

激光波带片衍射性质的数值模拟

付文羽¹ 刘正岐²

(1 陇东学院物理系, 庆阳 745000)

(2 陇东学院计算机科学系, 庆阳 745000)

摘 要 根据亥姆霍兹-基尔霍夫积分, 对菲涅尔波带片的高斯激光场在轴向、径向强度分布进行了理论分析, 研究了高斯激光束照射下波带片的衍射场规律. 数值计算表明: 沿轴向光场呈系列焦点, 各焦点附近光强分布有振荡现象, 随焦点级次的增大光强迅速增大; 有焦移现象, 焦移量随焦点级次的增大而增大; 焦深随焦点级次的升高按平方反比律减小, 随波带数减小或焦距增大而增大. 在焦平面上, 光斑大小与最外环宽度成正比, 与焦点级次成反比.

关键词 亥姆霍兹-基尔霍夫积分; 高斯激光束; 菲涅尔波带片; 数值模拟

中图分类号 O436.1 **文献标识码** A

0 引言

波带片在天文观测、光谱分析、同步辐射、软 x 光显微技术^[1,2]等领域发挥着越来越重要的作用, 人们采用多种方法从不同侧面探讨波带片的性质^[3~11], 有关菲涅尔波带片衍射场的性质及其应用的研究见诸于许多文献^[12~14]. 过去在分析波带片衍射场的性质时, 大多局限于用平行光波照射波带片, 最近提出波带片用于激光变形测量^[15], 激光波前重构^[16]以及 x 射线激光实验中的线聚焦^[17], 都是通过高斯激光束来照射波带片实现的. 本文从亥姆霍兹-基尔霍夫积分出发, 运用计算机数值模拟, 研究了高斯激光束照射下波带片的衍射场的规律, 得出一些不同于平面光波照射波带片时的结论, 为波带片的应用提供了更好的理论依据.

1 理论与公式

振幅型波带片是一组透光和不透光交替间隔的圆环组成的特殊光栅, 圆环半径满足

$$r_n^2 = n\lambda f + n^2 \lambda^2 / 4 \quad (n=1, 2, \dots, N) \quad (1)$$

式中 λ 为入射波长, f 为波带片焦距, r_n 为第 n 个环带的半径. 最外环宽度满足

$$\Delta r_N = r_1 / 2 \sqrt{N} \quad (2)$$

根据瑞利判据, 准确聚焦时最小分辨距离^[18]为 $\Delta = 0.61 \Delta r_N$ (3)

在本文研究范围内, 适用于标量衍射理论, 由亥姆霍兹-基尔霍夫积分方程^[19]得

$$\varphi(p_0) = \frac{1}{4\pi\Sigma} \iint \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \left[\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \right] - \right.$$

$$\left. \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \right] \right\} dS \quad (4)$$

式中 φ 代表衍射面上光的复振幅分布, $\varphi(p_0)$ 代表光在观察点的复振幅分布, 利用基尔霍夫边界条件, 考虑到 $k \gg 1/r_{01}$, 得

$$\varphi(p_0) = \frac{1}{4\pi\Sigma} \iint \frac{\exp[jkr_{01}]}{r_{01}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} - jk\varphi \cos \alpha \right| dS \quad (5)$$

如图 1, Σ 代表波带片的透光环带, r_{01} 是 Σ 面上某点 $p(r, \theta, z)$ 到观察点 $p_0(r_0, 0, z)$ 的距离. 设入

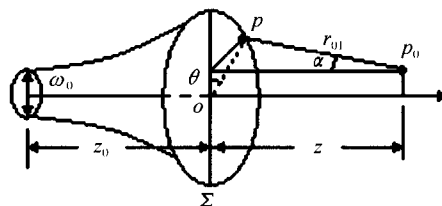


图 1 高斯激光束照射波带片示意图
Fig. 1 Sketch diagram of Fresnel zone plate for Gaussian laser beam

射激光束具有最低阶高斯模特性, 垂直入射到 Σ 面上, 高斯光束腰斑到 Σ 面距离为 z_0 , 则入射到 Σ 面上任一点 p 处, 光振动的复振幅为

$$\varphi(r, z_0) = \frac{A\omega_0}{\omega(z_0)} \exp \left[-\frac{r^2}{\omega^2(z_0)} \right] \cdot \exp \left[-j(kz_0 + \frac{kr^2}{2R(z_0)}) + j\eta(z_0) \right] \quad (6)$$

