

非傍轴平顶高斯光束 M^2 因子两种定义的比较研究*

康小平^{1,2} 吕百达¹

(1 四川大学激光物理与化学研究所, 成都 610064)

(2 琼州大学物理系, 广东五指山 572200)

摘要 基于功率密度的二阶矩方法, 推导出了非傍轴平顶高斯(FG)光束束宽和远场发散角的解析表达式. 研究表明, 当 $w_0/\lambda \rightarrow 0$ 时, 远场发散角趋于渐近值 $\theta_{\max} = 63.435^\circ$, 与阶数无关. 使用非傍轴高斯光束代替傍轴高斯光束作为理想光束, 研究了非傍轴 FG 光束的 M^2 因子, 并与传统定义的 M^2 因子作了比较. 在非傍轴范畴, 非傍轴 FG 光束的 M^2 因子不仅与阶数 N 有关, 而且与 w_0/λ 有关. 按照定义, 当 $w_0/\lambda \rightarrow 0$ 时, 非傍轴 FG 光束的 M^2 因子不等于 0, 对阶数 $N=1, 2, 3$ 时, M^2 因子分别趋于 0.913, 0.882 和 0.886. 当 $N \rightarrow \infty$ 时, M^2 因子取最小值 $M_{\min}^2 = 0.816$.

关键词 非傍轴平顶高斯光束; M^2 因子; 功率密度

中图分类号 O435 **文献标识码** A

0 引言

在傍轴光束范畴内, 对用光束传输因子, 即 M^2 因子来评价光束质量的问题已进行了广泛的研究^[1]. 随着二极管激光器、微光学元件、光子晶体和微腔激光器研究的进展, 需要研究有大发散角和/或束腰宽度与波长可相比拟的非傍轴光束的传输变换规律及其光束质量问题^[2~4]. 为了克服将 M^2 因子推广到非傍轴光束出现的发散困难, Porras 提出了用功率密度^[5] (或称为精确定义的光强^[6]) 的二阶矩代替光强二阶矩的方法, 并对非傍轴标量高斯光束 (包括硬边衍射情况) 作了数值计算分析. 然而, 当 w_0/λ (束腰宽度/波长) $\rightarrow 0$ 时, $M^2 \rightarrow 0$. 究其原因采用了傍轴高斯光束作为理想光束引起的. 本文以标量非傍轴平顶高斯(FG)光束为例, 提出使用非傍轴高斯光束作为理想光束定义 M^2 因子, 与传统定义的 M^2 因子作了比较研究, 并对所得结果作了物理解释.

1 理论模型

在直角坐标系中, 二维 FG 光束在入射面 $z=0$ 处的场分布为^[7]

$$E_0(x_0, 0) = \exp(-(N+1)x_0^2/w_0^2) \cdot \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} (\sqrt{N+1}x/w_0)^{2n} \quad (1)$$

式中 w_0 为对应基模高斯光束的束腰宽度, $N=0, 1, 2, \dots$ 是 FG 光束的阶数, $N=0$ 对应于基模高斯光束.

根据角谱理论, 式(1)所示的 FG 光束的空间光场分布可表示为^[8]

$$E(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_0(p) \exp[ik(px + mz)] dp \quad (2)$$

式中 $k=2\pi/\lambda$, λ 为波长, $A_0(p)$ 为 $E_0(x_0, 0)$ 的傅里叶变换, p 为场的方向余弦, $p=\lambda f_x$, f_x 为 x 方向的空间频率, $p^2 \leq 1$ 时, $m = \sqrt{1-p^2}$, $p^2 > 1$ 时, $m = i\sqrt{p^2-1}$.

对式(1)进行傅里叶变换, 得到空间-频率域中的场分布为

$$A_0(p) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(x_0, 0) \exp(-ikpx_0) dx_0 = \frac{w_0 \sqrt{\pi}}{\lambda \sqrt{N+1}} \exp\left[-\frac{\pi^2 w_0^2 p^2}{\lambda^2 (N+1)}\right] \sum_{n=0}^N \frac{(-0.5)^n}{n!} \cdot He_{2n} \left[\sqrt{2} \frac{\pi w_0 p}{\lambda \sqrt{N+1}} \right] \quad (3)$$

式中的 He_{2n} 是 $2n$ 阶带权的厄米多项式

由式(2)和式(3)得到 FG 光束在 z 平面处的场分布为

$$E(x, z) = \frac{w_0 \sqrt{\pi}}{\lambda \sqrt{N+1}} \sum_{n=0}^N \frac{(-0.5)^n}{n!} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{\pi^2 w_0^2 p^2}{\lambda^2 (N+1)}\right] \exp[ik(px + z \sqrt{1-p^2})] dp \quad (4)$$

式中, $p > 1$ 时, 对应于随的增加迅速衰减的倏逝波, 而 $p < 1$ 时对应于传播波.

