

四极子量子级联微腔激光器模式理论*

吴根柱 李赞佳 霍海燕 风兰

(内蒙古大学电子工程系, 呼和浩特 010021)

摘要 介绍了一种计算四极子量子级联微腔激光器模式的方法. 推导了本征方程和光场分布公式, 对不同变形因子四极子微腔进行了数值计算和模式分析, 结果表明四极子量子级联微腔激光器模式具有“蝴蝶结”形状特征, 在 $\phi=45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$ 的 4 个方向光输出最强. 该计算方法可用于其它任意形状截面介质上电磁波传输或散射的计算问题.

关键词 四极子; 激射模式; 微腔激光器; 本征方程

中图分类号 TN248.4

文献标识码 A

0 引言

1998 年美国贝尔实验室科学家们提出了一种新型量子级联微腔激光器—四极子微腔^[1], 引起了各国科学家们的兴趣, 掀起了一场量子级联微腔的研究热潮^[2,3]. 该微腔形貌近似为“体育场(四极子)”形状, 具有与对称圆形微腔“回音壁模式(Whispering-gallery modes)”明显不同的“蝴蝶结模式(Bow-tie modes)”, 它在减小激光器阈值电流, 提高品质因子的同时, 还可以提高激射的方向性, 从而有效提高激光器输出功率, 室温连续量子级联激光器也可能在四极子微腔当中实现. 有关四极子微腔“蝴蝶结模式”问题, 目前虽然在理论和实验上不少文献^[1~3]都已成功演示, 但未见详细理论推导过程和计算方法. 本文从麦克斯韦经典电磁理论出发, 详细推导了模式本征方程, 用 mathematic 软件计算模拟出四极子微腔“蝴蝶结模式”, 结果与文献^[1]上给出的实验和理论结果基本一致. 同时该计算方法适合于各种任意形状截面电磁波传输和散射问题.

1 基本理论

考虑一个周围都是空气, 大半径和变形因子分别为 R 和 ϵ , 折射率为 n 的四极子状截面, 采用如图 1

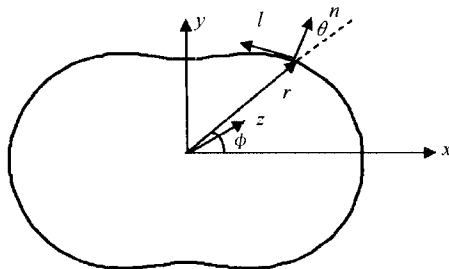


图 1 四极子量子级联微腔激光器截面
Fig. 1 Cross section of quadrupolar-shaped cascade microlasers

的极坐标系. 假设传播常量为 β , 时间谐振因子为 $\exp(j\omega t)$ 的光电磁波在 z 方向传播, 那么电磁波的波动方程可表示为^[4~6]

$$(\nabla_t^2 + k^2)\Psi = 0 \quad (1)$$

式中

$$k^2 = k_0^2 n^2 - \beta^2$$

$$k_0 = 2\pi/\lambda$$

λ 为激射波长, ∇_t^2 为二维横向拉普拉斯算子, 在如图 1 的自然坐标系中可表示为

$$\nabla_t^2 = \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{n} + \frac{\partial}{\partial l} l \quad (2)$$

对 TE 波, 波函数 $\Psi = H_z$, 而对 TM 波, $\Psi = E_z$. 其他横向电磁分量与 E_z 和 H_z 的关系为

$$E_t = (j\beta/k^2)[-\nabla_t E_z + (\omega\mu_0/\beta)\mathbf{z}(\nabla_t H_z)] \quad (3)$$

$$H_t = (-j\beta/k^2)[(\omega\mu_0/\beta)\mathbf{z}\nabla_t E_z + (\nabla_t H_z)] \quad (4)$$

式中, \mathbf{z} 表示为 z 方向单位矢量. 而 E_z 和 H_z , 根据数理方程理论由贝塞尔函数(或虚宗量贝塞尔)和角量因子的乘积之和来表示为

$$E_z = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^s G_m^s(r) e^{-jm\phi} \quad (5)$$

$$H_z = \frac{\beta}{\omega\mu_0} \sum_{m=0}^{\infty} b_m^s G_m^s(r) e^{-jm\phi} \quad (6)$$

