

转移矩阵法在负折射率介质材料平板波导中的应用研究*

肖丙刚 韩张华 何金龙

(中国计量学院太赫兹技术与应用研究所, 杭州 310018)

摘要 利用严格电磁理论, 推导出了适用于负折射率介质材料光波导的转移矩阵, 分析讨论了转移矩阵的性质和应用. 利用转移矩阵方法, 推导出导波层为负折射率介质材料、覆盖层和衬底为右手材料的三层对称介质光波导的本征色散方程. 用图解法研究了负折射率介质波导中 TE 波的异常色散特性. 在负折射率材料介质波导中没有零阶模, 最低阶为 1 阶模, 并且有截止频率, 只有波导参量满足一定条件的时候才会存在, 导模的横向波数可以为实数和纯虚数, 而正折射率介质波导导模的横向波数只能为实数.

关键词 导波光学; 负折射率介质; 平板波导; 转移矩阵法

中图分类号 TN25 **文献标识码** A

0 引言

负折射率介质材料作为一种新型的人工电磁材料, 近年来引起了人们极大的研究兴趣. 负折射率介质是指介电常量 ϵ 和磁导率 μ 都小于 0 的介质材料, 当电磁波在这种介质材料中传播时, 电场、磁场和波矢遵从左手法则, 所以负折射率介质材料又被称为左手材料(LHM). 早在 1964 年即由 Veselago 提出并分析了电磁波在其中传播的异常性质, 如负折射, 反向的多普勒频移和 Cherenkov 辐射的逆转等^[1]. 不久前, Smith 等人在实验室首次制造出了微波段的负折射率介质^[2]. 近来左手材料在光波领域内的应用研究越来越引起人们的兴趣^[3~5]. 左手材料的反常电磁特性展现了它在光与电磁波领域潜在的重要应用价值: 高分辨率透镜成像^[6], 新型共振腔, 以及反常光子隧道等.

利用矩阵技术描述光在多层薄膜中的传播是一种简单易行的方法. M. 波恩和 E. 沃耳夫利用特性矩阵求解光通过多层介质模时的透射率和反射率问题; A. Yariv 等利用光线矩阵处理光线通过透镜或似透镜介质的传输问题^[7]; 曹庄棋根据右手材料介质光波导的特点, 构造出了与特性矩阵不同的转移矩阵, 成功地利用转移矩阵研究了多层介质光波导的性质^[8]. 本文根据负折射率材料介质光波导的特点, 利用严格电磁理论, 推导出了在负折射率材料构成的多层介质波导中的转移矩阵, 利用推导出的转移矩阵, 研究了由负折射率材料构成的三层介质光

波导的导模异常色散特性.

1 转移矩阵的推导以及性质

对于图 1 厚度为 h 的三层介质波导(其中 ϵ_1, μ_1

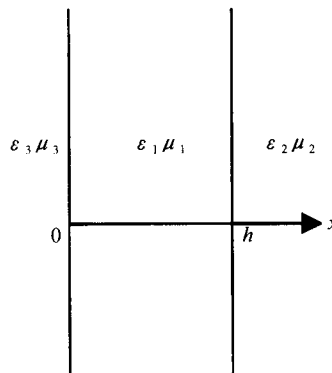


图 1 含有负折射率介质材料的三层平板光波导
Fig. 1 The three-layer slab waveguide possessing negative refractive index material

为负折射率介质材料), 满足波动方程

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + (\omega^2 \epsilon_j \mu_j - \beta^2) \Psi = 0 \quad (j=1, 2, 3) \quad (1)$$

对于 TE 波, $\Psi(x)$ 为 $E_y(x)$, 设其解为

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= C_1 \cos(\kappa x) + C_2 \frac{1}{\kappa} \sin(\kappa x) \\ (\kappa^2 &= \omega^2 \epsilon_1 \mu_1 - \beta^2) \end{aligned}$$