式中 A 为常量, ω_0 为光束腰斑半径, $s = \pi\omega_0^2/\lambda$, $\eta(z_0) = \tan^{-1}(z_0/s)$ 分别为入射光束的位相因子和共焦参量, $k = 2\pi/\lambda$ 为波数. 则有: $R(z_0) = z_0(1 + s^2/z_0^2)$, $\omega(z_0) = \omega_0 \sqrt{1 + z_0^2/s^2}$, 将 $R(z_0)$ 、 $\omega(z_0)$ 、 $\eta(z_0)$ 代入式(6)得

$$\varphi(r, z_0) = u(r, z_0) \exp(-jkz_0) \quad (7)$$

式中

$$u(r, z_0) = A' \exp \left[-\ln(z_0 + j \cdot s) - j \frac{kr^2}{2(z_0 + js)} \right]$$

式中 $A' = jAs$, 于是有如下关系

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z_0} = -\left[\exp(-jkz_0) \frac{\partial u}{\partial z_0} - jk\varphi(r, z_0) \right] \quad (8)$$

又

$$\frac{\partial u}{\partial z_0} = -\left[\frac{1}{z_0 + js} - j \frac{kr^2}{2(z_0 + js)^2} \right] \quad (9)$$

将式(8)、(9)代入(5)得

$$\varphi(p_0) = \frac{A' \exp(-jkz_0)}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\exp\left[jk\left(r_{01} - \frac{r^2}{2(z_0 + js)^2}\right)\right]}{r_{01}} \left[\frac{1}{z_0 + js} - j \frac{kr^2}{2(z_0 + js)^2} + jk(1 - \cos \alpha) \right] dS \quad (10)$$

将问题归为两类:

1) 沿波带片光轴的光场分布, 如图 1, 取波带片中心为原点, z 轴沿光轴方向, 则: $r_{01}^2 = r^2 + z^2$, $\cos \alpha = z/r_{01}$, 式(10)化简为

$$\varphi(p_0) = \frac{A'}{4\pi} \cdot \frac{\exp(-jkz_0)}{z_0 + js} \iint_{\Sigma} \frac{\exp\left[jk\left(r_{01} - \frac{r^2}{2(z_0 + js)^2}\right)\right]}{r_{01}} \left[\frac{1}{z_0 + js} - j \frac{kr^2}{2(z_0 + js)^2} + jk\left(1 - \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right) \right] r dr d\theta \quad (11)$$

2) 焦平面上光场的径向分布, 如图 1, Σ 面上点 $p(r, \theta, z)$, 观察点 $p_0(r_0, 0, z)$, 其中: $r_{01}^2 = (r_0^2 + r^2 + z^2) - 2r_0 \cdot r \cos \theta$, $\cos \alpha = z/r_{01}$. 这样, 积分表达式(10)化简为

$$\varphi(p_0) = \frac{A'}{4\pi} \cdot \frac{\exp(-jkz_0)}{z_0 + js} \iint_{\Sigma} \frac{\exp\left[jk\left(r_{01} - \frac{r^2}{2(z_0 + js)^2}\right)\right]}{r_{01}} \left[\frac{1}{z_0 + js} - j \frac{kr^2}{2(z_0 + js)^2} + jk(1 - \cos \alpha) \right] r dr d\theta \quad (12)$$

以式(11)、(12)为基础, 利用计算机编程模拟, 可以得到激光波带片的性质.

2 激光波带片衍射场的性质

2.1 沿光轴方向的光强分布

取 $\lambda = 6.328 \times 10^{-7} \text{ m}$, $f = 1.581 \text{ m}$, $\omega_0 = 0.01 \text{ m}$, 利用式(11)模拟从 z 略小于 $f/9$ 到略大于 f 时, 轴向光强分布, 焦深和焦移随焦点级次变化的规律.

