PMD 统计模型的改进

丁攀峰　孙军强　侯　睿
（华中科技大学光电子工程系，武汉 430074）

摘　要　对于 PMD 的研究，分段模型是较优的选择. 原始模型经过数学推导，可转化为迭代模型. 转化后的模型物理意义明晰，在直观上便于看出 PMD 随光纤分段增加的累积过程，具有较强的移植性. 理论分析指明了数值方法产生误差的缘由，给出了实用数值计算的迭代模式，对于 PMD 补偿具有指导意义，同时使计算变得简洁.

关键词　偏振模色散；数值模型；迭代
中图分类号　TNT929.11　　**文献标识码**　A

0　引言

随着通讯系统速率的提高，偏振模色散（PMD）已成为不可忽视的因素. 在对光纤 PMD 的研究中，Poole 等人建立分段模型，该模型在对光纤偏振模色散统计特性的研究中起到了奠基的作用. 国外研究者利用传统模型对高阶偏振模色散进行了分析[1]，对模型本身讨论不多. 本文在理论模型的框架上加以改进，得到比较实用的数值计算模型，为偏振模色散的研究提供了有用的方法.

1　模型简介

模型描述如下：将光纤分为 N 段，输入光的偏振状态用矢量描述，可以采用 Stocks 矢量，同时传输矩阵则为 3×3 阶密勒矩阵. 以琼斯矢量为例，每段光纤对输入光状态的改变用 2×2 阶矩阵表征，

$$\hat{e}_{\text{out}}=\exp\left(-\alpha l-\mathrm{j}\,\bar{\beta} l\right)U\,\hat{e}_{\text{in}} \tag{1}$$

式中 U 为传输矩阵，$U=R^{-1}DR$，$\hat{e}_{\text{in}}$，$\hat{e}_{\text{out}}$ 分别为输入输出偏振态，$\alpha=\alpha(\omega)$ 为光纤损耗系数，$\bar{\beta}=\bar{\beta}(\omega)$ 为平均传播常量，矩阵 R，D 分别表示为[2,3]

$$R=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}\exp\left(-\mathrm{j}\phi/2\right) & 0\\ 0 & \exp\left(\mathrm{j}\phi/2\right)\end{bmatrix}$$

$\theta=\theta(\omega)$ 是快轴方向在频率为 ω 时的方位角，$\phi=\phi(l,\omega)$ 是光纤分段长度为 l，频率为 ω 时双折射所产生的相位延迟. 以上表示为一段光纤的传输矩阵，多段相连，总传输矩阵就为 $U=U_N U_{N-1}\cdots U_1$，各段光纤的双折射大小相等，方向固定，相邻光纤段的双折射方向不断随机变化，在整体上在 $(0,2\pi)$ 内满足均匀分布. 偏振分量之间的耦合发生于连接处，在光纤内不发生模耦合.

2　理论分析

为方便处理，记 $\hat{e}_{\text{out}}=|\hat{e}_{\text{out}}|e^{-\mathrm{j}\phi(\omega)}\hat{e}_{\text{out}}(\omega)$，其中最后一项表示单位矢量，推导过程中，保持输入电矢量保持不变. 过程简述为：1）式（1）两边对 ω 求导；2）用 $\hat{e}_{\text{out}}$ 表示 $\hat{e}_{\text{in}}$. 以上两步联合，可以得到关于 $\hat{e}_{\text{out}}$ 的方程

$$\frac{\mathrm{d}\,\hat{e}_{\text{out}}}{\mathrm{d}\omega}=\mathrm{j}\left[-\mathrm{j}\,\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\omega}U^{-1}+\frac{\mathrm{d}(\phi-\bar{\beta}l+\mathrm{j}\alpha)}{\mathrm{d}\omega}I\right]\hat{e}_{\text{out}} \tag{2}$$

记 $\lambda=\dfrac{\mathrm{d}(\phi-\bar{\beta}l+\mathrm{j}\alpha)}{\mathrm{d}\omega}$　$Q=-\mathrm{j}\,\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\omega}U^{-1}$

$$W=-\mathrm{j}\,\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\omega}U^{-1}+\frac{\mathrm{d}(\phi-\bar{\beta}l+\mathrm{j}\alpha)}{\mathrm{d}\omega}I$$

I 为单位矩阵. 由式（2）可以看出，主偏振态的找寻，就是矩阵 $W=0$ 的求解问题，即求解输出主偏振态对应于 Q 矩阵的本征矢量. W 的表达式中，α 对 ω 的倒数是很小的量，可以忽略不计.

