

联合分数变换相关器的分数相关特性分析

宋小杉 赵建林* 袁文成 吴长江

(西北工业大学理学院光信息科学与技术研究所, 西安 710072)

摘 要 从分数傅里叶变换(FRFT)的定义出发,理论分析了联合分数变换相关器(JFRTC)的分数相关特性. 从所得 JFRTC 的数学表达式中可以看出,将 FRFT 应用到联合变换相关器(JTC)中得到的 JFRTC 具有与传统 JTC 不同的性质. 对于传统 JTC,一旦输入平面上参考图像与目标图像之间的距离给定,相关输出峰的位置即确定,而 JFRTC 的相关输出峰的位置则可以由分数级次 p_1 和 p_2 来自由调节,这个特性在实际模式识别中非常有用. 另一方面,JFRTC 的相关输出峰值在大多数情况下低于传统 JTC 的相关峰值,却是 JFRTC 的一大缺点. 最后,从 FRFT 的比例性质出发,给出了 FRFT 谱畸变不变的实现条件,并由此预言了 JFRTC 畸变不变模式识别的功能.

关键词 分数傅里叶变换(FRFT);联合变换相关器(JTC);联合分数变换相关器(JFRTC);分数相关;畸变不变模式识别

中图分类号 O438.2 **文献标识码** A

0 引言

分数傅里叶变换(FRFT)的数学定义由 Namias^[1]在 20 世纪 80 年代初首先提出,随后 Mcbride 和 Kerr^[2]等人给出了更为严格的数学定义. 20 世纪 90 年代初 Mendlovic 和 Ozaktas 把分数傅里叶变换引入光学信息处理领域,给出了基于渐变折射率介质的光学分数傅里叶变换定义和光学系统实现结构^[3,4]. 同时 Lohmann 利用 Wigner 相空间旋转的概念给出了积分形式的光学分数傅里叶变换定义,并且给出了实现分数傅里叶变换的两个光学结构^[5]. 1995 年, Mendlovic、Ozaktas 和 Lohmann 等人将 FRFT 的概念应用到 Vander Lugt 相关器(VLC)中,提出了分数相关的定义,推导了分数 VLC 的优化条件,并给出了可能的实现结构和相应的数值模拟结果^[6]. 此后,人们对分数 VLC 进行了广泛的研究^[7~10]并取得了有意义的结果. 然而 VLC 有一个致命的缺点就是要求精确对准,对于平移可变的分数傅里叶变换,这一点更难做到. 与 VLC 不同,联合变换相关器(JTC)却无此问题. 因此,人们开始将 FRFT 的概念应用到 JTC 中,提出了联合分数变换相关器(JFRTC)^[11,12]. 在文献[11]中所提出的 JFRTC 中,参考图像位于输入平面的中心,并且目标图像受到了相位掩模板的相位调制. 理论推导和模拟实验结果表明,在该 JFRTC 中,调节输入平面上相位掩模板的大小可以改变两相关输出峰之间的距离. 文献[12]指出,由于 FRFT 有平移可变性,所以不能应用到普通的 JTC 中. 于是

给出了一种特殊的 JFRTC 光路. 其中,参考图像和目标图像分别位于两个平面,通过两支光路分别对其作 FRFT,所得两个分数傅里叶变换复振幅再经平方率转换器相叠加得到联合变换功率谱. 本文将通过理论推导和模拟实验,证明 FRFT 运用到一般 JTC 中是可行的,并且两输出相关峰之间的距离的可调节性是 JFRTC 本身具有的性质,是由 FRFT 的平移可变性引起的,并非输入平面相位调制的结果. 其次,从 FRFT 的比例性质出发,给出 FRFT 的分数谱畸变不变的实现条件,并由此预言 JFRTC 畸变不变模式识别的功能.

1 理论分析

1.1 FRFT 的定义和性质

一维函数的 FRFT 的积分定义式为

$$F^p\{g(x_0)\} = C_p \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[j \frac{x_0^2 + x_1^2}{2 \tan \alpha} - j \frac{x_0 x_1}{\sin \alpha} \right] g(x_0) dx_0 \quad (|\alpha| \leq \pi) \quad (1)$$