根据 $E_y(x)$ 和 $\frac{1}{\mu} E'_y(x)$ 在边界连续, 可以得到

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_y(h) \\ \frac{1}{\mu_2} E'_y(h) \end{bmatrix} &= M^{\text{TE}}(h) \begin{bmatrix} E_y(0) \\ \frac{1}{\mu_3} E'_y(0) \end{bmatrix} \\ M^{\text{TE}}(h) &= \begin{bmatrix} \cos(\kappa h) & \frac{\mu_1}{\kappa} \sin(\kappa h) \\ -\frac{1}{\mu_1} \kappa \sin(\kappa h) & \cos(\kappa h) \end{bmatrix} \quad (2) \end{aligned}$$

* 国家自然科学基金项目(60377022)资助
Tel: 0571-86845096 Email: bgxiao@cjl. edu. cn
收稿日期: 2005-06-05

$M^{TE}(h)$ 为对应于平板波导导波层的 TE 波转移矩阵

同理可以推出 TM 波的转移矩阵

$$\begin{bmatrix} H_y(h) \\ \frac{1}{\epsilon_2} H_y'(h) \end{bmatrix} = M^{TM}(h) \begin{bmatrix} H_y(0) \\ \frac{1}{\epsilon_3} H_y'(0) \end{bmatrix}$$

$$M^{TE}(h) = \begin{bmatrix} \cos(\kappa h) & \frac{\epsilon_1}{\kappa} \sin(\kappa h) \\ -\frac{1}{\epsilon_1} \kappa \sin(\kappa h) & \cos(\kappa h) \end{bmatrix} \quad (3)$$

TE 波和 TM 波的转移矩阵可以写成统一的形式

$$M(h) = \begin{bmatrix} \cos(\kappa h) & \frac{l}{\kappa} \sin(\kappa h) \\ -\frac{1}{l} \kappa \sin(\kappa h) & \cos(\kappa h) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$l = \begin{cases} \mu_1 & \text{TE 波} \\ \epsilon_1 & \text{TM 波} \end{cases}$$

由式(4)可以看出,TE 和 TM 模的转移矩阵只和区间内负折射率材料以及导模的本征值有关,与区间外的折射率分布无关,转移矩阵是一个单位模矩阵. 对于四层以及四层以上的负折射率介质材料平板波导,假设为 $N+2$ 层,中间薄膜的厚度分别为 h_1, h_2, \dots, h_N ,这些薄膜对应的转移矩阵分别是 $M(h_1), M(h_2), \dots, M(h_N)$,很容易推导出

$$M(h_1 + h_2 + \dots + h_N) = M(h_N) M(h_{N-1}) \dots M(h_2) M(h_1)$$

因而利用上面推导出来的转移矩阵,可以很方便地分析多层(四层以及四层以上)含有负折射率介质材料平板波导的色散特性.

2 转移矩阵的应用

下面利用转移矩阵法来分析含有负折射率介质的光波异常色散特性. 设图 1 为三层对称平板波导,即有 $\epsilon_2 = \epsilon_3, \mu_2 = \mu_3$,导波层为负折射率介质材料,覆盖层和衬底为正折射率介质材料.

波导中传输的 TE 波在覆盖层和衬底中的电场分布可以表示为

$$E_y(x) = \begin{cases} A \exp(px) & -\infty < x < 0 \\ D \exp(-p(x-h)) & h < x < +\infty \end{cases} \quad (5)$$

$$p^2 = \beta^2 - \omega^2 \epsilon_2 \mu_2$$

因而

$$\begin{cases} E_y(0) = A \\ \frac{1}{\mu_3} E_y'(0) = \frac{pA}{\mu_3} \\ E_y(h) = D \\ \frac{1}{\mu_2} E_y'(h) = -\frac{pD}{\mu_2} \end{cases} \quad (6)$$

代入式(2)可以得到

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{p}{\mu_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\kappa h) & \frac{\mu_1}{\kappa} \sin(\kappa h) \\ -\frac{1}{\mu_1} \kappa \sin(\kappa h) & \cos(\kappa h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{p}{\mu_3} \end{bmatrix} \quad (7)$$

即

$$\begin{bmatrix} \frac{p}{\mu_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\kappa h) & \frac{\mu_1}{\kappa} \sin(\kappa h) \\ -\frac{1}{\mu_1} \kappa \sin(\kappa h) & \cos(\kappa h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{p}{\mu_3} \end{bmatrix} = 0 \quad (8)$$