由式（2）知，λ 为 Q 矩阵的本征值. 对应有两个 λ_+，λ_-. 其差值就是偏振模色散的模值. 本征矢量的方向分别对应快慢轴的方向. 将本征矢量变化为 stocks 矢量，可以得到偏振模色散矢量与 Q 矩阵的关系. 分析可以发现，U 矩阵为一正则矩阵，可以描述如下[4]

$$U=\begin{bmatrix}u_1(\omega) & u_2(\omega)\\ -u_2^*(\omega) & u_1^*(\omega)\end{bmatrix}$$

同时可以得到

$$Q=\begin{bmatrix}-\mathrm{j}(u_1'u_1^*+u_2'u_2^*) & \mathrm{j}(u_1u_2'-u_1'u_2)\\ -\mathrm{j}(u_1u_2'-u_1'u_2)^* & -\mathrm{j}(u_1'u_1^*+u_2'u_2^*)^*\end{bmatrix}$$

以上角标，“$'$”表示对 ω 求导，“$*$”表示共轭. 分析可以看出 Q 矩阵元素满足如下关系

$Q_{11}+Q_{22}=0$，$\mathrm{j}Q_{11}=(\mathrm{j}Q_{22})^*$，$Q_{12}=(Q_{21})^*$，所以 Q 矩阵可以表示如下

$$Q=\begin{bmatrix}q_1(\omega) & q_2^*(\omega)\\ q_2(\omega) & -q_1(\omega)\end{bmatrix}\text{，（注：}q_1\text{ 为一实数）}$$

Tel：027-87552363　　Email：dingpanfeng@163.com
收稿日期：2004-11-23

$\therefore \lambda_{\pm}=\pm\sqrt{q_1^2+|q_2|^2}$，将 λ_- 对应的本征矢量变为 stocks 矢量，并单位化，即为 PMD 的单位矢量.

$$\Omega(\omega)=(-2q_1,-2\mathrm{Re}(q_2),-2\mathrm{Im}(q_2))$$

由以上推理可以看出，Q 矩阵元素与 PMD 矢量密切相关. 分段模型的关键是要找出优化的 Q 矩阵计算模型.

3 实用数值方法

最简单的 Q 矩阵计算方法如下：对于一段分为 N 段的长光纤，首先求解各段光纤在 $\omega=\omega_1$ 处的传输矩阵 U_i，然后求出整段光纤在 $\omega=\omega_1$ 处的总传输矩阵 $U(\omega)$；选取适当的步长 $\Delta\omega$，同法可以得到 $U(\omega_1+\Delta\omega)$. 通过以下计算可以得到

$$Q(\omega)=-\mathrm{j}\,\frac{U(\omega_1+\Delta\omega)-U(\omega)}{\Delta\omega}U(\omega)^{-1}$$

以上方法在理论上是可行的，但步长主要是主观凭感觉选择，原则上认为只要满足 $\Delta\omega/\omega\ll 1$ 即可. 即使如此，计算仍然会产生较大的偏差. 而且计算中必须保证 $U(\omega)$ 和 $U(\omega_1+\Delta\omega)$ 是在同一随机条件下得到的结果.