式中, C_p 为常数, $\alpha = \pi p/2$, p 为 FRFT 的级次,取值范围为 $[-2, 2]$. 通常称 $F^p\{g(x_0)\}$ 为输入信号 $g(x_0)$ 的分数傅里叶谱. 可以看出,当 $p = \pm 1$ 时 FRFT 将变为传统的傅里叶变换. 另外,由于 $p = 0$ 和 2 (即 $\alpha = 0$ 和 π) 时式(1)没有意义,所以又定义

$$F^0\{g(x_0)\} = g(x_0), F^2\{g(x_0)\} = g(-x_0) \quad (2)$$

与传统的傅里叶变换不同,FRFT 具有平移可变性,即

$$F^p\{g(x_0 + a)\} = \exp [j a \sin \alpha (x_1 + \frac{a}{2} \cos \alpha)] \cdot F^p\{g(x_0)\}(x_1 + a \cos \alpha) \quad (3)$$

式中表明,函数在空域中的平移可同时引起其频谱在频域中平移和相移,反过来空域中的相移也可同

* Tel: 029-88495724 Email: jlzha@nwpu.edu.cn
收稿日期: 2004-07-09

时引起频域中的相移和平移,即

$$F^p \{ e^{jbx_0} g(x_0) \} = \exp [j b \cos \alpha (x_1 - \frac{b}{2} \sin \alpha)] \cdot F^p \{ g(x_0) \} (x_1 - b \sin \alpha) \quad (4)$$

其次,输入信号的尺度发生变化时,FRFT 不仅会引起分数傅里叶变换谱尺度的变化,而且会使分数级次发生变化

$$F^p \{ g(cx_0) \} = \sqrt{\frac{1-ic \cot \alpha}{c^2-ic \cot \alpha}} \exp [j \frac{x_1^2}{2} \cot \alpha (1 - \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha})] F^{p'} \{ g(x_0) \} (x_1 \frac{\sin \beta}{c \sin \alpha}) \quad (5)$$

式中 c 表示输入图像的尺度变换因子, $\beta = p' \pi/2$, 并且有 $\tan \beta = c^2 \tan \alpha$. 这些均与传统的傅里叶变换有着明显的区别.

1.2 JFRTC 的理论原理

以 Lohmann 的单透镜结构^[5]为基础可以构造出一个典型的 JFRTC,原理光路如图 1. 设目标图像和参考图像分别位于输入平面上 $(-b, 0)$ 和 $(b, 0)$ 处,其复振幅透射系数分别表示为 $f(x_0 - b, y_0)$ 和

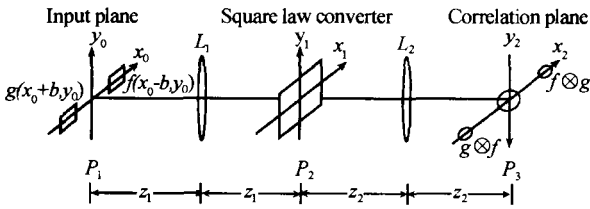


图 1 JFRTC 的原理光路结构
Fig. 1 Schematic architecture of the JFRTC

$g(x_0 + b, y_0)$.

在单位振幅的平面相干光波照射下,输入平面上的透射光场复振幅分布可表示为

$$u(x_0, y_0) = f(x_0 - b, y_0) + g(x_0 + b, y_0) \quad (6)$$

由 FRFT 的平移可变性可得到 $x_1 y_1$ 平面上的 FRFT 复振幅分布为

$$F^{p_1} \{ u(x_0, y_0) \} = \exp [-j b \sin \alpha_1 (x_1 - \frac{b}{2} \cos \alpha_1)] F^{p_1} \{ f(x_0, y_0) \} (x_1 - b \cos \alpha_1, y_1) + \exp [j b \sin \alpha_1 (x_1 + \frac{b}{2} \cos \alpha_1)] F^{p_1} \{ g(x_0, y_0) \} (x_1 + b \cos \alpha_1, y_1) \quad (7)$$

该复振幅分布经平方律转换器转换成联合分数傅里叶变换功率谱分布

$$I(x_1, y_1) = |f_1(x_1 - b \cos \alpha_1, y_1)|^2 + |g_1(x_1 + b \cos \alpha_1, y_1)|^2 + \exp(-j2bx_1 \sin \alpha_1) F^{p_1} \{ f(x_0, y_0) \} (x_1 - b \cos \alpha_1, y_1) \times F^{p_1^*} \{ g(x_0, y_0) \} (x_1 + b \cos \alpha_1, y_1) + \exp(j2bx_1 \sin \alpha_1) F^{p_1^*} \{ f(x_0, y_0) \} (x_1 - b \cos \alpha_1, y_1) \times F^{p_1} \{ g(x_0, y_0) \} (x_1 + b \cos \alpha_1, y_1) \quad (8)$$

