

各向异性扩散滤波的正则化参数选取方法*

王怀野 张 科 李言俊

(西北工业大学航天学院, 西安 710072)

摘 要 研究了图像处理中各向异性扩散的正则化参数选取问题. 根据分片常数模型, 提出了一种噪声估计方法, 该方法通过寻找图像中的最小区域方差来估计噪声; 分析了正则化参数与图像噪声的关系, 提出了一个正则化参数选取的修正公式, 该公式使正则化参数能根据图像噪声自适应调整; 最后给出了由正则化参数选取高斯模板尺度的规则. 实验结果显示, 这种正则化选取方法可以使各向异性扩散方程对图像噪声具有很好的自适应性.

关键词 各向异性扩散; 分片常数模型; 正则化参数; 噪声估计

中图分类号 TN248.1 **文献标识码** A

0 引言

在基于偏微方程的图像处理中, 各向异性扩散滤波将图像描述为一个分片常数模型, 即将边缘作为区域的边界, 假定各区域内象素的灰度值为常数, 它在鼓励区域内平滑的同时禁止区域间平滑, 使滤波器在平滑噪声的同时能较好地保留边缘等重要特征. 然而, 在 Perona 和 Malik^[1] 所提出各向异性扩散方程中, 扩散因子为图像梯度的函数, 当图像存在噪声的情况下, 梯度函数对噪声的敏感性会导致方程是病态的, 即相同的输入条件下可能得到完全不同的结果. Catte 和 Lions^[2] 采用一个高斯核在原图进行平滑的方法来解决扩散方程的病态问题, 文献[4]将这个高斯核的尺度称为正则化参数. 在实际应用中, 如何选取正则化参数是一个难题, 如果参数太小, 则噪声得不到有效的抑制, 扩散方程仍可能是病态的, 相反会模糊图像的有用特征.

为解决正则化参数的选取问题, 本文首先给出了一种图像噪声的估计方法; 然后根据高斯尺度与图像局部方差的关系, 修改了文献[3]中噪声与滤波尺度的公式, 从中选取一个尺度作为正则化参数, 使正则化参数能根据不同的噪声自适应选取; 最后还分析了高斯模板的尺度选取问题. 实验结果显示这种方法对噪声具有很好的自适应能力.

1 各向异性扩散方程

Catte 和 Lions 定义正则化后的扩散方程为

$$\frac{\partial I(x, y, t)}{\partial t} = \text{div}(g(|\nabla I_\sigma|) \nabla I(x, y, t)) \quad (1)$$

式中 $I(x, y, t)$ 为处理图像, t 为尺度参数, 一般表示迭代的次数, $\text{div}(\cdot)$ 为散度函数, I_σ 为正则化后的图像, ∇ 是图像的梯度, $g(\cdot)$ 为扩散函数, 或称边缘停止函数, 它是一个梯度的单调递减函数, 如果 $g(\cdot)$ 为一个常数, 则扩散过程退化为高斯滤波.

式(1)的初始条件和边界条件为

$$I(x, y, 0) = I(x, y) \quad (2)$$

$$\frac{\partial I}{\partial n} = 0 \quad (3)$$

式中 n 代表边缘的法向.

文献[5]从统计的角度对各向异性扩散进行了解释, 并对几个典型的扩散函数进行了比较, 其中, Tukey 扩散函数是一种性能较好的函数, Tukey 函数的定义为

$$g(\nabla I) = \begin{cases} \frac{1}{2} [1 - (\nabla I/T)^2] & |\nabla I| \leq T \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (4)$$

从式(4)可以看出, Tukey 扩散函数选用了—个梯度阈值, 当图像梯度大于这个阈值, 即使扩散时间再长, 大于阈值的边缘都会被保持.

式(1)中的 ∇I_σ 为正则化图像的梯度

$$\nabla I_\sigma = \nabla (K_\sigma * I(x, y, t)) \quad (5)$$

式中, K_σ 为高斯平滑核

$$K_\sigma = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{|x|^2 + |y|^2}{2\sigma^2}\right) \quad (6)$$

本文将研究式(6)中的 σ 随图象噪声的自适应调整问题.

2 噪声估计方法

对于一幅给定的图像, 其退化模型可表示为^[8]

$$g = f + n \quad (7)$$

式中 f 表示原图像, g 表示实测图像, n 表示噪声, 假设该噪声信号与原图像 f 不相关, 且噪声符合正态分布 $n \sim N(0, \sigma_n^2)$. 根据图像的分片常数模型, 如

* 高等学校博士学科点专项科研基金 (No. 20020699014) 和
航天科技创新基金 (No. N4CH0008)
Tel: 13718943341 Email: wannhy@21cn.com
收稿日期: 2004-07-09

果一个区域存在边缘,则该区域的方差较大,反之,则方差较小.因此,只要在一幅图像中能找出方差最小的区域,就可以利用这个区域的方差近似估计图像的噪声.采用滑动窗口的方式来计算各窗口内的方差值,虽然可以得到方差的全局最小值,但在每个位置都进行方差计算将是一个很耗时的过程.