化简可以得到 TE 波的模式本征方程

$$\tan(\kappa h) = \frac{2\mu_1 \mu_2 \kappa p}{\mu_2^2 \kappa^2 - \mu_1^2 p^2} \quad (9)$$

式(9)可以写为

$$\kappa h = m\pi + 2\phi_{12} \quad (m=0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$\phi_{12} = \arctan\left(\frac{\mu_1 p}{\mu_2 \kappa}\right) \quad (10)$$

$$(ph)^2 + (\kappa h)^2 = \omega^2 h^2 (\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_2 \mu_2) \equiv \rho^2$$

κ 为实数时,则式(10)可以化为

$$ph = \pm \frac{\mu_2}{\mu_1} (\kappa h) \tan^{\pm} \left(\frac{\kappa h}{2}\right) \quad (11)$$

这里“+”和“-”分别对应偶数模式和奇数模式. 式(11)是一个超越方程,可以利用图解法^[9]求解. 对于偶模求解结果如图 2(a),图中 $\rho = 18, \mu_2/\mu_1 = -0.5$. 从图中可以看出,负折射率材料波导没有零阶模,即没有基模,最小的偶数模为 2,这与正折射率材料介质波导有很大的不同. 奇数模式求解结果

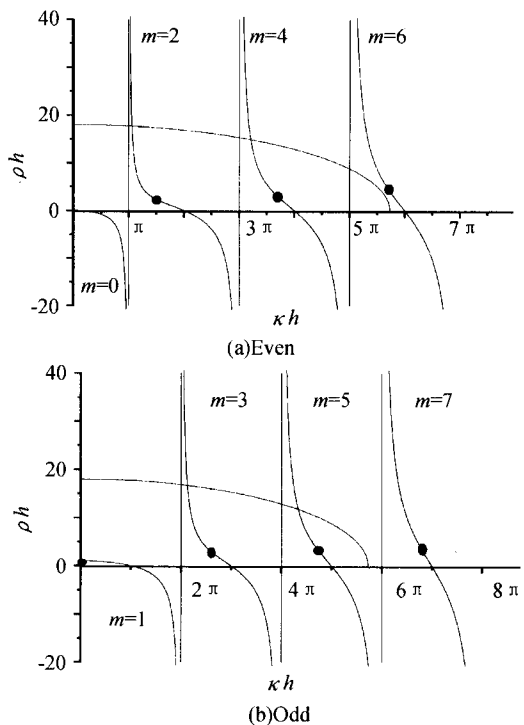


图 2 图解法求解偶数、奇数模式
Fig. 2 Graphically determination of κh for even and odd TE mode

如图 2(b),最低的阶数为 1 阶,从图中可以看出当 ρ 大于某一特定值时,1 阶模将会消失. 对于正折射率的介质波导,最低阶模式即基模没有截止频率,而对于负折射率介质波导,最低阶模式为 1 阶,有截止频率. 截止频率可以通过图中类似正切的曲线与原点的最近距离来求得. 各个模式的截止频率点图 2(a),(b)已经用圆圈标出.

虽然负折射率材料波导中,正常导模(κ 为实数)有截止频率,由于有其它类型导模的存在,仍然可以传导各种频率的电磁波. κ 为实数对应的导播模式为快波(相速大于在无限大均匀介质 $\epsilon_2\mu_2$ 中的相速),正折射率材料的介质波导只能传导快波,而在负折射率介质材料波导中同时还可以传导慢波,类似于金属薄膜中的表面等离子波^[8],即 κ 可为纯虚数. 假使 $\kappa = i\kappa_1$ (κ_1 为正实数),代入可以得到

$$ph = -\frac{\mu_2}{\mu_1}(\kappa_1 h) \tanh^{\pm} \left(\frac{\kappa_1 h}{2} \right)$$

$$(ph)^2 - (\kappa_1 h)^2 = \omega^2 h^2 (\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_2 \mu_2) \equiv \rho \quad (12)$$

