C 给出了该极大值随输入起偏器透光轴取向的变化情况. 由图可见, 在加输出检偏器的情况下, 系统透射光的一级衍射效率与输入输出偏振器透光轴取向的具体配置有关; 在数值计算所采用的参量和坐标系条件下(与不加输出偏振器的情况相同), 只有在输入偏振器透光轴取向为 95°时, 系统透射光场的一级衍射效率才可能有最大值(要得到该最大值, 输出偏振器透光轴取向还必须要设定在约 175°左右). 与不加输出偏振器的情况(曲线 B)比较可见, 不加输出偏振器时的最大一级衍射效率所对应的输入偏振器透光轴的取向角与加输出偏振器时实现最大一级衍射效率所对应的输入偏振器透光轴的取向角是不相同的, 前者比后者大左右. 同时, 两者实现的一级最大衍射效率的值也不同, 前者比后者要大得多, 差不多是后者的两倍. 进一步的计算表明, 改变外加驱动电压, 上述两种偏振器配置情况下仍存在产生最大一级衍射效率输出的偏振器取向, 只是该最大衍射效率的值和对应的取向角有所变化.

由于图 1 的衍射光栅的衍射效率本质上是由其相位调制幅度和振幅调制幅度所决定的, 图 4 给出的衍射效率与输入输出偏振器配置的关系曲线也同时揭示了液晶空间光调制器的振幅和相位调制变化情况. 结合对式(7)的分析可知, 光栅衍射效率取最小主要对应相位调制为最小的情况. 随着相位和振幅调制幅度的增加, 衍射效率也逐渐增加. 但衍射效率取最大时的相位调制幅度并不一定为最大. 因为对于 TN-LCSLM, 相位调制幅度取最大或近似纯相位调制情况下调制器的振幅透过率常会变得很小. 由于 TN-LCSLM 的相位和振幅调制幅度以及平均振幅透过率与偏振器取向配置存在的复杂关系, 很难给出一个解析解. 衍射效率取最大的状态只能通过数值计算或实验测量来确定.

上述计算结果表明, 用 TN-LCSLM 显示衍射光学图样时, 要想获得最大的一级衍射效率输出, 应采用不加输出偏振器的特殊配置. 也就是说, 要从常规配置的 TN-LCSLM 系统上去掉输出检偏器, 并要适当改变输入偏振器透光轴的取向. 虽然上述分析是以显示二元矩形光栅为例进行的, 但其结论可直接推广到显示其他二元型衍射光学元件的情况. 对于用 TN-LCSLM 显示其他类型的衍射光学元件

的情况, 也可以利用上述分析方法确定其最大衍射效率.

3 结论

本文以液晶弹性自由能理论为基础, 利用 Matlab 程序, 对液晶层的指向矢分布进行数值计算, 得出液晶指向矢在不同电压下的分布参量; 在此基础上基于液晶 Jones 矩阵理论, 分析了 TN-LCSLM 的复振幅透过率, 利用指向矢分布参量对显示一维矩形光栅时系统的一级衍射效率进行了数值计算和分析. 计算结果表明, 系统的一级衍射效率, 不仅和外加驱动电压有关, 还与输入输出偏振器的具体配置及透光轴取向有关, 并存在一个实现最大一级衍射效率的系统配置. 该数值计算结果为在使用 TN-LCSLM 作为动态衍射波面变换器件时实现最大衍射效率输出提供了理论依据.

