

# 左手系材料界面上的非线性 TE 电磁波\*

王兴林 王 奇 施解龙 申 明 陈园园

(上海大学理学院物理系, 上海 200444)

**摘 要** 针对电磁波在非线性左手系材料中的传播性质, 分别研究了左、右手系材料界面以及两左手系材料界面上非线性 TE 表面波的传播行为. 讨论了导波的频率特性、色散关系以及群速度随频率的变化规律. 分析表明, 两种界面上的非线性 TE 表面波均存在频率通带和禁带, 且带宽是传播功率的函数. 揭示了在一定条件下, 左、右手系材料界面上既可以支持正向传播的非线性 TE 表面波, 也可以支持反向传播的非线性 TE 表面波; 两左手系材料界面上表面波的传播性质因材料参量的变化差异较大, 一定参量条件下, 该界面上仅支持反向传播的非线性 TE 表面波.

**关键词** 左手系材料; 负折射率; 非线性效应; 表面波

**中图分类号** O340K; 4265 **文献标识码** A

## 0 引言

1968 年, Veselago<sup>[1]</sup>从理论上预言了电磁波可以在磁导率 $\mu$ 和介电常量 $\epsilon$ 均为负数的媒质中传播. 在这种介质中折射率 $n$ 取负值, 波矢 $k$ 与能流密度 $S$ 反向平行, 由此导致了负折射率, 负 Doppler 效应和负 Cherenkov 辐射等一些反常的物理现象. 由于电场矢量 $E$ 、磁场矢量 $H$ 和 $k$ 之间呈左手系关系, 这种复合介质被称为“左手系材料”(LHM), 而三者呈右手系关系的传统材料被称为“右手系材料”(RHM). 2001 年, Smith, et al. 在微波段首次发现利用特殊微结构周期排列的复合介质能同时得到负介电常量 $\epsilon$ 和负磁导率 $\mu$ <sup>[2]</sup>, 从而在实验上证实了制备这种材料的可行性, 左手系材料所表现出的众多物理特性因此受到了学术界极大的关注<sup>[3~10]</sup>.

基于近年来对金属复合材料非线性性质的系统研究, Zharov, et al. 提出将构成左手系材料的带缝环状谐振器 SRRs (split ring resonators) 和金属线条嵌入非线性电介质中会产生磁滞非线性效应, 而非线性电介质填充 SRRs 的缝隙也会产生相应的非线性现象. 考虑二维周期性结构, 他们计算出有效的非线性介电常量和非线性磁导率, 分析了电磁波在非线性左手系材料中的传播性质<sup>[11]</sup>. 随后, 学术界对左手系材料非线性现象的物理解释以及波在其中的传播特性等问题展开了一系列的讨论<sup>[12, 13]</sup>, 但目前的这些分析还很初步, 一些基本理论也不够完备.

本文重点研究了左、右手系材料界面上非线性

TE 表面波的传播行为. 详细讨论了导波的频率传播范围, 揭示了非线性 TE 表面波存在着频率通带和禁带, 且带宽是传播功率的函数. 因此, 物理上可以通过调节传播功率对其加以控制. 分析了导波的色散关系以及群速度随频率的变化规律, 揭示了左、右手系材料界面上既可以支持正向传播的非线性 TE 表面波, 也可以支持反向传播的非线性 TE 表面波. 进一步考虑了两左手系材料界面上非线性 TE 表面波的相关性质. 研究发现, 该界面上非线性 TE 表面波因材料参量的变化传播性质差异较大, 一定参量条件下, 该界面上仅可支持反向传播的非线性 TE 表面波.