要得到联合分数变换相关输出,需要对式(8)再作一次 FRFT. 但是,如果直接由式(8)出发,推导过程将太复杂以至几乎不可能得到结果. 因此,在作第二次分数傅里叶变换以前,必须对式(8)简化. 考虑到式(8)中第一、二项为零级项,第三、四项是相关项并且互为共轭,故只需分析第三项. 将式(8)中的第三项单独列出,得

$$\begin{aligned} & \exp(-j2bx_1 \sin \alpha_1) F^{p_1} \{ f(x_0, y_0) \} (x_1 - b \cos \alpha_1, y_1) F^{p_1^*} \{ g(x_0, y_0) \} (x_1 + b \cos \alpha_1, y_1) = \\ & \exp(-j2bx_1 \sin \alpha_1) \iint_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_0) g^*(x'_0, y'_0) \exp \{ j [\frac{x_0^2 + (x_1 - b \cos \alpha_1)^2}{2 \tan \alpha_1} - \frac{x_0'^2 + (x_1 + b \cos \alpha_1)^2}{2 \tan \alpha_1}] \} \cdot \\ & \exp \{ -j [\frac{x_0(x_1 - b \cos \alpha_1)}{\sin \alpha_1} - \frac{x'_0(x_1 + b \cos \alpha_1)}{\sin \alpha_1}] \} dx_0 dx'_0 dy_0 dy'_0 = \exp(-j2bx_1 \sin \alpha_1) \exp(-j2b \frac{\cos \alpha_1}{\tan \alpha_1} x_1) \cdot \\ & \iint_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_0) \exp(jb \frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} x_0) g^*(x'_0, y'_0) \exp(jb \frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} x'_0) \exp [j (\frac{x_0^2 + x_1^2}{2 \tan \alpha_1} - \frac{x_0 x_1}{\sin \alpha_1})] \exp [j (\frac{x_0'^2 + x_1^2}{2 \tan \alpha_1} - \frac{x'_0 x_1}{\sin \alpha_1})] \cdot \\ & dx_0 dx'_0 dy_0 dy'_0 = \exp(-j2b \frac{1}{\sin \alpha_1} x_1) F^{p_1} \{ f(x_0, y_0) \} \exp(jbx_0 \cot \alpha_1) (x_1, y_1) F^{p_1^*} \{ g(x'_0, y'_0) \} \cdot \\ & \exp(-jbx'_0 \cot \alpha_1) (x_1, y_1) = \exp(-j2b \frac{1}{\sin \alpha_1} x_1) F^{p_1} \{ f'(x_0, y_0) \} (x_1, y_1) F^{p_1^*} \{ g'(x_0, y_0) \} (x_1, y_1) \quad (9) \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} f'(x_0, y_0) &= f(x_0, y_0) \exp(jbx_0 \cot \alpha_1), \\ g'(x_0, y_0) &= g(x_0, y_0) \exp(-jbx_0 \cot \alpha_1) \quad (10) \end{aligned}$$

相对于式(8),为简化推导过程,式(9)消去了分数谱平面上的平移项. 对式(9)作一次分数级次为 p_2 的 FRFT,得到联合分数变换相关输出为

$$F^{p_2} \{ \exp(-j2b \frac{1}{\sin \alpha_1} x_1) F^{p_1} \{ f'(x_0, y_0) \} \cdot$$

$$(x_1, y_1) F^{p_1^*} \{ g'(x_0, y_0) (x_1, y_1) \} \} = \exp [-j2b \frac{1}{\sin \alpha_1} (x_2 + b \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} \cos \alpha_2)] C_{p_1, p_2} (x_2 + 2b \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}, y_2) \quad (11)$$

式(11)的推导中用到了式(4),且取

$$C_{p_1, p_2} (x_2, y_2) = F^{p_2} \{ F^{p_1} \{ f'(x_0, y_0) \} (x_1, y_1) F^{p_1^*} \{ g'(x_0, y_0) \} (x_1, y_1) \} \quad (12)$$

表示 $f'(x_0, y_0)$ 与 $g'(x_0, y_0)$ 的分数互相关函数.

1.3 讨论

由定义可知分数级次 p 的取值范围为 $[-2, 2]$. 但考虑到 FRFT 结构的周期性, 为简化讨论, 级次 p_1, p_2 的调节范围一般取 $[-1, 1]$ 即可.