为了清晰地比较主焦点及各次级焦点的附近焦深、焦移随焦点级次的变化情况, 这里仅取了波带数 $N=100$, 模拟光源在 $z_0=0$ 处时 f 、 $f/3$ 、 $f/5$ 、 $f/7$ 、 $f/9$ 五个焦点附近光强分布曲线, 使系列 f 、 $f/3$ 、 $f/5$ 、 $f/7$ 、 $f/9$ 附近横坐标取样间隔比为^[20]: $1 : (1/3)^2 : (1/5)^2 : (1/7)^2 : (1/9)^2$, 将 f 、 $f/3$ 、 $f/5$ 、 $f/7$ 、 $f/9$ 各焦点利用坐标平移于同一点, 光强分布归一化, 使各纵、横坐标轴重合, 纵轴表示各焦点光强, 横轴表示位置坐标取样序列, 如图 2, 图 3.

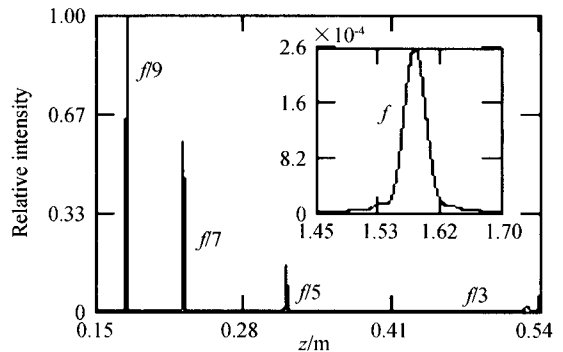


图 2 系列焦点附近轴向光强分布
Fig. 2 On-axis intensity distribution around a series of focal point

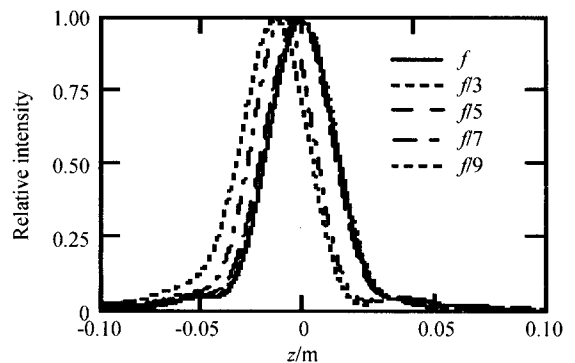


图 3 各系列焦点平移于主焦点处时轴向光强分布
Fig. 3 On-axis intensity distribution around a series of focal point when a series of focal points are horizontally moved to the main focal point

通过数值模拟可得到如下规律:

1) 由于波带片的衍射作用, 使轴向光强重新分配, 与平面光波相比, 主焦点及各次级焦点附近光强并不相等, 有振荡现象, 在一定的范围内, 随着焦点级次的升高迅速增大.

2) 焦深近似按平方反比律收缩, 并且除主焦点处光强分布曲线的第一暗环光强严格为零之外, 其它各次级焦点处光强分布曲线的第一暗环光强均不为零. 使得中心亮斑与次级亮环界限变得模糊.

3) 有焦移现象. 各焦点附近光强最大点位置与焦点并不严格重合, 有一定的偏移, 都并向波带片方向移动, 且随着焦点级次的升高焦移逐渐增大, 焦点 f 、 $f/3$ 、 $f/5$ 处焦移较小, 光强分布曲线基本重合, 在 $f/7$ 以后各次级焦点处焦移逐渐明显增大.

4) 焦距及波带数对焦深的影响. 分别取 $f = 1.581 \text{ m}$, $N = 100, 120, 150, 200$, 相应的模拟光源位置 $z_0 = 0, 222.3 \text{ m}, 351.3 \text{ m}, 496.7 \text{ m}$, 以及 $N = 100$, 其相应的模拟光源位置 $z_0 = 0$, 焦距 $f = 1.581, 2.081 \text{ m}, 2.581 \text{ m}, 3.081 \text{ m}$ 两种情况, 各种情况下横轴位置坐标取样间隔相等, 纵轴光强归一化. 用式(11)模拟, 结果如图 4、图 5. 从图 4、图 5 中可以

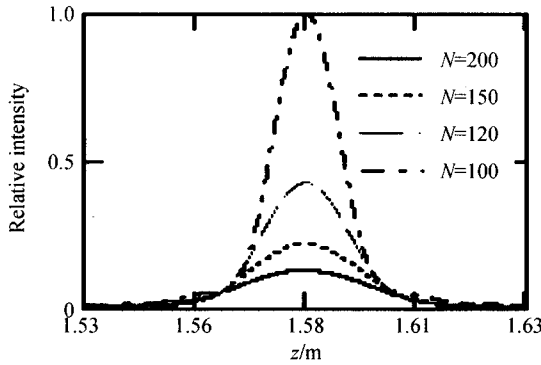


图4 焦距相同,波带数不同,光强的轴向分布
Fig. 4 On-axis intensity distribution with the same focal length and different zone numbers