## 1 左、右手系材料界面上的非线性 TE 表面波

### 1.1 基本关系

考虑表面波在左手系材料和电介质组成的界面上沿 $z$ 方向传播, 具有克尔非线性效应的左手系材料( $\epsilon_1^{NL}, \mu_1$ )占据 $x > 0$ 的半无穷区域, 线性电介质( $\epsilon_2, \mu_2$ )占据 $x < 0$ 的半无穷区域. 则 TE 极化时电场传输方程为<sup>[14]</sup>

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - (k^2 - k_0^2 \epsilon_1^{NL} \mu_1) E_y = 0 \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - (k^2 - k_0^2 \epsilon_2 \mu_2) E_y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $k_0 = \omega/c$ ,  $k$ 为表面波的传播常量,  $\epsilon_1^{NL} = \epsilon_1^L(\omega) + \alpha |E_1|^2$ ,  $\epsilon_1^L(\omega) = 1 - (\omega_p/\omega)^2$ ,  $\mu_1(\omega) = 1 - F\omega^2/(\omega^2 - \omega_r^2)$ , 其中 SRRs 的有效等离子频率 $\omega_p/2\pi = 10$  GHz, 本征频率 $\omega_r/2\pi = 4$  GHz,  $F = 0.56$ . 考虑左手系材料具有聚焦效应, 非线性系数 $\alpha$ 应小于 0. 求解式(1)得

$$\begin{cases} E_{1y} = \frac{k_1}{k_0} \sqrt{\frac{2}{\alpha \mu_1}} \operatorname{sech} [k_1(x - x_0)] \\ E_{2y} = E_2 \exp(k_2 x) \end{cases} \quad (2)$$

\*上海市科委基础研究重大项目(No. 04JC14036)和上海市重点学科建设项目(No. T0104)  
Tel: 021-66132524 Email: wxldreamfly@163.com  
收稿日期: 2005-06-07

式中  $k_1 = \sqrt{k^2 - k_0^2 \epsilon_1^L \mu_1}$ ,  $k_2 = \sqrt{k^2 - k_0^2 \epsilon_2 \mu_2}$ , 由电磁场在界面处的切向连续性得

$$\begin{cases} E_2 = \frac{k_1}{k_0} \sqrt{\frac{2}{\alpha \mu_1}} \operatorname{sech}(k_1 x_0) \\ \frac{k_2}{\mu_2} E_2 = \frac{k_1^2}{\mu_1 k_0} \sqrt{\frac{2}{\alpha \mu_1}} \tanh(k_1 x_0) \end{cases} \quad (3)$$

比较式(3)中两方程可得

$$\tanh(k_1 x_0) = \frac{\mu_1 k_2}{\mu_2 k_1} \quad (4)$$

式中, 因  $\mu_1, \mu_2$  符号相反,  $\operatorname{sech}$  函数的中心  $x_0$  在轴的负方向上, 即场最大幅值在界面处(非峰值), 这与两电介质中场最大值(峰值)偏向于非线性材料一边是不同的<sup>[15]</sup>.

将式(3)及  $k_1, k_2$  代入式(4)得到系统色散方程

$$\frac{k^2}{k_0^2} = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1^2 - \mu_2^2} (\mu_1 \epsilon_2 - \mu_2 \epsilon_1^L - \frac{1}{2} \mu_2 \alpha E_2^2) \quad (5)$$

材料界面处的能流密度, 由坡印亭矢量给出

$$P = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)_z dx \equiv P_1 + P_2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty E_{y1} \cdot H_{x1}^* dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 E_{y2} \cdot H_{x2}^* dx$$

$$\begin{cases} P_1 = \frac{k k_1}{\mu_0 \mu_1^2 k_0^2 \omega \alpha} (1 + \frac{\mu_1 k_2}{\mu_2 k_1}) \\ P_2 = \frac{k k_2^2}{2 \mu_0 \mu_1 \mu_2 k_2 k_0^2 \omega \alpha} [1 - (\frac{\mu_1 k_2}{\mu_2 k_1})^2] \end{cases} \quad (6)$$

下面详细讨论该界面上非线性 TE 表面波的各种传播特性.

### 1.2 频率特性

由式(5), 增加  $\alpha E_2^2/2$  的大小将会相应减少或者增加  $k^2/k_0^2$  的值, 当  $|\mu_1| = \mu_2$  时, 显然该表面波截止. 因此, 该色散方程将决定左、右手系材料界面上非线性表面波的特殊频率特性.