为了保证计算的精确性，提出第二种 Q 矩阵的计算方法：

首先记 $U_i'=\mathrm{d}U_i/\mathrm{d}\omega$，则

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\omega}=\frac{\mathrm{d}(U_NU_{N-1}\cdots U_1)}{\mathrm{d}\omega}=U_N'U_{N-1}\cdots U_1+U_NU_{N-1}'\cdots U_1+\cdots+U_NU_{N-1}\cdots U_1'$$

记 $P_i=U_NU_{N-1}U_{N-2}\cdots U_{i+1}U_i'U_{i-1}\cdots U_1$

则 $\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\omega}=\sum\limits_{i=1}^{N}P_i$，所以 $Q=-j(\sum\limits_{i=1}^{N}P_i)U^{-1}$

其中

$$U_i'=R_i^{-1}\frac{\mathrm{d}D_i}{\mathrm{d}\omega}R_i=\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\omega}R_i^{-1}D_i\begin{bmatrix}-j & 0\\ 0 & j\end{bmatrix}R_i$$

分析可知，计算变为 P_i 矩阵的累加过程，得到整体的 P 矩阵，就可以方便求得 Q 矩阵，其结果一定满足前面所指出的 Q 矩阵的特征. 以上计算过程是在严格变形上得到的，可以完全保证计算的精确性.

方便起见，记

$$U(\omega_1+\Delta\omega)-U(\omega)=\begin{bmatrix}\Delta u_1 & \Delta u_2\\ -\Delta u_2^* & \Delta u_1^*\end{bmatrix}$$

$$Q_l=-\frac{\mathrm{j}}{\Delta\omega}\begin{bmatrix}\Delta u_1 & \Delta u_2\\ -\Delta u_2^* & \Delta u_1^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^* & -u_2\\ u_2^* & u_1\end{bmatrix}=$$

$$\frac{1}{\Delta\omega}\begin{bmatrix}-\mathrm{j}(\Delta u_1u_1^*+\Delta u_2u_2^*) & \mathrm{j}(\Delta u_1u_2-\Delta u_2u_1)\\ -\mathrm{j}(\Delta u_1u_2-\Delta u_2u_1)^* & -\mathrm{j}(\Delta u_1^*u_1+\Delta u_2^*u_2)\end{bmatrix}$$

此时将矩阵表示为 Q_1，是为了与标准 Q 矩阵区别. 由以上可以看出

$Ql_{12}=(Ql_{21})^*$ $\quad \mathrm{j}Ql_{11}=(\mathrm{j}Ql_{22})^*$ 满足标准 Q 矩阵的两个要求，剩下的一个条件为

$$\Delta u_1u_1^*+\Delta u_2u_2^*+\Delta u_1^*u_1+\Delta u_2^*u_2=0$$

下面证明上式只能近似成立.

$$u_1^*u_1+u_2^*u_2=I$$

$$(\Delta u_1+u_1)(\Delta u_1+u_1)^*+(\Delta u_2+u_2)(\Delta u_2+u_2)^*=I$$

其中 I 为单位矩阵，两式联立可以得到

$$\Delta u_1u_1^*+\Delta u_2u_2^*+\Delta u_1^*u_1+\Delta u_2^*u_2+|\Delta u_1|^2+|\Delta u_2|^2=0$$

由此可以看出，Q_1 矩阵不可能满足 Q 矩阵的标准条件. 采用第一种方法进行计算，必然导致计算结果不准确.

通过比较以上两种方法可以看出，二者的数值计算过程都是纯粹累积求和过程，不能反应出偏振模色散随着光纤段数的增加而逐步变化的特点. 而且第二种方法在计算上显得相当繁琐，需要简化. 于是做进一步的推演，得到新的改进算法. 过程如下

$$Q=-\mathrm{j}\,\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\omega}U^{-1}$$

$$U^{-1}=U_1^{-1}U_2^{-1}U_3^{-1}\cdots U_{N-1}^{-1}U_N^{-1}$$

分别将 U^{-1} 和前面所得 $\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\omega}$ 代入 Q 表达式，可以得到新的表达式

$$\mathrm{j}Q_N=U_N'U_N^{-1}+U_NU_{N-1}'U_{N-1}^{-1}U_N^{-1}+\cdots+U_NU_{N-1}U_{N-1}\cdots U_{i+1}U_i'U_i^{-1}U_{i+1}^{-1}\cdots U_N^{-1}+\cdots+U_NU_{N-1}U_{N-1}\cdots U_2U_1'U_1^{-1}U_{21}^{-1}\cdots U_{N-1}^{-1}U_N^{-1}$$

将 Q 写为 Q_N，与前面加以区别，其含义为 N 段光纤的总体特征矩阵.