式中, $s=i$ (表示内部区域) 或 e (表示外部区域), $G_m^i(r) = J_m(ur)$, $G_m^e(r) = K_m(wr)$, $u = (k_0^2 n^2 - \beta^2)^{1/2}$, $w = (\beta^2 - k_0^2 n_0^2)^{1/2}$, 而 a_m^i, a_m^e, b_m^i 和 b_m^e 为待定系数. 由式(2)~(4)得电磁切向分量为

$$\frac{-jE_t}{\beta} = \frac{\partial H_z}{\partial n} - \frac{\partial E_z}{\partial l} = \frac{j}{k_0^2 n^2 - \beta^2} \sum_{m=0}^{\infty} G_m^s \cdot e^{-jm\phi} \left[a_m^s \left(\cos \theta \frac{m}{r} - j \sin \theta \frac{G_m^s}{G_m^s} \right) + b_m^s \left(\cos \theta \frac{G_m^s}{G_m^s} - j \sin \theta \frac{m}{r} \right) \right] \quad (7)$$

$$j\frac{\omega\mu_0}{\beta^2} H_t = \frac{\partial H_z}{\partial n} + \frac{k_0^2 n_s^2}{\beta^2} \frac{\partial E_z}{\partial l} = \frac{1}{k_0^2 n_s^2 - \beta^2} \sum_{m=0}^{\infty} G_m^s e^{-jm\phi} \left[a_m^s \left(\cos \theta \frac{G_m^s}{G_m^s} - j \sin \theta \frac{m}{r} \right) \frac{k_0^2 n_s^2}{\beta^2} + \right]$$

* 国家自然科学基金(60366001)资助

Tel: 0471-4994004 Email: pygzwu@imu.edu.cn

收稿日期: 2005-07-08

$$b_m^s \left(\cos \theta \frac{m}{r} - j \sin \theta \frac{G_m^s}{G_m^s} \right) \quad (8)$$

式中

$$G_m^s = \frac{\partial J_m(u)}{\partial r}, G_n^e = \frac{\partial K_m(w)}{\partial r}$$

$$\frac{\partial}{\partial l} = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\cos \theta}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \phi}$$

θ 表示 r 和 n 的夹角, 如图 1. θ 和 ϕ 的函数关系为: 假设边界曲线 C 方程为 $f(x, y) = 0; x = r \cos \phi, y = r \sin \phi$, 根据解析几何理论得到

$$\tan \theta = -(1 + \tan \phi \frac{\partial y}{\partial x}) / (\frac{\partial y}{\partial x} - \tan \phi) |_{C=0} = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \phi} |_{C=0} \quad (9)$$

2 本征方程

由于量子级联激光器发射的光具有单向偏振性 (TM 波), 所以本文只考虑 TM 波的情况. 根据边界条件, 由式 (5)~(9) 得到如下本征方程

$$\frac{J_m'(ur)}{uJ_m(ur)} + \frac{K_m'(wr)}{wK_m(wr)} = \frac{jm}{r \tan \theta} \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) = \frac{jm}{r'(\phi)} \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \quad (10)$$

由

$$J_m'(ur) = -\frac{mJ_m(ur)}{ur} + J_{m-1}(ur)$$

$$K_m'(ur) = -\frac{mK_m(ur)}{ur} - K_{m-1}(ur)$$

进一步简化为

$$\frac{J_{m-1}(ur)}{uJ_m(ur)} - \frac{K_{m-1}(wr)}{wK_m(wr)} = \frac{m}{r} \left(\frac{jr}{r'(\phi)} + 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \quad (11)$$

3 光场分布图

若四极子量子级联微腔激光器相关参量分别取为 $\lambda = 5 \mu\text{m}, n = 3.4, n_0 = 1, r$ 表示为

$$r(\phi) = \frac{R}{\sqrt{1+2\epsilon}} \sqrt{1+2\epsilon \cos(2\phi)} \quad (12)$$

取 $R = 70 \mu\text{m}$, 用计算机可以求解式 (11) 的数值解. 用 Mathematic 软件进行了计算, 得到对应不同角度的传播常量 β 值. 而径向光场分布由平均辐射能密度公式得到, 由

$$S = \frac{1}{2} \text{Re}(E^* \times H) \quad (13)$$

在圆柱坐标系下得

$$S_r = \frac{1}{2} \text{Re}(E_\phi^* H_z - H_\phi E_z^*) \quad (14)$$

对 TM 波, $H_z = 0$, 而 H_ϕ 由 E_z 得出. 最后得到 S_r 为

$$S_r = \begin{cases} A \frac{J_m(ur)J_m'(ur)}{u[J_m(ur_c)]^2} & (r < r_c) \\ B \frac{K_m(wr)K_m'(wr)}{w[J_m(wr_c)]^2} & (r > r_c) \end{cases} \quad (15)$$

式中 A, B 为任意常量, r_c 为边界曲线半径, 这里等于式 (1). 同样用 Mathematic 软件计算了式 (15), 得到的结果为如图 2, 3, 与文献 [1] 得到的结果基本一致. 从图中明显看到四极子量子级联微腔激光器的“蝴蝶结模式 (Bow-tie modes)”, 说明光强分别在 $\phi = 45^\circ, \phi = 135^\circ, \phi = 225^\circ$ 和 $\phi = 315^\circ$ 四个方向最强, 其它方向比较弱, 这对显著提高激光输出效率非常有效.