对于表面波, 要求  $k_1^2, k_2^2$  大于 0, 即

$$k^2 > k_0^2 \epsilon_1^L \mu_1, k^2 > k_0^2 \epsilon_2 \mu_2 \quad (7)$$

为方便讨论, 定义  $\Omega = \omega/\omega_p, \Omega_0 = \omega_r/\omega_p$ , 则左手材料的介电常数  $\epsilon_1^L(\Omega) = 1 - 1/\Omega^2$ , 磁导率  $\mu_1(\Omega) = 1 - F\Omega^2/(\Omega^2 - \Omega_0^2)$ , 满足左手性质的频率范围为  $0.4 < \Omega < 0.6$ , 对普通电介质取  $\mu_2 = 1$ . 以下分情况讨论:

#### 1.2.1 $|\mu_1| < \mu_2$ 情形

由式(5),  $\mu_1 \epsilon_2 - \mu_2 \epsilon_1^L - \mu_2 \alpha E_2^2/2 > 0$ , 联立系统条件式(7)得不等式组

$$\begin{cases} \mu_1 \epsilon_2 - \mu_2 \epsilon_1^L - \frac{1}{2} \mu_2 \alpha E_2^2 > 0 \\ \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1^2 - \mu_2^2} (\mu_1 \epsilon_2 - \mu_2 \epsilon_1^L - \frac{1}{2} \mu_2 \alpha E_2^2) > \epsilon_1^L \mu_1 \\ \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1^2 - \mu_2^2} (\mu_1 \epsilon_2 - \mu_2 \epsilon_1^L - \frac{1}{2} \mu_2 \alpha E_2^2) > \epsilon_2 \mu_2 \end{cases} \quad (8)$$

化简有

$$\begin{cases} \epsilon_1^L < \frac{\mu_1}{\mu_2} \epsilon_2 - \frac{1}{2} \alpha E_2^2 \\ \epsilon_1^L < \frac{\mu_2}{\mu_1} \epsilon_2 - \frac{1}{2} \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} \alpha E_2^2 \\ \epsilon_1^L < \frac{\mu_2}{\mu_1} \epsilon_2 - \frac{1}{2} \alpha E_2^2 \end{cases} \quad (9)$$

比较得到

$$\epsilon_1^L < \frac{\mu_2}{\mu_1} \epsilon_2 - \frac{1}{2} \alpha E_2^2 \quad (10)$$

式(10)即为  $|\mu_1| < \mu_2$  情形下左、右手系材料界面上非线性 TE 表面波的传播条件. 进一步化简得

$$\frac{A\Omega^4 + B\Omega^2 + C}{\Omega^2 [(1-F)\Omega^2 - C]} < 0 \quad (11)$$

式中  $A = (1-F)(\alpha E_2^2/2 + 1) - \epsilon_2, B = -[(\alpha E_2^2/2 + 1 - \epsilon_2)\Omega_0^2 + 1 - F], C = \Omega_0^2$ , 比较各参量得  $\Omega^2 [(1-F)\Omega^2 - C] < 0$ , 则由式(11)

$$A\Omega^4 + B\Omega^2 + C > 0 \quad (12)$$

因  $\alpha E_2^2/2$  需小于 0, 则  $A < 0$ , 求解式(12)得频率范围为

$$\Omega_c < \Omega < \Omega' \equiv \sqrt{\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}} \quad (13)$$

可见非线性表面波具有频率通带与禁带, 通带的上限频率  $\Omega'$  是  $\alpha E_2^2/2$  的函数, 关系如图 1(a),  $\Omega^2$  的带宽为  $\Delta\Omega^2 = \Omega'^2 - \Omega_c^2$ ,  $\Omega_c$  满足  $\mu_1(\Omega_c) = 1$ . 可以看出, 对一确定宽度,  $\epsilon_2$  决定  $\alpha E_2^2/2$  的取值范围, 且随