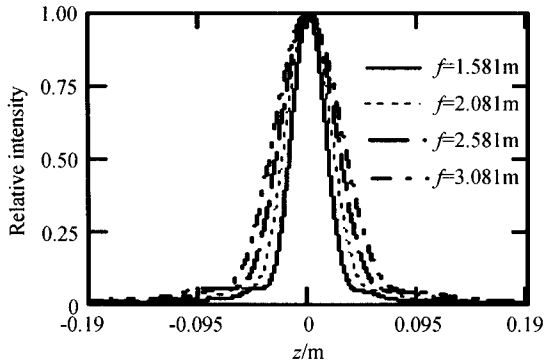


图5 波带数相同,焦距不同,光强的轴向分布
Fig. 5 On-axis intensity distribution with the same zone numbers and different focal length

看出焦深随波带数增加而减小,随着焦距的增大而增大.

5)光源位置对焦移的影响. 取 $N=100$, 模拟光源位置 $z_0=0, 100, 500$ m, 分析 $f/7$ 附近焦移量随光源位置 z_0 的变化. 结果如图6, 从图6中可以看出, 各光强分布完全重合, 说明焦移与光源位置无关.

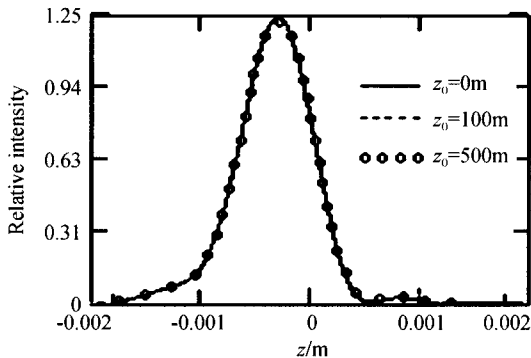


图6 $z=f/7$ 处光强与光源位置的关系
Fig. 6 Relationship of intensity distributions focal shift vs. Location of light source at $z=f/7$

2.2 沿径向光强分布

取 $\lambda=6.328 \times 10^{-7}$ m, $f=1.581$ m, $\omega_0=0.01$ m, 利用式(12)对光场径向分布进行分析.

1)取波带数 $N=100$, 模拟光源位置 $z_0=10.6$ m, 数值计算了 $f, f/3, f/5$ 处光强径向分布, 各种情况下, 横轴取样间隔相同, 结果如图7, 从图中可以看出, 随着焦级次的升高, 中央亮纹半径减小, 将纵轴各焦点处光强归一化, 横轴按 $1:(1/3):(1/5)$ 比例缩放后, 发现曲线完全重合.

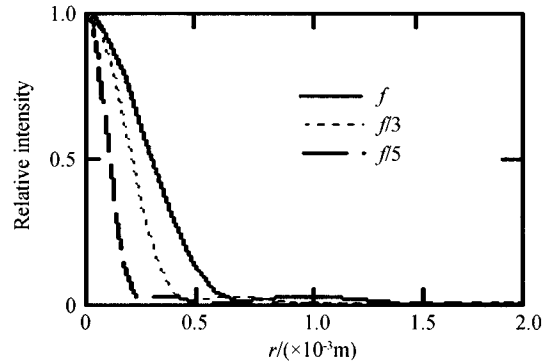


图7 同一波带片, 系列焦距附近光强的径向分布
Fig. 7 Radial intensity distributions on a series of focal planes for focal the zone plate

2)取在波带数 $N=100, 120, 150$, 相应的模拟光源位置 $z_0=0, 222.3, 351.3, 496.7$ m 三种情况下, 横轴取样间隔相同时的模拟结果如图8. 从图8可以看出. 随着波带数增加, 中心光斑缩小, 而分辨率增大. 取值计算可得分辨率之比为: $1:(1/\sqrt{100}): (1/\sqrt{120}): (1/\sqrt{150})$, 与式(3)相符合.