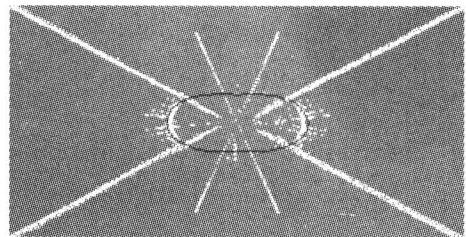


图 2 变形因子 $\epsilon = 0.2, m = 1$ 的光场分布图
Fig. 2 Optical field distribution for deformation factor $\epsilon = 0.2, m = 1$

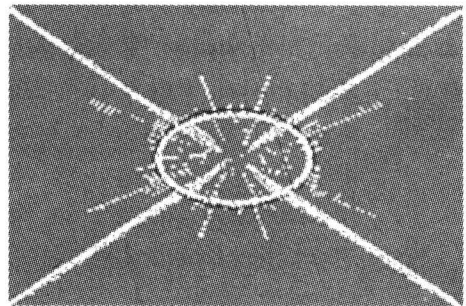


图 3 变形因子 $\epsilon = 0.1, m = 1$ 的光场分布图
Fig. 3 Optical field distribution for deformation factor $\epsilon = 0.1, m = 1$

4 结论

本文用简单直观的电磁理论计算了四极子量子级联微腔激光器的光场分布, 得到“蝴蝶结模式 (Bow-tie modes)”分布, 解释了四极子微腔提高光输出效率的特征. 该方法的近似之处在于未考虑到微腔激光器有限厚度 (一般小于 $< 0.6 \mu\text{m}$), 即未考虑 z 方向光受限制影的影响, 这未免有些粗略, 但能简化计算过程, 得出的结论也基本一致. 该计算方法同时适用于其它任意形状截面光传输和散射计算问题.

参考文献

- Gmachl C, Capasso F, Narimanov E E, et al. High-power directional emission from microlasers with chaotic resonators. *Science*, 1998, **280**(5): 1556~1564
- Anders S, Schrenk W, Gornik E, et al. Room-temperature

- operation of electrically pumped quantum-cascade microcylinder lasers. *Appl Phys Lett*, 2002, **80**(3): 4094~4097
- 3 Gianordoli S, Hvozda L, Strasser G, *et al.* Long-Wavelength ($\lambda = 10 \mu\text{m}$) quadrupolar-shaped GaAs-AlGaAs microlasers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 2000, **36**(4): 458~464
- 4 张小康, 廖常俊, 刘颂豪. 波导弯曲半径与弯曲损耗的关系. *光子学报*, 2004, **33**(2): 147~150
Zhang X K, Liao C J, Liu S H. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(2): 147~150
- 5 戴道铎, 殷源, 潘德荣, 等. 弯曲波导之间的耦合分析. *光子学报*, 2002, **31**(11): 1413~1417
Dai D X, Yin Y, Pan D R, *et al.* *Acta Photonica Sinica*, 2002, **31**(2): 1413~1417
- 6 陈慰宗, 郑新亮, 付灵丽. 一维光子晶体中的电磁模密度. *光子学报*, 2003, **32**(2): 239~243
Chen W Z, Zheng X L, Fu L L. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(2): 239~243

Theory of Optical Modes in Quadrupolar-shaped Cascade Microlasers

Wu Genzhu, Li Zhanjia, Huo Haiyan, Feng Lan

Electronics Engineering Department of Inner Mongolia University, Huhhat 010021

Received date: 2005-07-08

Abstract A method for the calculation of optical modes in quadrupolar-shaped resonant cavities is presented. The eigenvalue equation for resonant wavelength and optical field distribution is established. Numerical calculations are carried out for some deformation factor quadrupolar-shaped microlasers. The theoretical analyses and numerical results show that the optical modes in quadrupolar-shaped microlasers is typical for bow-tie mode with highly directional emission at a far-field angle $\phi = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$. This method can apply to other arbitrary cross section electromagnetic scattering and transmitting problems.

Keywords Quadrupolar-shaped; Optical modes; Microlasers; Eigenvalue equation



Wu Genzhu was born in November 5, 1967, in Inner Mongolia, China. He received B. S. degree in physics from Inner Mongolia Normal University in 1990 and received Ph. D. degree from Department of optics engineering Changchun College of Optics and Fine Mechanics in 2001. Now he is a Prof. of Electronics Engineering Department of Inner Mongolia University. His main research focuses on the theory and technology of microcavity lasers.