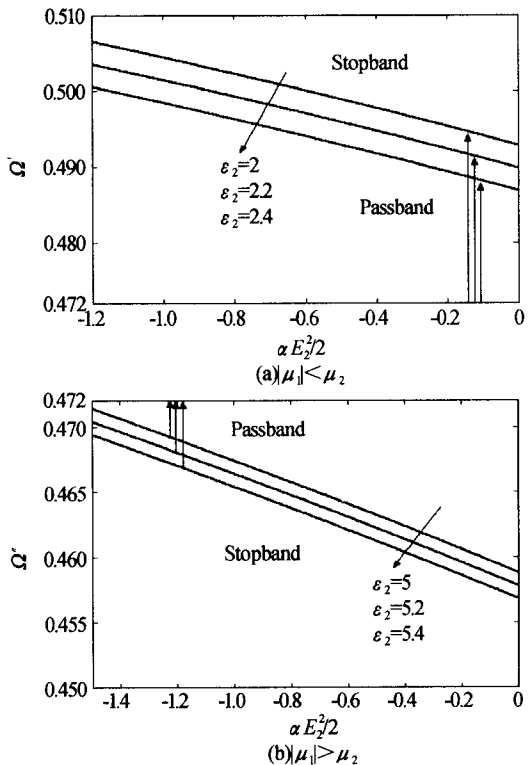


图 1 两种情形下, 极限频率随非线性项的变化曲线  
 Fig. 1 Variation of limited frequency with nonlinear term in two cases

着  $\alpha E_2^2/2$  的增大,通带的上限减少,即通带的宽度变小,当  $\alpha E_2^2/2$  趋近 0 时,通带达到最小极限宽度.

1.2.2  $|\mu_1| > \mu_2$  情形

同样推导出该情形下非线性 TE 表面波的传播条件为

$$\epsilon_1^L < \frac{\mu_2}{\mu_1} \epsilon_2 - \frac{1}{2} \alpha E_2^2 \quad (14)$$

求解得

$$\Omega' \equiv \sqrt{\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}} < \Omega < \Omega_c \quad (15)$$

与情形(1.2.1)类似,  $\Omega'$  是  $\alpha E_2^2/2$  的函数,且  $\alpha E_2^2/2$  的变化范围依赖  $\epsilon_2$  的取值,该情况下三者的关系如图 1(b),可见随着  $\alpha E_2^2/2$  的增大,通带的下限减少,即通带的宽度变大,当  $\alpha E_2^2/2$  趋近 0 时,达到最大极限通带宽度. 由于  $\alpha E_2^2/2$  是与传输功率相联系的,因此物理上可以根据要求通过调节功率的大小对该界面上非线性 TE 表面波的传播行为加以控制.

1.3 色散特性

为方便考虑,将色散式(5)改写成如下形式

$$k = k_0 \left[ \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1^2 - \mu_2^2} (\mu_1 \epsilon_2 - \mu_2 \epsilon_1^L - \frac{1}{2} \mu_2 \alpha E_2^2) \right]^{1/2} \quad (16)$$

由式(16)可以描绘出  $|\mu_1| < \mu_2$  和  $|\mu_1| > \mu_2$  两种情况下的色散曲线(如图 2(a)、(b)),其中  $\Omega = \omega/\omega_p$ ,  $h = kc/\omega$  均为归一化形式,由图知,两种情况下传播