这里+和-分别对应对称模与反对称模. 将上面两式合并可以得到

$$\left(-\frac{\mu_2}{\mu_1}(\kappa_1 h) \tanh \left(\frac{\kappa_1 h}{2} \right) \right)^2 - (\kappa_1 h)^2 = \omega^2 h^2 (\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_2 \mu_2)$$

cos 模式

$$\left(-\frac{\mu_2}{\mu_1}(\kappa_1 h) \coth \left(\frac{\kappa_1 h}{2} \right) \right)^2 - (\kappa_1 h)^2 = \omega^2 h^2 (\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_2 \mu_2)$$

sinh 模式

当 $h \rightarrow \infty$,由式(12)可以得到

$$\frac{h}{\mu_2} + \frac{\kappa}{\mu_1} = 0$$

上式为正负材料界面的表面极化波^[10],它们的传播常量为

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu_1 \mu_2 (\epsilon_1 \mu_2 - \epsilon_2 \mu_1)}{(\mu_2^2 - \mu_1^2)}}$$

由于 $h \rightarrow \infty$ 的时候,这两支表面极化波是自由的,相互间没有影响. 当 h 逐渐减小时,两支表面极化波将相互耦合,成为完全不同的对称模(cosh 模)和反对称模(sinh 模).

式(13)图解法结果如图 3(a),(b). 假如波导的参量已确定,入射波长已知(由此可以求出相应的 ω),在图 3(a),(b)中可以相应地画一条水平线,得到于图中曲线的交点,据此可以求出传播常量 κ_1 . 从图中可以看出 cosh 模式没有截止频率,而 sinh 模式的波因为波导参量的不同,可能有截止频率. 图 3(a),(b) $\rho > 0$ 和 $\rho < 0$ 分别对应于 $\epsilon_2 \mu_2 < \epsilon_1 \mu_1$ 和 $\epsilon_2 \mu_2 > \epsilon_1 \mu_1$,负折射率材料波导在 $\rho > 0$ 和 $\rho < 0$ 两种

情况下面都有 cosh 和 sinh 导模,而正折射率材料介质波导只有在 $\rho > 0$ 的时候有导模.

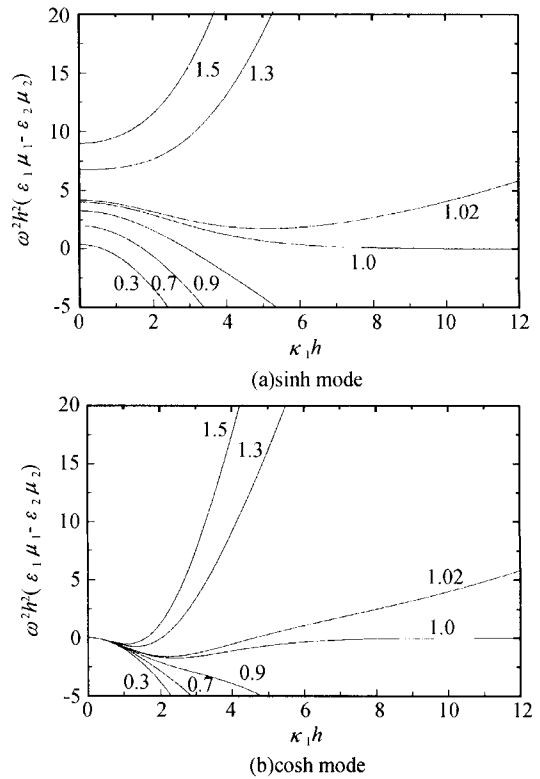


图 3 图解法求解 sinh,cosh 模式的 $\kappa_1 h$,对应于不同的 $-\mu_2/\mu_1$

Fig. 3 Graphical determination of $\kappa_1 h$ for different values of $-\mu_2/\mu_1$, sinh mode and cosh mode

对于大于图 2(a)和(b)截止频率的入射波,平常模式(κ 为实数)的导模(偶数模或者奇数模)将和上面的 sinh 导模或者 cosh 导模同时存在,这和正折射率波导有很大不同.

利用转移矩阵法同理可以求得 TM 波的本征色散方程为

$$\tan(\kappa h) = \frac{2\epsilon_1 \epsilon_2 p \kappa}{\epsilon_2^2 \kappa^2 - \epsilon_1^2 p^2}$$

上式可以写为

$$\kappa h = m\pi + 2\phi_{12} \quad (m=0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$\phi_{12} = \arctan \left(\frac{\epsilon_1 p}{\epsilon_2 \kappa} \right)$$

利用上面的方法同样可以分析 TM 波的异常色散特性,限于篇幅,这里不再赘述.