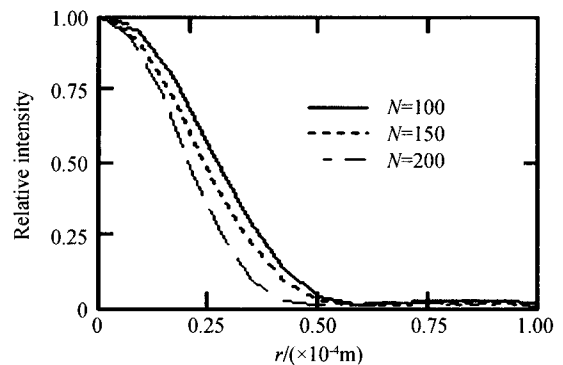


图8 焦距相同,波带数不同,焦平面上光场的径向分布
Fig. 8 Radial intensity distributions on focal planes with the same focal length and different zone numbers

3)焦移量对径向光强的影响. 取 $N=100$, 模拟光源位置 $z_0=10.6$ m, 通过计算得知 $f/7$ 处最大焦移量 $\Delta f_{\max} \leq 1.74 \times 10^{-4}$ m, 取焦移量 $\Delta f=0, 8.7 \times 10^{-5}, 1.74 \times 10^{-4}$ m 三种情况, 分析光强沿径向爱里斑图样分布. 结果如图9, 从图中可以看出, 当观察点稍微偏离焦点时光强分布将会发生变化, 与平面光相比^[20], 由于焦移量较小, 对爱里斑分布影响不大.

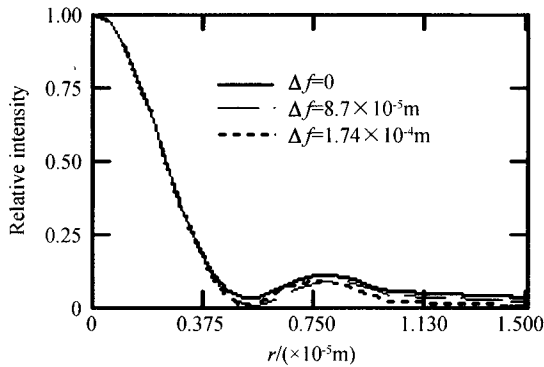


图9 $z=f/7$ 处不同焦移量时光场的径向分布

Fig. 9 Radial intensity distributions on focal planes with the same focal length and different zone numbers

3 结论

通过数值计算,研究了激光波带片的衍射光强、焦移量、焦深变化的规律. 结果表明:在基模高斯光束入射的情况下,波带波衍射光场分布在轴向,光场呈系列焦点,各焦点附近光强分布有振荡现象,随焦点级次的增大光强迅速增大;有焦移现象,焦移量随焦点级次的升高而增大,且与光源位置无关;焦深随焦点级次的升高按平方反比律减小,随波带数减小和焦距增大而增大. 在焦平面上,光斑大小与最外环宽度成正比,与焦点级次成反比.

通过修改以上计算参量,可以得到不同实际情况下的具体数据. 这对于软 X 光傅里叶变换全息、激光准直测试、同步辐射单色光仪等领域应用都具有参考意义.

参考文献

- 1 陈建文,徐至展,朱佩平,等. x 射线全息术. 物理学进展, 1995, **15**(2):125~147
Chen Z W, Xu Z Z, Zhu P P, et al. *Progress in Physics*, 1995, **15**(2):125~147
- 2 王治国,曹霞,夏兴. 离焦情况下波带片衍射光强的数值计算. 上海交通大学报,2000, **34**(38):1112~1114
Wang Z G, Cao X, Xia X. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2000, **34**(38):1112~1114
- 3 蔡海涛,郭永康. 波带片各焦点的衍射光强. 大学物理, 1991, **4**:13~15
Cai H T, Guo Y K. *College Physics*, 1991, **4**:13~15
- 4 Hazra L, Han Y, Delisle C. *J Opt Soc Am A*, 1994, **11**(10):2750~2754
- 5 Sheppard C J R, Roberts P P, Min Gu. *J Opt Soc Am A*, 1993, **10**(5):984~986
- 6 钟锡华. 光波衍射与变换光学. 北京:高等教育出版社, 1985. 66~70
Zhong X H. *Light wave and Transform Optics*. Beijing: High Education Press, 1985. 66~70