上面 Q_N 表达式的意义不清晰，为此作如下变换，观察可以发现，Q_N 具有迭代的特点. 描述如下：

记各段光纤的特征矩阵为 W_N，

$W_N=U_N'U_N^{-1}$，则

$$\mathrm{j}Q_1=W_1=U_1'U_1^{-1}$$

$$\mathrm{j}Q_N=W_N+U_NQ_{N-1}U_N^{-1}$$

由以上可以看出，从第 i 段光纤到第 $i+1$ 段光纤，Q 矩阵的传递过程不是一个纯粹的求和（Q_i+W），而是分为两部分，第一部分是第 $i+1$ 段光纤对 i 段光纤特征矩阵的一个变换，第二部分是第 $i+1$ 段光纤的特征矩阵.

比较可以发现，第三种方法的数值计算过程具有较明显的物理意义. 前面讨论过，Q 矩阵与偏振模色散直接关联，其矩阵元素就是偏振模矢量参量. 所以第三种方法实际上体现了偏振模色散随光纤段增加的变化规律，这对偏振模色散补偿具有指导作用. 而且各段光纤的 U_i 矩阵的获取相对比较容易得到.

所以第三种方法具有很好的实用性.

4 模拟计算

在计算量方面，第一，三种方法需要进行矩阵运算的次数在 N 数量级，第二种方法需要进行矩阵运算的次数则在 N^2 数量级. 如果进行 M 次 PMD 的统计计算，计算量的差别相当大. 一次数值计算模拟过程中，各参量如下：色散参量 $D=3\ \mathrm{ps/km^{1/2}}$，分段数 $N=1000$，光纤总长度 $L=200$ km，统计次数 $M=1000$，信号波长选择为 $\lambda=1500$ nm，分段光纤长度 $L_i=0.2$ km，相位参量 $\phi=2\pi cD\sqrt{L_i}/\lambda$.

迭代过程由第一个 Q 矩阵开始，求得最终的 Q 矩阵即为所需矩阵，由其矩阵元按照前面所述方法即可获得 PMD 的值. 迭代参量如下

$$n=1,2\cdots,1000\quad \theta_n=\frac{2n\pi}{1000}$$

$$L_1=L_2=\cdots=L_n=\cdots=L_{1000}=0.2\ \mathrm{km}$$

$$\phi=\frac{\pi cD\sqrt{L_n}}{\lambda}\quad D_n=\begin{bmatrix}\exp(-\mathrm{j}\phi) & 0\\ 0 & \exp(\mathrm{j}\phi)\end{bmatrix}$$

$$U_n=\begin{bmatrix}\cos\theta_n & -\sin\theta_n\\ \sin\theta_n & \cos\theta_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta_n & \sin\theta_n\\ -\sin\theta_n & \cos\theta_n\end{bmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}D_n}{\mathrm{d}\omega}=D\sqrt{L_n}\begin{bmatrix}-\mathrm{j}\exp(-\mathrm{j}\phi) & 0\\ 0 & \mathrm{j}\exp(\mathrm{j}\phi)\end{bmatrix}$$

$$U_n'=\begin{bmatrix}\cos\theta_n & -\sin\theta_n\\ \sin\theta_n & \cos\theta_n\end{bmatrix}\frac{\mathrm{d}D_n}{\mathrm{d}\omega}\begin{bmatrix}\cos\theta_n & \sin\theta_n\\ -\sin\theta_n & \cos\theta_n\end{bmatrix}$$

$$W_n=U_n'U_n^{-1}=U_n'U_n$$

$$Q_n=-\mathrm{j}(W_n+U_nQ_{n-1}U_n^{-1})$$

$$Q_1=-\mathrm{j}W_1=-\mathrm{j}U_1'U_1^{-1}=-\mathrm{j}U_1'U_1\text{（初始边界）}$$

用 MATLAB 计算，第二种方法用时几个小时，第三种方法用时数十分钟左右. 模拟结果比较见图 1（横轴表示计算所得的 DGD 值，纵轴表示计算得到该值的统计次数）.