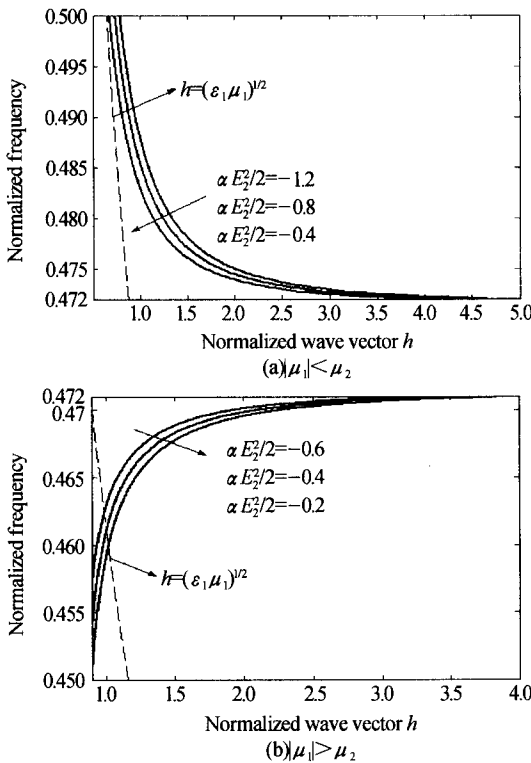


图 2 两种情形下,表面波的色散曲线,图中虚线为表面波的线性限制

Fig. 2 Dispersion curves of the nonlinear surface waves in two cases, dashed lines are the linear limits

常量随入射频率的增大分别减小、增大.

将式(16)两边对频率  $\omega$  求一阶导数得

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{k}{ck_0} + \frac{k_0^2}{2k} \left[ \left( \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1^2 - \mu_2^2} \right)' (\mu_1 \epsilon_2 - \mu_2 \epsilon_1^L - \frac{1}{2} \mu_2 \alpha E_2^2) + \left( \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1^2 - \mu_2^2} \right) (\mu_1' \epsilon_2 - \mu_2' \epsilon_1^L) \right] \quad (17)$$

式中  $\left( \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1^2 - \mu_2^2} \right)' = \frac{-\mu_1' \mu_2 (\mu_1^2 + \mu_2^2)}{(\mu_1^2 - \mu_2^2)^2}$ ,  $\epsilon_1^L(\omega) = \frac{2\omega_p^2}{\omega^3}$ ,

$\mu_1'(\omega) = \frac{2F\omega_r^2\omega}{(\omega^2 - \omega_r^2)^2}$ ; 群速度由  $V_g = d\omega/dk = 1/(dk/d\omega)$

给出,图 3(a)与图 3(b)描述了两种情况下群速度与频率的关系. 由图知,当  $|\mu_1| < \mu_2$  时,  $V_g < 0$ ,即导波的群速度与相速度反向;当  $|\mu_1| > \mu_2$  时,  $V_g > 0$ ,群速度与相速度同向. 因此,在  $|\mu_1| < \mu_2$  条件下,左、右手系材料界面只支持频率满足式(13)传播的反向非线性 TE 表面波;在  $|\mu_1| > \mu_2$  条件下,该界面只支持满足式(15)传播的正向非线性 TE 表面波.

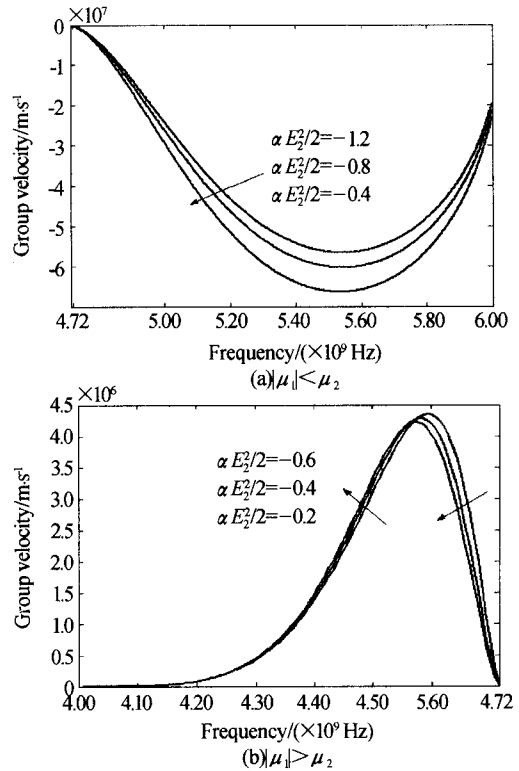


图 3 两种情形下,群速度随频率的变化曲线

Fig. 3 Variation of group velocity with frequency in two cases

2 两左手系材料界面上的非线性 TE 表面波

利用前文的处理方法,考虑两左手系材料界面上非线性 TE 表面波. 由于 1.1 节中讨论的基本关系实质上是从最一般的线性材料和克尔非线性材料界面出发推导得出的,形式上具有普遍性. 因此对于两左手系材料界面上的 TE 表面波同样适用. 则