为了减少计算量,本文采用一些简单的算子初步检测出边缘,从中选出一些不含边缘的区域,并将这些区域的最小方差作为噪声的方差.这种方法所得到的方差虽然不是全局最小,但可保证方差值尽可能接近全局最小方差,具体的实现过程为:1)采用一个

较大的高斯尺度 σ_i 对原图进行平滑,使得噪声得到有效的抑制,见图1(b);2)采用较简单的边缘检测算子^[9],如Sobel,进行边缘检测,见图1(c);3)从步骤2得到的边缘图中选取几行,使滑动窗口沿着行滑动,如果滑动窗内不含有边缘点,则记下相应区域的位置,并使滑动窗的下一个位置在该区域之外.从而得到一系列的区域,见图1(d).为了满足噪声的统计特性,这个区域应足够大,本文选用 16×16 像素;4)如果3找不到满足条件的区域,则增加步骤1中的尺度 σ_i ,并重复以上操作;5)计算原图在相应区域的方差,取区域的最小方差表示图像的噪声方差 σ_n .

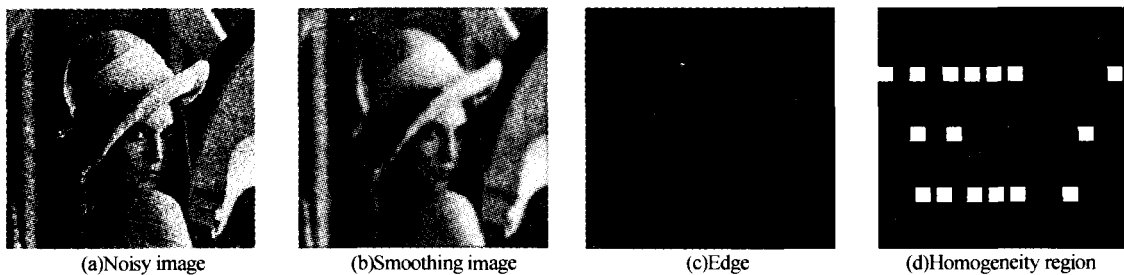


图1 图像噪声估计方法

Fig. 1 An approach to estimate image noise

图2为不同噪声条件下,真实噪声和本文方法估计噪声的对比,其中,常值灰度图像(constant gray-level image)各个像素的灰度值为0.5,图像的灰度区间为 $[0, 1]$ (归一化).从图中可以看出,本文方法估计的噪声与实际方差很接近.

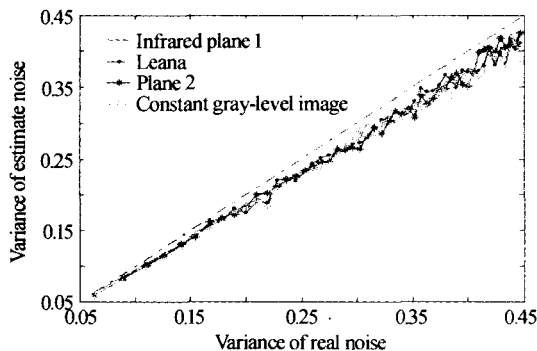


图2 图像噪声的估计

Fig. 2 Estimation of image noise

3 正则化参数的选取

根据式(7)的退化模型,如果有一种算法能从实测图像中准确地恢复出原图像,则肯定可以保证扩散方程是良态的,但实际上这个问题实现起来非常困难^[10].在图像复原中,把实测图像恢复原图像的问题看成约束最优化问题,即原图像的最优估值为

$$f' = \operatorname{argmin} \{ \|f - g\|^2 + \mu \|cf\|^2 \} \quad (8)$$

其中 μ 为正则化参数; c 为正则算子,通常为高通滤波算子以实现噪声的平滑.选择正则化参数和正则化算子是一个比较困难的问题^[7].

根据图像的多尺度特征,Jeong等人依据方差最小的原则来设计各像素处的高斯尺度,这种方法由于存在计算量大、初始参数需要人为给出等缺点,实际中很少使用^[6].

文献[3]定义图像各处的高斯尺度为

$$\sigma^2(x, y) = \frac{k\sigma_n^2}{\sigma_g^2(x, y)} = \frac{k\sigma_n^2}{\sigma_f^2(x, y) + \sigma_n^2} \quad (9)$$

式中, k 为比例因子, $\sigma_f(x, y)$ 为原图像各位置处的邻域方差, σ_n 图像噪声, $\sigma_g(x, y)$ 为观测图像在各处的邻域方差.