1) 由式(2)中对 $p=0$ 时 FRFT 的定义可得到如下结论: 在 JFRTC 中, ① $p_1=0$ 且 $p_2 \neq 0$ 时, $x_2 y_2$ 平面上输出的是输入图像的级次为 p_2 的联合分数傅里叶变换频谱; ② $p_1 \neq 0$ 且 $p_2=0$ 时, 在 $x_2 y_2$ 平面输出的是输入图像的级次为 p_1 的联合分数傅里叶变换频谱; ③ $p_1=0$ 且 $p_2=0$ 时, 在 $x_2 y_2$ 平面输出的是输入图像本身.

2) 当级次 p_1 和 p_2 在 $[-1, 1]$ 之间变化时, 式(11)中 $\sin \alpha_2 / \sin \alpha_1$ 有可能小于零, 这时互相关函数 $C_{p_1, p_2}[x_2 + 2b \sin \alpha_2 / \sin \alpha_1, y_2]$ 将变为 $C_{p_1, p_2}[x_2 - 2b(-\sin \alpha_2 / \sin \alpha_1), y_2]$, 互相关峰由原点的左侧移到了右侧, 由于 JFRTC 的相关输出峰分布关于原点对称, 另一互相关峰必然相应地从原点的右侧移到左侧, 可见 $\sin \alpha_2 / \sin \alpha_1$ 的正负仅仅造成了输出平面上坐标轴方向的翻转, 并不影响相关输出峰的分布. 由此得出, 当常数 b 确定时, JFRTC 的相关输出峰的分布只与级次 p_1 和 p_2 的绝对值有关, 所以, 下面对式(10)、(11)和(12)的讨论中, 只考虑 p_1 和 p_2 在区间 $[0, 1]$ 中的取值.

3) 当 p_1 和 p_2 在区间 $[0, 1]$ 中取值时, 由式(11)可得 JFRTC 的相关输出峰到原点的距离为

$$D = 2b \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} \quad (13)$$

由式(13)可以看出, JFRTC 相关峰的位置可以由两次 FRFT 的级次 p_1 和 p_2 来调节. 距离 D 的大小随着 p_1 的减小而增大, 随着 p_2 的减小而减小. $p_1 = p_2$ 或 $p_1 + p_2 = 2$ 时, $\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2$, 这时距离 D 的大小为 $2b$, 与传统 JTC 的相关峰位置相同.

4) 由式(12)和(10)可以看出, JFRTC 的相关输出并非两个原始输入图像 $f(x_0, y_0)$ 和 $g(x_0, y_0)$ 之间的相关, 而是对其作相位调制后的图像 $f'(x_0, y_0)$ 和 $g'(x_0, y_0)$ 之间的相关. 因此, 相关输出峰值的大小必然会受到调制相位的影响, 从而使 JFRTC 的相关输出峰值在大多数情况下低于传统 JTC 的相关输出峰值. 其次, 由式(10)还可以看出, 调制相位受输入平面上两图像之间的距离 b 和第一次 FRFT 的级次 p_1 控制. 所以当 b 恒定时, 相关峰值的大小会随着级次 p_1 的变化而变化. 值得注意的是, 当 $p_1=1$ 时, $f'(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$, $g'(x_0, y_0) = g(x_0, y_0)$, 这时的相关输出是两个没有受到

相位调制的原始图像之间的分数相关, 这样一方面会使 JFRTC 的相关输出峰值比 $p_1 < 1$ 时的相关输出峰值大; 而另一方面, 由式(13)可知距离 D 变为 $2b \sin \alpha_2$, 其最大值不超过 $2b$ (即传统 JTC 的相关输出峰距原点的距离), 这使得分数级次对分数相关峰位置的调节范围大大缩小.

5) 由以上讨论可以将传统 JTC 和 JFRTC 的不同性质作以比较: ① 对于传统 JTC, 一旦输入平面上两图像之间的距离 b 给定, 相关输出峰的位置也即确定, 而 JFRTC 的相关输出峰的位置则可以由分数级次 p_1 和 p_2 来自由调节; ② $p_1 < p_2$ 时, JFRTC 相关输出峰距原点的距离大于传统 JTC, 但相关输出峰值小于传统 JTC; ③ $p_1 = 1$ 时, JFRTC 相关输出峰距原点的距离小于等于传统 JTC, 但相关输出峰值会有明显的提高; ④ $p_1 > p_2$ 且 $p_1 \neq 1$ 时 JFRTC 相关输出峰距原点的距离小于传统 JTC, 而且相关输出峰值小于传统 JTC.