图 1 分别为第一，三种方法的模拟计算结果. $D\sqrt{L}=42.4264$ ps，比较发现，第一种方法的计算误差相当大，完全偏离了光纤链路的偏振模色散值，大约是实际值的三倍；第三种方法只有 9.28% 的误差，其精确性明显远远高于第一种方法. 9.28% 的误差存在，原因在于各分段光纤的长度取值为定值，没有考虑随机性的影响. 此问题将另文分析.

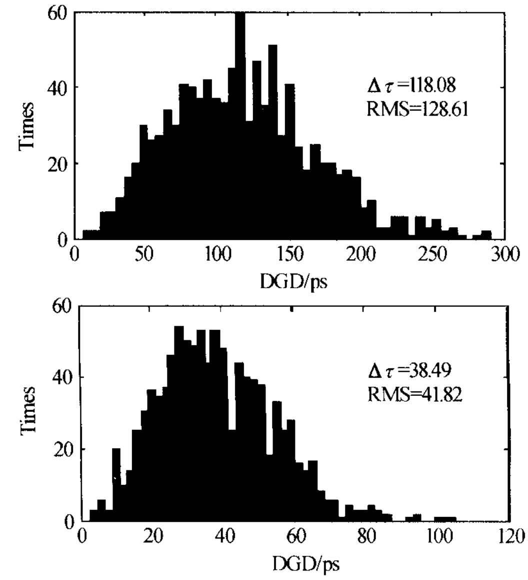

图 1　偏振模色散分布
Fig. 1　The distribution of PMD

5 结论

将理论模型作进一步的推导，可以得到实用的偏振模色散数值模型. 通过比较分析，从理论上指出了第一种方法计算不精确的原因，继而提出改进. 鉴于其物理意义不太清晰，作更进一步的变换，得到第三种方法，该方法便于对偏振模色散的逐步累积过程的理解，也便于编程计算，计算量适中，为研究一阶，高阶 PMD 提供了指导.

参考文献

1　Orlandini A, Vincetti L. A simple and useful model for Jones matrix to evaluate higher order polarization mode dispersion effects. *IEEE Photon Tech Lett*, 2001, **13**(11): 1176～1178

2　赵文玉，王岚，王宏祥，等. 高阶 PMD 的统计特性研究. 光子学报，2002，**31**(11)：1368～1372
Zhao W Y, Wang L, Wang H X, *et al*. *Acta Photonica Sinaca*, 2002, **31**(11): 1368～1372

3　周赢武，郭凌伟，瞿荣耀，等. 偏振横竖色散模拟器-阶及二阶偏振模色散统计特性的分析. 光子学报，2004，**33**(3)：333～337
Zhou Y W, Guo L W, Qu R H, *et al*. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(3): 333～337

4　陈烈辉，高锦岳. 用于高阶偏振模色散补偿的高效动态补偿器. 光子学报，2003，**32**(6)：702～705
Chen L H, Gao J Y. *Acta Photonica Sinaca*, 2003, **32**(6): 702～705

Improvement on Statistic Model for PMD

Ding Panfeng, Sun Junqiang, Hou Rui
HUST Optoelectronics Department, *Wuhan* 430074
Received date: 2004-11-23

Abstract Segment-dividing model is appropriate for research on PMD. Mathematical deduction is made to change it into iterative model. It is easy to find that the new model gives clear meaning in physics and reveals the process of PMD accumulation in fiber. It is applicable for being transplanted to analysis on PMD. Theoretic analysis gives the reason for error in Numerical calculation. The iterative method is put forward for practical numeration. It gives instruction for PMD compensation. Calculation is curtailed in the new model.

Keywords PMD; Numerical model; Iteration

Ding Panfeng was born in Wuhan city, China. He worked on the 863 subject "fiber Raman amplifier" when he studied in optical communication lab of HUST from 2002-10 to 2003-5. Now he is pursuing his Ph. D. degree in optoelectronics department in HUST. His current interests include PMD and nonlinear fiber optics.