在图像的噪声确定时,某个位置的邻域方差越大,则该区域存在边缘的可能性越大,从式(9)可以看出,该处对应的滤波器尺度 $\sigma(x, y)$ 越小.这个特点符合保持图像边缘的要求,但如果某个区域的灰度值是常数,即 $\sigma_f(x) = 0$,则不管噪声有多大,滤波器的尺度仍是常数 k ,显而易见,在这样的区域内,采用式(9)所得到的滤波器在噪声尺度未知时不能很好的抑制噪声,如果让 k 的值随着噪声一起变化,则可以解决这个问题.

假设在 $\sigma_f(x) = 0$ 区域内,尺度 $\sigma(x, y)$ 与噪声尺度成线性关系,可令

$$k = \alpha\sigma_n^2 \quad (10)$$

式中 α 为常数,显然,式(10)还可以有其他的形式.

根据式(9),(10)可得

$$\sigma^2(x, y) = \frac{\alpha\sigma_n^4}{\sigma_f^2(x, y) + \sigma_n^2} \quad (11)$$

式(11)在不同区域选取不同的尺度来对图像进行平

滑,由于这个尺度与噪声水平相关,因此它对于噪声具有适应性,从而在抑制噪声的同时能有效保持边缘,但它仍是一个很复杂的计算过程,在各向异性扩散中,可以对这个尺度做进一步简化.

各向异性扩散方程中,正则化参数的作用是将 P-M 扩散方程的病态 (ill-posed) 问题转化为良态 (well-posed),从扩散函数可以看出,当噪声的梯度小于阈值时,则噪声会随着扩散过程的进行而逐渐消失. 因此,选择正则化参数并不需要保证所有的噪声都能消除,为了简化计算,可以选某一个尺度作为一个全局尺度,来实现抑制噪声和简化计算的折中. 由式(11)可知,当 $\sigma_f(x)=0$ 时 $\sigma(x,y)$ 最大,这个尺度抑制噪声最好但对保留边缘不利,本文采用一个比式(10)稍小的尺度来定义全局尺度

$$\sigma^2 = \beta \sigma_n^2 \quad (12)$$

β 是一个比 α 小的数,可以通过对一些图像的平滑实验来选定,本文中的 $\beta=81$.

4 高斯模板的大小

采用高斯核对图像平滑时,由于高斯核的支撑区间为无穷大的,因此必须对区间进行截断;另外,截断后的高斯核仍是连续的,需要进行采样来形成卷积模板. 目前,关于截断与采样缺乏统一的理论指导,不同的文献提到了 $[-3\sigma, 3\sigma]$ 、 $[-5\sigma, 5\sigma]$ 等不同的截断区间选择. 采用较大的模板虽然可以提供

计算的精度,但同时也大大增加了计算量. 根据正态分布曲线面积特性, $[-2.58\sigma, 2.58\sigma]$ 的面积占总面积的 99.0%,截断误差已经较小,折中考虑计算量和计算精度两方面的因素,本文采用的截取区间为 $[-3\sigma, 3\sigma]$,并使模板的最小尺度为 3.

在已有文献中,由于正则化参数是人为给定的,相应的高斯模板大小也是事先确定的,如 3×3 、 7×7 等,而本文的正则化参数随图像的噪声自适应变化,因此相应的高斯模板也是自适应变化的,而不象一些文献采用固定的模板,这可以在保证计算精度的同时减少计算量.

5 结果分析

图 3 为利用式(1)对一幅有噪声图像进行处理的结果(迭代 100 次),其中, Turkey 函数的阈值选为 ($T=10$);图 3(a)为噪声图像, $\sigma_n=0.1$;图 3(b)是正则化参数取得太小($\sigma=0.5$)的情况;图 3(c)是正则化参数取得太大($\sigma=1.8$)的情况;图 3(d)为式(12)确定的正则化参数($\sigma=0.9$)的效果. 从图 3 可以看出,参数选得太小滤波器对噪声的抑制效果不好,参数过大则导致许多边缘也被平滑掉,而本文的方法则可以很好地抑制噪声,并能很好地保留边缘细节. 改变图 3(a)的噪声水平,也能得到相同的结论,如果换用其他类型图像(如红外图像)也能得到很好的效果,显示这种方法具有很好的自适应性.