- 7 Rivas-Moscoco J, Gómez-Reino C, Pérez M. *J Opt Soc Am A*, 2002, **19**(11):2253~2264
- 8 Born M, Wolf E. *Principle of Optics*. 6th ed, New York: Pergmon, 1989. 351~360
- 9 Qing Cao, Jürgen Jahns. *J Opt Soc Am A*, 2004, **21**(4): 561~571
- 10 Qing Cao, Jürgen Jahns. *J Opt Soc Am A*, 2003, **20**(8): 1576~1581
- 11 Zhang Y J, Zheng C W. *Optics & Laser Technology*, 2005, **37**(1):77~80
- 12 朱煜,朱正宏,聂守平,等. 激光准直自动化检测大坝变形方法的研究. 光子学报,1998, **27**(2):189~192
Zhu Y, Zhu R H, Nie S P, et al. *Acta Photonica Sinica*, 1998, **27**(2):189~192
- 13 唐雄贵,高福华,高峰,等. 利用严格模式理论分析光栅透镜的衍射特性. 光子学报,2005, **34**(6):881~884
Tang X, Gao F H, Gao F, et al. *Acta Photonica Sinica*, 2005, **34**(6):881~884
- 14 王颖. 平面变线距光栅衍射场的解析表达式. 光子学报, 2003, **32**(1):124~128
Wang J. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(1):124~128
- 15 王晓旭,赖康生,赖健生,等. 全自动真空激光波带片测量系统的研制及应用. 光学技术,2005, **31**(4):542~544
Wang X X, Lai K S, Lai J S, et al. *Optical Technique*, 2005, **31**(4):542~544
- 16 陈怀新,武波,隋展,等. 采用阵列波带片波前传感的激光波前重构. 强激光与离子束,2004, **16**(10):1250~1254
Chen H X, Wu B, Sui Z, et al. *High Power Laser and Particle Beam*, 2004, **16**(10):1250~1254
- 17 李玉同,张杰,鲁欣,等. 使用二元相位波带片产生轴向线聚焦. 物理学报,2005, **54**(5):2030~2033
Li Y T, Zhang J, Lu X, et al. *Acta Physica Sinica*, 2005, **54**(5):2030~2033
- 18 王江之,伍树东. 成像光学. 北京:科学技术出版社, 1991. 211~218
Wang Z J, Wu S D. *Imaging Optics*. Beijing: Science Press, 1991. 211~218
- 19 J. W. 顾德门著,詹达三,等译. 傅立叶光学导论. 北京:科学技术出版社,1976. 41~51
J. G. Godman. *Introduction to Fourier Optics*. Beijing: Science Press, 1976. 41~51
- 20 杨绍光,贾成芝,赵永飞,等. 费涅尔波带片衍射性质的计算机模拟. 中国科学技术大学学报,1997, **27**(2):216~219
Yang S G, Jia C Z, Zhao Y F, et al. *Journal of China University of Science and Technology*, 1997, **27**(2):216~219

Numerical Simulation for the Diffraction Properties of Laser Zone-plate

Fu Wenyu¹, Liu Zhengqi²

¹ Department of Physics, Qingyang 745000

² Department of Computer Science, Long-Dong University, Qingyang 745000

Received date: 2006-04-25

Abstract On the basis of Helmholtz-Kirchhoff diffraction integration, Axial and radial intensity distribution and diffraction pattern of Fresnel zone plate for Gaussian laser beam were analyzed theoretically. Numerical results showed that it presented a series of focal points on axis, around each of which there is oscillation of intensity distribution, with the increase of order number of focal point, the intensity increasing rapidly. There were phenomena of focal shifts, and focal shifts increased with the rise of the order number of focal point. The focal depth reduced on inverse square law with the rise of the order number of focal point and increased with the reduction of zone number or the increase of focal length. On focal planes, the size of light spots was proportional to the width of the most external circle and inversely to the order number of focal point.

Keywords Helmholtz-Kirchhoff integration; Gaussian laser beam; Fresnel zone plate; Numerical simulation



Fu Wenyu was born in 1963 Gansu Province. He received his master degree in national university of Defence technology in Changsha in 2000. Now he is an associated professor. His main research interest in the fields of photoelectric detection and sensitive technology. More than 30 papers have been published.