3 结论

从严格电磁理论出发,推导出了适用于负折射率介质材料光波导的转移矩阵,研究了转移矩阵的性质. 利用推导出的转移矩阵可以很方便地研究含有负折射率介质材料的多层波导的色散特性. 对于导波层为负折射率介质材料、覆盖层和衬底为右手材料的三层对称介质光波导,用转移矩阵法分别推

导出 TE 波和 TM 波满足的本征色散方程,研究了 TE 导模的性质. 不同于右手材料的波导,负折射率材料波导没有零阶模,基模有截止频率,除了能够传导平常模式的快波之外,还可以传导慢波(类似于金属薄膜里面的表面波). 正折射率材料在 $\epsilon_2 \mu_2 > \epsilon_1 \mu_1$ 的时候不存在导模,而在负折射率介质材料波导中,仍然有 \cosh 和 \sinh 导模的存在.

参考文献

- 1 Vesolago V G. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ . *Soviet Physics Uspekhs*, 1968, **10**(4):509~514
- 2 Smith D R, Kroll N. Negative refraction index in Left-handed materials. *Physical Review Letters*, 2000, **85**(14):2933~2936
- 3 何金龙,沈林放,何赛灵,等. 负折射率介质光纤的导模异常特性分析. 光子学报, 2004, **33**(11):1327~1330
He J L, Shen L F, He S L, et al. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(11):1327~1330
- 4 杨立功,顾培夫,黄弼勤. 从几何光学研究负折射透镜的有限尺寸效应. 光子学报, 2003, **32**(11):1396~1398
Yan L G, Gu P F, Huang B Q. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(11):1396~1398
- 5 杨立功,顾培夫,黄弼勤. 含有负折射介质层的布喇格镜的光学特性研究. 光子学报, 2004, **33**(2):200~203
Yang L G, Gu P F, Huang B Q. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(2):200~203
- 6 Pendry J B. Negative refraction makes a perfect Lens. *Physical Review Letters*, 2000, **85**(18):3966~3969
- 7 Yariv A. *Quantum Electronics*. 2nd ed. New York: Wiley & Sons, 1975
- 8 曹庄琪. 导波光学中的转移矩阵方法. 上海:上海交通大学出版社, 2000
Cao Z Q. *Transfer Matrix Approach in Waveguide Optics*. Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press, 2000
- 9 Jin Au Kong *Electromagnetic Wave Theory*. EMW Publishing, Cambridge, Massachusetts, USA. 2000
- 10 Ruppin R. Surface polaritons of a left-handed medium. *Physics Letters A*, 2000, **277**:61~64

Transfer Matrix in a Negative-refractive-index Medium and Its Application to the Investigation of Characteristics of a Left-handed Waveguide

Xiao Binggang, Han Zhanghua, He Jinlong

Centre for the Research, China Institute of Metrology, Hangzhou 310018

Received date: 2005-06-05

Abstract The transfer matrix of the slab waveguide made up of a negative-refractive-index material is solved using the rigorous electromagnetic wave theory. The characters and application of the transfer matrix were also discussed. The dispersion relations of the three-layer symmetric slab waveguide possessing a negative-refractive-index guiding layer and positive-refractive-index surrounding medium are investigated by the transfer matrix method. The exotic properties of guided transverse electric (TE) waves in a left-handed waveguide were investigated graphically. There are no fundamental modes in a left-handed waveguide. The lowest mode was the first-order mode which had cutoff frequency. The first-order mode exists only when the parameters of the left-handed waveguide satisfied certain terms. Guided modes existed both for imaginary transverse wave numbers and real transverse wave numbers in a left-handed waveguide, while guided modes only exist only for real transverse wave numbers in a right-handed waveguide.

Keywords Guided-wave optics; Negative-refractive-index material; Slab waveguide; Transfer matrix method



Xiao Binggang was born in 1979, and graduated from the Department of Optical Engineering, Zhejiang University in 2001. He is a Ph. D student at Center for Optical and Electromagnetic Research, Zhejiang University. His main interests are in fabrication and optical parameters measurement of integrated optical waveguides.