因两左手材料  $\mu_1$ 、 $\mu_2$  符号相同, sech 函数的中心  $x_0$  在轴的正方向上, 即场的最大幅值偏向于非线性材料一边(如图 4), 与两右手系材料的情况一致<sup>[15]</sup>.

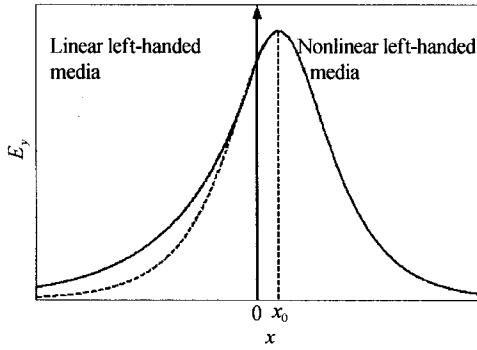


图 4 电场在两左手系材料中的分布  
Fig. 4 The amplitude of electric field in the two left-handed materials

根据文献<sup>[11]</sup>, 通过改变左手材料结构中金属环的半径及其它参量值, 可以调节左手区的频率范围. 若取  $\omega_{p2}/2\pi=14$  GHz,  $\omega_{r2}/2\pi=3.8$  GHz,  $F_2=0.54$ , 则有关系  $\mu_1 < \mu_2 < 0$ , 要求两材料均满足左手性质, 传播频率的范围为 4~5.6 GHz. 该界面上非线性 TE 表面波的传播也有其确定的频率范围, 带宽与传播功率有关. 图 5 描述了其传播的通带和禁带区域.

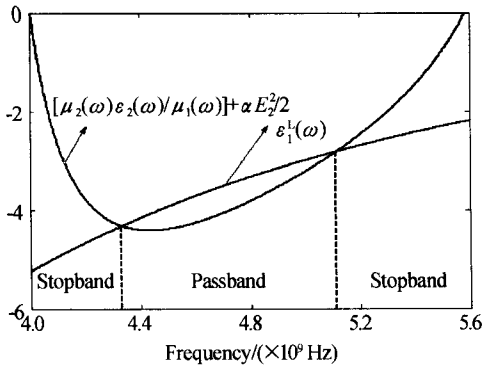


图 5 在  $\mu_1 < \mu_2$  情况下, 两左手系材料界面处非线性表面波的通带与禁带区域  
Fig. 5 In the case of  $\mu_1 < \mu_2$ , propagating regions for nonlinear surface waves at the interface between two left-handed materials

根据式(16)、(17)的求解方法可以描述出在  $\mu_1 < \mu_2$  条件下的色散曲线及群速度随频率的变化关系(如图 6(a)、(b)).

将两材料互换位置而在  $x > 0$  半无限空间的材料依然带有非线性, 此时  $\mu_1 > \mu_2$ , 同样得到如图 7(a)、(b)的色散和群速度曲线. 可以看出, 在  $\mu_1 < \mu_2$  与  $\mu_1 > \mu_2$  两种情况下, 两左手系材料界面上均只支持反向传播的非线性 TE 表面波. 进一步研究发现两左手系材料界面上表面波的传播特性随两边材料参量的变化会产生较大的差异, 甚至会出现完全截

止的现象, 这里不再详细介绍.