FG 光束在任一横平面处的功率密度分布为^[4,8]

$$D = \text{Re}\{-i(\lambda/2\pi) E^*(x, z) \partial E(x, z) / \partial z\} \quad (5)$$

式中, Re 表示取实部, $*$ 表示复共轭.

使用文献[5]的方法, 由式(2)~(5), 得到直角坐标系中 FG 光束在自由空间非傍轴传输时, 其束腰宽度和远场发散角分别为

$$W^2(z=0) = W^2(0) = \frac{4}{P(z)} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 D(x, 0) dx = \frac{\lambda^2}{\pi^2 P(z)} \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial [A_0(p) \gamma]}{\partial p} \frac{\partial [A_0^*(p)]}{\partial p} dp \quad (6)$$

* 国家高技术基金资助项目 (A823070)

Tel: 028-85412819 Email: xpk710@126.com

收稿日期: 2004-11-15

$$\tan^2 \theta_0 = \frac{4}{P(z)} \int_{-1}^1 \frac{p^2}{\gamma} |A_0(p)|^2 dp \quad (7)$$

式中 $\gamma = \sqrt{1-p^2}$, $P(z) = \int_{-1}^1 \gamma |A_0(p)|^2 dp$.

把式(3)中的指数函数展开为泰勒级数,并利用带权厄米多项式展开式^[10],得到

$$A_0(p) = \frac{\omega_0 \sqrt{\pi}}{\lambda \sqrt{N+1}} \sum_{s=0}^N \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N \cdot \frac{(-0.5)^{n+m+s} (2n)!}{s! n! m! (2n-2m)!} \left[\frac{\sqrt{2\pi\omega_0 p}}{\lambda \sqrt{N+1}} \right]^{2(s+n-m)} \quad (8)$$

由式(8)知, $A_0(p)$ 是一实数,因此倏逝波对束腰的贡献为零,在计算中可忽略,式(6)积分限可由 $\pm\infty$

改为 ± 1 . 把式(8)代入式(6)、(7),经冗繁的积分,可得到非傍轴 FG 光束的束宽及远场发散角分别为

$$W^2(0) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\pi}(N+1)P(z)} F_{sm}(s_2+n_2-m_2) \cdot \frac{(s_1+n_1+m_1)\Gamma(c-1/2) - \Gamma(c+1/2)}{\Gamma(c+1)} \quad (9)$$

$$\tan^2 \theta_0 = \frac{2\pi^{3/2}\omega_0^2}{\lambda^2(N+1)P(z)} F_{sm}\Gamma(c+3/2) / \Gamma(c+2) \quad (10)$$

式中, $c = s_1 + s_2 + n_1 + n_2 - m_1 - m_2$, Γ 为伽玛函数

$$p(z) = \frac{\pi^{3/2}\omega_0^2}{4\lambda^2(N+1)} F_{sm}\Gamma(c+1/2) / \Gamma(c+2) \quad (11)$$

$$F_{sm} = \sum_{s_1=0}^{\infty} \sum_{s_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^N \sum_{m_1=0}^{n_1} \sum_{m_2=0}^{n_2} \frac{(-0.5)^{s_1+s_2+n_1+n_2+m_1+m_2} (2n_1)! (2n_2)! (\sqrt{2\pi\omega_0}/\lambda \sqrt{N+1})^{2c}}{n_1! n_2! s_1! s_2! m_1! m_2! (2n_1-2m_1)! (2n_2-2m_2)!} \quad (12)$$

在式(9)、(10)中,令 $N=0$,则得到非傍轴高斯光束在自由空间传输时,其束腰宽度和远场发散角

的解析公式分别为

$$W_{NG}^2(0) = \frac{4\lambda^2 \sum_{s_1=0}^{\infty} \sum_{s_2=0}^{\infty} \frac{(\pi\omega_0/\lambda)^{2(s_1+s_2)} s_2 [s_1\Gamma(s_1+s_2-1/2) - \Gamma(s_1+s_2+1/2)]}{(-1)^{-(s_1+s_2)} s_1! s_2! \Gamma(s_1+s_2+1)}}{\pi^2 \sum_{s_1=0}^{\infty} \sum_{s_2=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s_1+s_2} (\pi\omega_0/\lambda)^{2(s_1+s_2)} \Gamma(s_1+s_2+1/2)}{s_1! s_2! \Gamma(s_1+s_2+2)}} \quad (13)$$