6) 由式(5)给出的 FRFT 的比例性质可以看出, 当输入图像的尺度变为原尺度的 c 倍时, 对输入图像作级次为 p 的 FRFT, 相当于给原图像作级次为 p' 的 FRFT, 而且变换后的分数谱尺度大小受 p 和 p' 的控制. 当 p 和 p' 的取值使得

$$\frac{\sin \beta}{c \sin \alpha} = 1 \quad (14)$$

成立时, 由输入图像比例畸变而引起的分数谱的比例畸变就会消失. 另外, 式(5)给出了 p 和 p' 之间必须满足的关系为

$$\tan \beta = c^2 \tan \alpha \quad (15)$$

可见, 只要把式(14)和(15)联立起来, 求得适当的 p 和 p' 值, 然后对比例畸变后的输入图像作级次为 p 的 FRFT, 就可以实现级次为 p' 的分数谱的尺度畸变不变.

由此可以认为, 在 JFRTC 中, 只要选择合适的分数级次, 就可以实现比例畸变不变的模式识别.

2 模拟实验

模拟实验的光路与图 1 相同, 结果如图 2. 其中图 2(a)为模拟实验的输入图像, 目标图像和参考图像为两个完全相同的飞机的灰度图像, 大小均为 64×128 像素, 两幅图片中心之间距离为 99 像素; 图 2(b)为传统 JTC 的相关输出, 其相关峰距原点距离 $D=99$ 像素; 图 2(c)、2(d)、2(e)和 2(f)分别为四种不同情况下 JFRTC 的相关输出.

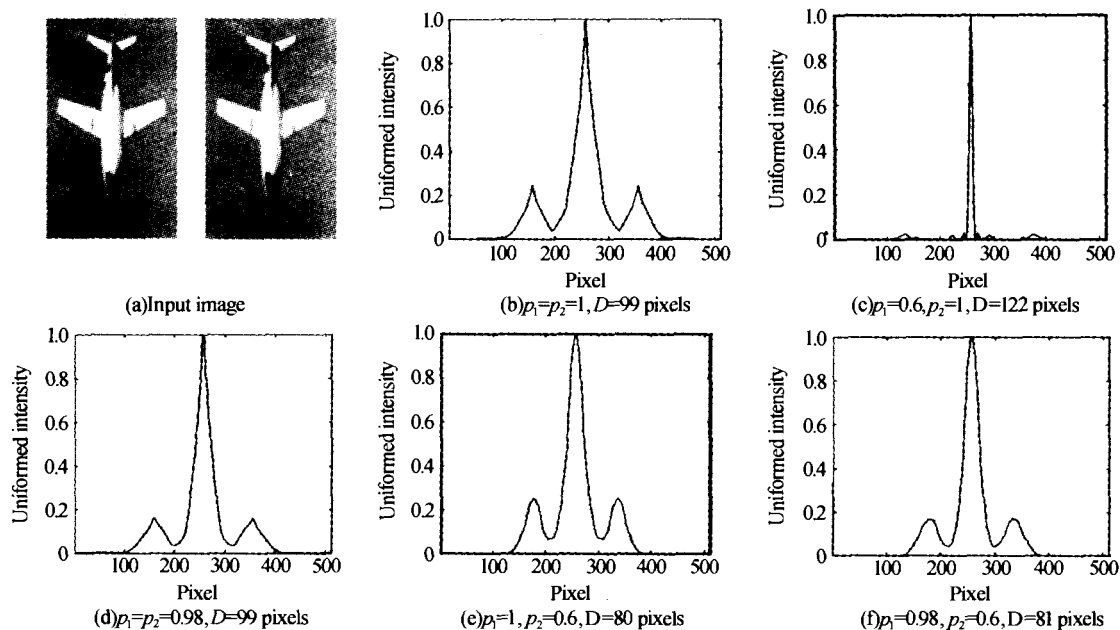


图2 联合分数相关器的模拟实验结果

Fig. 2 The simulated experiment results of the JFRTC

可以看出,图 2(c)中两相关峰之间的距离明显增大,且峰的半宽度明显减小,但峰的高度降低了;图 2(e)中相关峰的高度较图 2(c)有明显提高,且半宽度的有所减小,但两相关峰之间的距离减小了;当两次分数级次相等时,相关峰间距与传统联合变换相关器相同.以上结果与理论分析完全吻合.