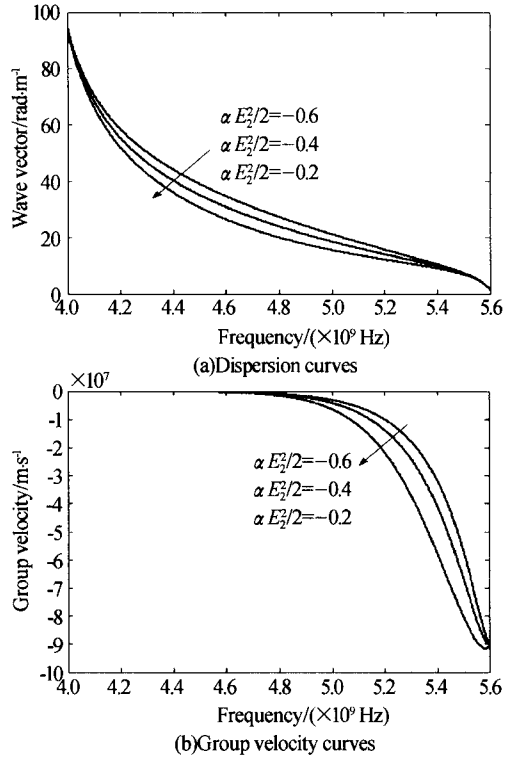


图 6  $\mu_1 < \mu_2$  情况下表面波的色散曲线及群速率变化曲线  
Fig. 6 Dispersion curves and the group velocity curves in the case of  $\mu_1 < \mu_2$

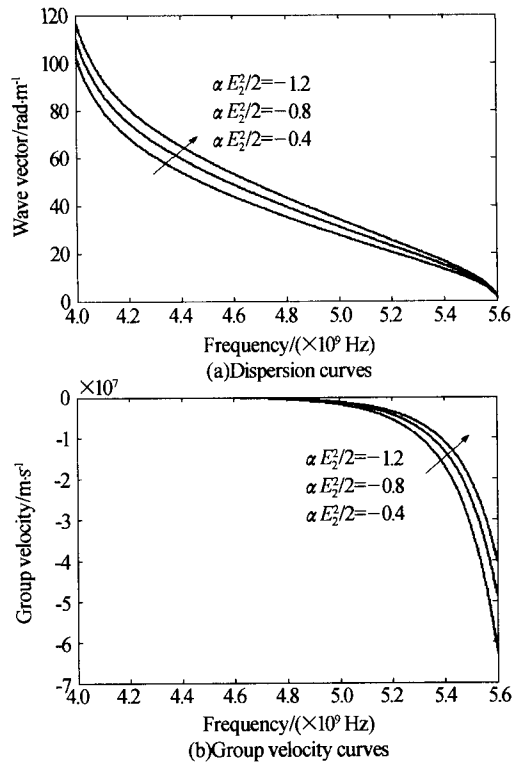


图 7  $\mu_1 > \mu_2$  情况下的色散曲线及群速率变化曲线  
Fig. 7 Dispersion curves and the group velocity curves in the case of  $\mu_1 > \mu_2$

### 3 结论

考虑无损失条件, 本文所讨论的左、右手系材料

界面以及两左手系材料界面上非线性 TE 表面波的传输特性归纳如下:

1) 左、右手系材料界面上场峰值位于线性介质中,界面上存在最大场幅值,而对于两左手系材料最大场幅值为峰值,且偏向于非线性材料中.

2) 两种界面上的非线性 TE 表面波均存在频率通带与禁带. 并且两者的带宽是传播功率的函数. 因此,可以通过调节传播的功率来实现系统的导通或截止.

3)  $|\mu_1| < \mu_2$  时,左、右手系材料界面上支持的是反向传播的非线性 TE 表面波,  $|\mu_1| > \mu_2$  时,支持的是正向传播的非线性 TE 表面波.

4) 两左手系材料界面上的非线性 TE 表面波传播因材料参量变化差异较大,一定参量条件下,在  $\mu_1 < \mu_2$  与  $\mu_1 > \mu_2$  时,该界面均只支持反向传播的非线性 TE 表面波.