$$\tan^2 \theta_{NG} = \frac{8 \sum_{s_1=0}^{\infty} \sum_{s_2=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s_1+s_2} (\pi\omega_0/\lambda)^{2(s_1+s_2)} \Gamma(s_1+s_2+3/2)}{s_1! s_2! \Gamma(s_1+s_2+2)}}{\sum_{s_1=0}^{\infty} \sum_{s_2=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s_1+s_2} (\pi\omega_0/\lambda)^{2(s_1+s_2)} \Gamma(s_1+s_2+1/2)}{s_1! s_2! \Gamma(s_1+s_2+2)}} \quad (14)$$

用非傍轴高斯光束作为理想光束,则非傍轴 FG 光束的 M^2 因子可定义为

$$M^2 = W(0) \tan \theta_0 / W_{NG}(0) \tan \theta_{NG} \quad (15)$$

把式(9)、(10)、(13)及(14)代入式(15),即可求出任意阶非傍轴 FG 光束的 M^2 因子. 如果沿用文献[5]中非傍轴 M^2 因子的定义,则非傍轴 FG 光束的 M^2

因子可表示为

$$M^2 = \pi W(0) \tan \theta_0 / \lambda \quad (16)$$

由式(15)、(16)知,无论采用定义式(15)或(16),在非傍轴情形下, M^2 因子不仅与阶数 N 有关,而且还与 ω_0/λ 有关. 当 $\omega_0/\lambda \gg 1$,式(15)、(16)退化为

$$M^2 = 2 \left[\frac{\sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^N \sum_{m_1=0}^{n_1} \sum_{m_2=0}^{n_2} \frac{(-0.5)^{n_1+n_2+m_1+m_2} (2n_1)! (2n_2)! \Gamma(n_1+n_2-m_1-m_2+3/2)}{n_1! n_2! m_1! m_2! (2n_1-2m_1)! (2n_2-2m_2)!} \right]^{1/2} \left[\frac{\sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^N \frac{2^{-(n_1+n_2)}}{n_1! n_2!} \Gamma(n_1+n_2+3/2)}{\sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^N \frac{2^{-(n_1+n_2)}}{n_1! n_2!} \Gamma(n_1+n_2+1/2)} \right]^{-1} \quad (17)$$

显然,这是傍轴 FG 光束 M^2 因子的公式^[11]. 此外,尽管式(9)、(10)写为无穷级数形式,但收敛很快,数值计算表明,一般 s_i ($i=1,2$) 取至 10 项左右就可得到与直接积分式(6)和式(7)一致的结果.

2 数值计算和分析

图 1 为非傍轴 FG 光束的远场发散角 θ 随 ω_0/λ 的变化,图中实线为傍轴结果,虚线为非傍轴结果.

由图知,当 $\omega_0/\lambda \rightarrow 0$ 时,远场发散角 θ_0 达到渐近值 $\theta_{\max} = 63.435^\circ$,与阶数 N 无关. 这也可从式(10)中得到,当 $\omega_0/\lambda \ll 1$ 时,取级数展开的前两项,并略去高阶项后,得到

$$\tan^2 \theta_0 \approx 4 \left[1 - \frac{\pi^2 (2N+3)}{3(N+1)} \left(\frac{\omega_0}{\lambda} \right)^2 \right] \quad (18)$$

由式(18)知,当 $\omega_0/\lambda \rightarrow 0$ 时,任意阶非傍轴 FG 光束的远场发散角取得最大值 $\theta_{\max} = 63.435^\circ$,即发散角有一上限.

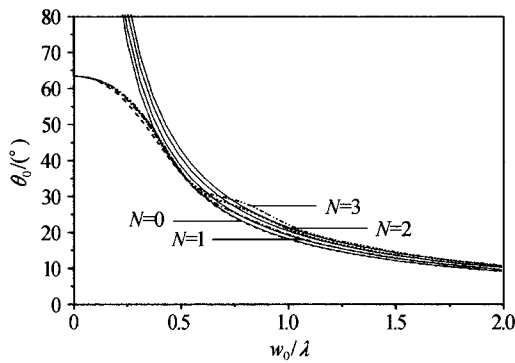


图1 非傍轴 FG 光束的远场发散角 θ_0 随 w_0/λ 的变化, $N=0, 1, 2, 3$

Fig. 1 Far-field divergence angle θ_0 of nonparaxial FG beams with $N=0, 1, 2, 3$ versus w_0/λ