参考文献

- McManamon P F, Watson E A, Dorschner T A, *et al.* Applications look at the use of liquid crystal writable gratings for steering passive radiation. *Opt Eng*, 1993, **32**(11): 2657~2664
- Laude V. Twisted-nematic liquid-crystal pixelated active lens. *Opt Commun*, 1998, **153**(1-3): 134~152
- 任秀云, 程欣, 刘轩, 等. 基于空间光调制器的计算全息成像特性. *光子学报*, 2005, **34**(1): 110~113
Ren X Y, Cheng X, Liu X, *et al.* *Acta Photonica Sinica*, 2005, **34**(1): 110~113
- Plesniak W. Incremental update of computer-generated holograms. *Opt Eng*, 2003, **42**(6): 1560~1571
- Natoba O, Naughton T J, Frauel Y, *et al.* Real-time three-dimensional object reconstruction by use of a phase-encoded digital hologram. *Appl Opt*, 2002, **41**(29): 6187~6192
- 陈怀新, 魏宏刚, 陈祯培, 等. 采用液晶空间光调制器的可控性阵列菲涅耳波带片. *光子学报*, 2001, **30**(5): 562~566
Chen H X, Wei H G, Chen Z P, *et al.* *Acta Photonica Sinica*, 2001, **30**(5): 562~566
- Grier D G. A revolution in optical manipulation. *Nature*, 2003, **424**(6950): 810~816
- Ladavac K, Grier D G. Microoptomechanical pumps assembled and driven by holographic optical vortex arrays. *Opt Express*, 2004, **12**(6): 1144~1149
- Guo C S, Cheng X, Ren X Y, *et al.* Optical vortex phase-shifting digital holography. *Opt Express*, 2004, **12**(2): 5166~5171
- Javidi B, Yu F. Real-time image recognition by partially coherent light. *Appl Opt*, 1986, **25**(14): 2365~2371
- Kudryashov A V, Gonglewski J, Browne S, *et al.* Liquid

- crystal phase modulator for adaptive optics. *Temporal performance characterization. Opt Commun*, 1997, **141** (5-6):247~253
- 12 McGloin D, Spalding G C, Melville H, *et al.* Application of spatial light modulators in atom optics. *Opt Express*, 2003, **11**(2): 158~166
- 13 MacDonald M P, Volke-Sepulveda K, Paterson L, *et al.* Revolving interference patterns for the rotation of optically trapped particles. *Opt Commun*, 2002, **201** (1-3):21~28
- 14 李恩普, 陆福一, 陈长乐, 等. 激光无损检测钣金胶接结构缺陷大小的判定. *光子学报*, 1994, **23**(5):457~462
- Li E P, Lu F Y, Chen C L, *et al.* *Acta Photonica Sinica*, 1994, **23**(5):457~462
- 15 王春霞, 伍凡, 侯德胜. 计算机产生全息图对补偿器检测的技术研究. *光子学报*, 2003, **32**(5):592~59
- Wang C X, Wu F, Hou D S. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(5):592~594
- 16 Pochi Y, Claire G. *Optics of Liquid Crystal Displays*. USA. New York: John Wiley & Sons. Inc., 1999. 103~150
- 17 Oseen C W. The theory of the liquid crystals. *Trans Faraday Soc*, 1933, **29**(140):883~899

Diffraction Efficiency of a Grating Displayed on a Liquid Crystal Display

Cheng Xin¹, Ren Xiuyun², Han Yujing¹, Guo Chengshan¹

¹ Department of Physics, Shandong Normal University, Jinan 250014

² School of Information Science and Engineering, Harbin Institute of Technology at Weihai, Weihai 264209

Received date: 2005-09-21

Abstract Complex modulating properties of a twisted-nematic liquid crystal spatial light modulator (TN-LCSLM) are analyzed and simulated based on theories of the Jones matrix and the elastic free energy. As a further example, the first-order diffraction efficiency of a grating pattern displayed on the TN-LCSLM is calculated. It is found that there exists a maximum of the first-order diffraction efficiency even when the output polarizer is placed or not.

Keywords liquid crystal; spatial light modulator; grating; diffractive efficiency



Cheng Xin was born in Shandong. He is currently working on his MS degree in Physics Department of Shandong Normal University under the direction of Prof. Guo Chengshan. His main research is focused on diffraction optics and information optics.