#### 参考文献

- 1 Veselago V G. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$ . *Sov Phys Uspe*, 1968, **10**(4): 509~514
- 2 Shelby R A, Smith D R, Schultz S. Experimental verification of a negative index of refraction. *Science*, 2001, **292**(6): 77~79
- 3 Pendry J B. Negative refraction makes a perfect lens. *Phys Rev Lett*, 2000, **85**(18): 3966~3969
- 4 Smith D R, Kroll N. Negative refraction index in left-handed materials. *Phys Rev Lett*, 2000, **85**(14): 2933~2936
- 5 Ruppin R. Surface polaritons of a left-handed medium. *Phys Lett A*, 2000, **277**(1): 61~64
- 6 Shvets G. Left-handed surface waves in a photonic structure. *Physica B*, 2003, **338**(4): 338~342
- 7 杨立功, 顾培夫, 黄弼勤, 等. 光波在左右手系材料界面处的传输特性. *光子学报*, 2003, **10**(32): 1225~1227  
Yang L G, Gu P F, Huang B Q, et al. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **10**(32): 1225~1227
- 8 Yang L G, Gu P F, Huang B Q. Study of finite aperture effect on lens made of LHM by geometrical Optics. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(11): 1396~1398
- 9 杨立功, 顾培夫, 黄弼勤. 含有负折射率介质层的布喇格镜的光学特性研究. *光子学报*, 2004, **33**(2): 200~203  
Yang L G, Gu P F, Huang B Q. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(2): 200~203
- 10 何金龙, 沈林放, 何赛灵等. 负折射率介质光导模异常特性分析. *光子学报*, 2004, **33**(11): 1327~1330  
He J L, Shen L F, He S L, et al. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(11): 1327~1330
- 11 Zharov A A, Shadrivov I V, Kivshar Y S. Nonlinear properties of left-handed metamaterial. *Phys Rev Lett*, 2003, **91**(3): 037401-1~037401-4
- 12 Shadrivov I V, Kivshar Y S. Spatial solitons in nonlinear left-handed metamaterials. *J Opt A: Pure Appl Op*, 2005, **7**(1): 568~572
- 13 Shadrivov I V, Sukhorukov A A, Kivshar Y S. Nonlinear surface waves in left-handed materials. *Phys Rev E*, 2004, **69**(1): 016617-1~016617-9
- 14 Wang Q, Wu Z, Li S M. Nonlinear behavior of magnetic surface waves on the interface between ferromagnet and antiferromagnet. *J Appl Phys*, 2000, **87**(4): 1908~1913
- 15 Boardman A D, Egan P. *Quantum Electron IEEE J*, 1985, **21**(10): 1701~1713

## Nonlinear TE Surface Waves at the Interface of a Left-handed Material

Wang Xinglin, Wang Qi, Shi Jielong, Shen Ming, Chen Yuanyuan

Department of Physics, Shanghai University, Shanghai 200444

Received date: 2005-06-07

**Abstract** For electromagnetic plane wave propagating in nonlinear left-handed material, the properties of nonlinear TE surface waves localized at the interface of a left-handed material (an interface separating a left-handed material and a right-handed material or an interface separating two left-handed materials) are investigated in detail. The results of frequency characteristics prove there exist both passband(s) and stopband(s), which have the wave power-dependent properties and can be controlled by varying the power in the waveguide. The frequency dispersion and variation of group velocity with frequency are also calculated. Base on the analysis, the interface between a nonlinear left-handed material and a right-handed material can support both forward TE surface waves and backward TE surface waves under certain conditions. Whereas, the relative properties are quite different when the surface waves localize at the interface between two left-handed materials, there only can exist backward waves according to certain conditions.

**Keywords** Left-handed material; Negative refraction; Nonlinear effect; Surface wave

**Wang Xinglin** was born in Dec., 1980, in Anhui Province, received his B. S. degree in Physics Dept. of Anqing Normal College in 2003. Now he is pursuing M. S. degree in Physics Dept. of Shanghai University. His main research focuses on nonlinear properties of left-handed structure.