图2给出了按式(15)定义的 M^2 因子随 w_0/λ 的变化曲线. 从图2可以看出, 非傍轴 FG 光束的 M^2 因子与束宽 w_0/λ 和阶数 N 有关. 当 w_0/λ 较大(例如 $N=1, w_0/\lambda > 1.5$; $N=2, w_0/\lambda > 2$)时, M^2 因子之值趋于傍轴结果, 此时 M^2 因子仅与阶数 N 有关. 当 w_0/λ 较小(如 $w_0/\lambda < 1$)时, M^2 因子的变化是非单调的. 对 $N=1, 2, 3$, 当 $w_0/\lambda \rightarrow 0$ 时, M^2 因子不再趋于 0, 而分别等于 0.913, 0.882 和 0.866. 这可用式(15)解释如下: 当 $w_0/\lambda \rightarrow 0$ 时, $\tan \theta_0 / \tan \theta_{NG}$ 趋于 1, 因此, M^2 因子之值取决于 $W(0)/W_G(0)$. 当 $w_0/\lambda \ll 1$ 时, 在式(9)中取级数展开的前两项, 得到 $W^2(0)/W_G^2(0) \approx (2N+3)/3(N+1)$, 即在 $w_0/\lambda \rightarrow 0$ 时, M^2 因子之值趋于 $\sqrt{(2N+3)/3(N+1)}$. 由此式对 $N=1, 2, 3$ 的计算值与图中所得值一致. 特别是, 当 $N \rightarrow \infty$ 时, M^2 因子取最小值 $M_{\min}^2 = 0.816$.

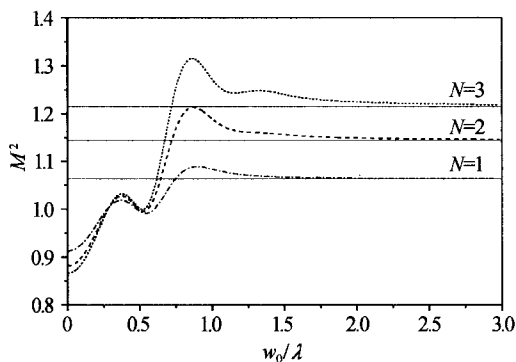


图2 非傍轴 FG 光束的 M^2 因子随 w_0/λ 的变化, $N=1, 2, 3$

Fig. 2 M^2 factor of nonparaxial FG beams with $N=1, 2, 3$ versus w_0/λ

图3给出了按式(16)定义的 M^2 因子随 w_0/λ 的变化曲线. 由图3可以看出, 当 w_0/λ 较大($w_0/\lambda > 2$)时, M^2 因子之值趋于傍轴结果. 比较图2、3知, 随着 w_0/λ 增加, 二者差异减小, 当 $w_0/\lambda > 2$ 时都趋近于傍轴结果. 但在非傍轴范围(w_0 与 λ 可相

比拟或比 λ 更小时)内, 二者是有差异的. 虽然 w_0/λ 足够小时, M^2 因子都可以小于 1, 但 $w_0/\lambda \rightarrow 0$ 时, 用定义式(15), M^2 因子随 N 而异趋于一个大于 0.8 的有限数. 而用定义式(16), $M^2 \rightarrow 0$, 与阶数 N 无关, 其原因是, 此时 $W(0) \tan \theta_0 \rightarrow 0$, 而对理想高斯光束 $W_G(0) \tan \theta_{0G} \rightarrow \pi/\lambda$.