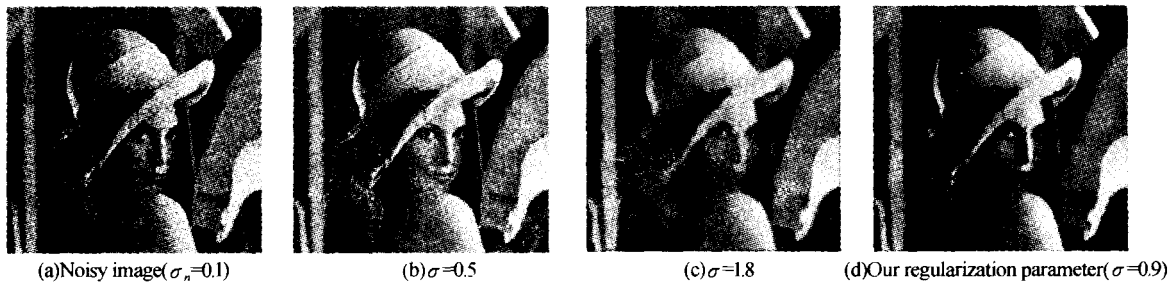


图 3 采用不同正则化参数的各向异性扩散

Fig. 3 Anisotropic diffusion with different regularization parameter

6 结论

本文研究了各向异性扩散方程中的正则化参数的选取方法. 首先,根据分片平滑模型,提出了一种图像噪声估计方法,然后研究了图像局部方差与噪声的关系,给出了一个局部高斯尺度的修正公式. 为了简化计算,本文选取其中一个高斯尺度作为正则化参数,从而使正则化参数能随图像的噪声自适应调整. 对于给定的正则化参数,研究了高斯模板尺度的选取问题. 这种正则化参数选取方法虽然在估计噪声有一定的运算量,但与人为事先给定正则化参数的方法相比有很大的适应性. 实验结果显示,

采用这种方法确定的正则化参数能保证各向异性扩散方程在不同噪声下具有良好的性能.

参考文献

- 1 Perona P, Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Trans Pattern Anal Machine Intell*, 1990, 12(7): 629~639
- 2 Yu L Y, Kaveh M, Wen Y X, et al. Analysis and design of anisotropic diffusion for image processing. *Proc IEEE Int Conf Image Processing*, 1994, 2: 497~501
- 3 Deng G, Cahill L W. An adaptive gaussian filter for noise reduction and edge detection. Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference. *IEEE Conference Record*, 1994, 3: 1615~1619

- 4 Weeratunga S, Kamath C. Comparison of PDE-based non-linear anisotropic diffusion techniques for image denoising. *Proc of SPIE*, 2003, **5014**:201~212
- 5 Black M, Sapiro G, Marimont D, et al. Robust anisotropic diffusion. *IEEE Trans Image Processing*, 1998, **17**(3): 421~431
- 6 尹平, 王润生. 自适应多尺度边缘检测. 软件学报, 2000, **11**(8):990~994
Yin P, Wang R S. *Journal of Software*, 2000, **11**(8):990~994
- 7 曾三友, 康立山, 丁立新, 等. 一种基于正则化方法的准最佳图像复原技术. 软件学报, 2003, **14**(3):689~696
Zeng S Y, Kang L S, Ding L X, et al. *Journal of Software*, 2003, **14**(3):689~696
- 8 尚晓清, 王军锋, 宋国乡. 基于 Bayesian 估计和 Wiener 滤波的阈值去噪方法. 光子学报, 2003, **32**(7):889~891
Shang X Q, Wang J F, Song G X. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(7):889~891
- 9 赵健, 杨川, 俞卞章. 多重分形分析图像边缘提取算法. 光子学报, 2003, **32**(1):61~64
Zhao J, Yang C, Yu B Z. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(1):61~64
- 10 文玉梅, 李平, 朱俊. 用多项式近似逆滤波函数实现场曲修正. 光子学报, 2003, **32**(6):745~748
Wen Y M, Li P, Zhu J. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(6):745~748

Selection of Regularization Parameter for Anisotropic Diffusion Filtering

Wang Huaiye, Zhang Ke, Li Yanjun

College of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072

Received date: 2004-07-09

Abstract The selection of regularization parameter for anisotropic diffusion in image processing is discussed. An approach of noise estimation based piecewise constant image model is proposed. In this approach, image noise is estimated by minimal variance of region in image. And then the relation between regularization parameter and image noise is analyzed. A modified formula between regularization parameter and image noise is suggested. According to this formula, regularization parameter is adapted to image noise. Finally, the rule to select size of gauss mask to regularization parameter is given. Result shows that anisotropic diffusion have good adaptability to image noise with the selection of regularization parameter.

Keywords Anisotropic diffusion; Piecewise constant model; Regularization parameter; Noise estimation



Wang Huaiye was born in 1973 in Jiangxi Province, China. He received B. S. degree M. S. degree form Northwestern ploythcnolgy University, China, in 1998 and 2001, respectively. Now he is a Ph. D. candidate in the College of Astronautics, Northwestern Ploythcnolgy University. His research interests include computer vision and anisotropic diffusion in image processing.