3 结论

FRFT 是傅里叶变换在分数级次上的延伸,傅里叶变换可以看作是 FRFT 在分数级次等于 1 时的特殊情况.将 FRFT 应用到 JTC 中得到的 JFRTC 将具有不同于传统 JTC 的性质.相对于传统 JTC,JFRTC 可以通过调节分数级次来灵活地调节相关输出峰的分布,这一特性使得 JFRTC 在实际的模式识别中不会受到输入输出平面尺寸的限制,这样不但节省了模式识别系统的空间,而且降低了系统的成本;其次,通过选择合适的分数级次,JFRTC 还有可能实现比例畸变不变的模式识别.然而,模拟实验结果也表明,JFRTC 的相关输出峰的高度总是低于传统 JTC,这使得 JFRTC 识别灵敏度相对有所降低.为此,需要对输入图像或者其联合变换频谱引入一些非线性处理手段,以提高 JFRTC 的相关输出峰值.鉴于篇幅问题,有关非线性处理方法以及对 JFRTC 畸变不变识别特性的详细研究结果将另文报道.

参考文献

1 Namias V. The fractional order fourier transform and its application in quantum mechanics. *J Inst Math Appl*, 1980, **25**(1):241~265

2 McBride A C, Kerr F H. On namias' s fractional fourier transform. *J Appl Math*, 1987, **39**(2):159~172

3 Mendlovic D, Ozaktas H M. Fractional fourier transform and their optical implementation (i). *J Opt Sc Am A*, 1993, **10**(9):1875~1881

4 Ozaktas H M, Mendlovic D. Fractional fourier transform. and their optical implementation (ii). *J Opt Sc Am A*, 1993, **10**(12):2522~2531

5 Lohmann A W, Image Rotation, Wigner Rotation. Fractional fourier transform. *J Opt Sc Am A*, 1993, **10**(10):2181~2186

6 Mendlovic D, Ozaktas H M, Lohmann A W. *Fraction correlation*, Appl Opt, 1995, **34**(2):303~309

7 Menklovic D, Bitran Y, Dorsch R G. Optical fractional correlation: experimental results. *J Opt Sc Am A*, 1995, **12**(8):1665~1670

8 Lohmann A W, Zalevsky Z, Mendlovic D. Synthesis of pattern recognition filters for fractional fourier processing. *Opt Comm*, 1996, **128**(4-6):119~204

9 Bitran Y, Zalevsky Z, Mendlovic D, et al. Fractional correlation operation: performance analysis. *Appl Opt*, 1996, **35**(2):297~303

10 Zalevsky Z, Mendlovic D, Caufield J H. Fractional correlator with real-time control of the space-invariance property. *Appl Opt*, 1997, **36**(11):2370~2375

11 Kou C J, Luo Y. Generalized joint fractional fourier transform correlators: a compact approach. *Appl Opt*, 1998, **37**(35):8270~8276

12 Jin S L, Bae Y S, Lee S Y. Fractional correlation based on nonconventional joint transform correlator. *Proc of SPIE*, 2002, **4789**:177~185

Fractional Correlation Properties of the Joint Fractional Fourier Transform Correlator

Song Xiaoshan, Zhao Jianlin, Yuan Wencheng, Wu Changjiang

Institute of Optical Information Science and Technology, School of Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072

Received date: 2004-07-09

Abstract The mathematical expressions of the joint fractional Fourier transform correlator (JFRTC) are demonstrated, according to which, the properties of the JFRTC are discussed. It is shown that the properties of a JFRTC are different from that of a conventional JTC. In a conventional JTC, the distance between the two desired correlation signals at the output plane is fixed and is depended on the distance between the target and the reference images. However, by shifting the fractional orders, the distance between the two desired correlation signals at the output plane of a JFRTC can be changed larger or smaller than that of a conventional JTC. Besides, when the fractional order is shifted appropriately, the distortion of the fractional spectrum derived from the dimension distortion of the target image can be offset. Thus the JFRTC is predicted having the capability of distortion-invariant pattern recognition. On the other hand, the intensity of the desired correlation signals at the output plane of a JFRTC is always lower than that of a conventional JTC.

Keywords Fractional Fourier transform (FRFT); Joint Fourier transform correlator (JTC); Fractional correlation; Joint fractional Fourier transform correlator (JFRTC); Distortion-invariant pattern recognition



Song Xiaoshan was born on Oct. 1, 1980, in Shaanxi Province, P. R. China. He received his B. S. degree from the Northwestern Polytechnical University in 2002. Now he is pursuing his M. S. degree in Institute of Optical Information Science and Technology of Northwestern Polytechnical University. His main research field is optical pattern recognition.