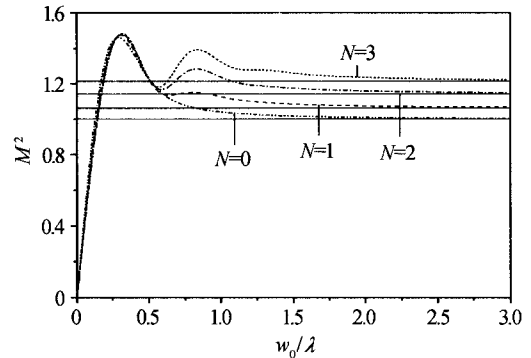


图3 非傍轴 FG 光束的 M^2 因子随 w_0/λ 的变化, $N=0, 1, 2, 3$

Fig. 3 M^2 factor of nonparaxial FG beams with $N=0, 1, 2, 3$ versus w_0/λ

3 结论

本文用功率密度二阶矩定义推导出了标量非傍轴 FG 光束束宽和远场发散角的公式, 非傍轴高斯光束的对应公式可作为阶数 $N=0$ 的特例得出. 采用非傍轴高斯光束作为理想光束, 对非傍轴 FG 光束的 M^2 因子作了计算分析, 并与使用傍轴高斯光束作为理想光束的结果作了比较. 研究表明, 非傍轴 FG 光束的 M^2 因子不仅与阶数 N 有关, 而且与 w_0/λ 有关, w_0/λ 足够小时, M^2 因子可小于 1. 当 $w_0/\lambda \rightarrow 0$ 时, 非傍轴 FG 光束的远场发散角趋于渐近值 $\theta_{\max} = 63.435^\circ$, 与阶数无关. 采用式(15)定义非傍轴 FG 光束 M^2 因子, 当 $w_0/\lambda \rightarrow 0$ 时, 对 $N=1, 2, 3$, M^2 因子分别趋于 0.913, 0.882 和 0.866, 当 $N \rightarrow \infty$ 时, M^2 因子取最小值 $M_{\min}^2 = 0.816$.

参考文献

- 1 Siegman A E. New development in laser resonance. *SPIE*, 1990, **1224**: 2~14
- 2 邓启凌, 杜春雷. 微光学元件复制技术研究. *光子学报*, 2002, **31**(1): 110~113
Deng Q L, Du C L. *Acta Photonica Sinica*, 2002, **31**(1): 110~113
- 3 Ouyang Z B, An H N, Ruan S C, *et al.* Promoting the coupling efficiency of waves by a 2D Photonic crystal. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(1): 69~72
- 4 郑一周, 胡巍, 陆大全, 等. 小尺度自聚焦理论的非傍轴修正. *光子学报*, 2003, **32**(11): 1329~1331
Zheng Y Z, Hu W, Lu D Q, *et al.* *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(11): 1329~1331

- 5 Porras M A. Finiteness and propagation law of the power density second-order moment for diffracted scalar light beam. *Optik*, 1999, **110**(9): 417~420
- 6 曹清, 邓锡铭, 郭弘. 横截面上光强的精确表述. 光学学报, 1996, **16**(7): 897~902
Cao Q, Deng X M, Guo H. *Acta Optica Sinica*, 1996, **16**(7): 897~902
- 7 Gori F. Flattened Gaussian beams. *Opt Commun*, 1994, **107**(5): 335~341
- 8 Mandel L, Wolf E. *Optical Coherence and Quantum Optics*. New York; Cambridge U. Press, 1995. 113
- 9 Cao Q, Deng X M. Power carried by scalar light beams. *Opt Commu*, 1998, **151**(6): 212~216
- 10 Beyer W H. *Standard Mathematical Tables and Formulate*. 29th ed. London; CRC Press, Inc., 1991. 379
- 11 Lü B, Zhang B, Luo S. Far-field intensity distribution, M^2 factor, and propagation of flattened Gaussian beams. *Appl Opt*, 1999, **38**(21): 4581~4584

A Comparative Study on Two Definitions of the M^2 Factor of Nonparaxial Flattened Gaussian Beams

Kang Xiaoping^{1,2}, Lü Baida¹

¹ Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064

² Department of Physics, Qiong Zhou University, Wuzhishan 572200

Received date: 2004-11-15

Abstract Based on the second-order moment of the power density, the explicit expressions for the beam width and far-field divergence angle of nonparaxial flattened Gaussian (FG) beams are derived. It is found that as w_0/λ (waist width-to-wavelength ratio) $\rightarrow 0$, the far-field divergence angle approaches an asymptotic value of $\theta_{\max} = 63.435^\circ$, independent of the beam order. Then, the nonparaxial Gaussian beam instead of the paraxial one is chosen as the ideal beam, the M^2 factor of nonparaxial FG beams is studied and compared with the conventional definition of the M^2 factor. In the nonparaxial regime, the M^2 factor of nonparaxial FG beams depends not only on the beam order, but also on w_0/λ . According to our definition, as $w_0/\lambda \rightarrow 0$, the M^2 factor of nonparaxial FG beams does not equal to zero, but approaches 0.913, 0.882 and 0.886 for the beam orders $N = 1, 2, 3$, respectively. In particular, for $N \rightarrow \infty$ the M^2 factor takes its minimum $M_{\min}^2 = 0.816$.

Keywords Nonparaxial Flattened Gaussian (FG) beam; M^2 factor; Power density



Kang Xiaoping was born in July, 1964. She graduated from Xingjiang Yili Normal College in 1986. Now she is studying for Ph. D. degree in Sichuan University. Her interest includes the propagation and control of laser beams.