

基于厄米-高斯光束的单光子捕获理论研究

张光宇^{1,2} 马 晶¹ 谭立英¹

(1 哈尔滨工业大学可调谐激光技术国家重点实验室, 哈尔滨 150001)

(2 哈尔滨理工大学应用科学学院, 哈尔滨 150080)

摘 要 从光波电磁场方程的 TEM₁₀ 和 TEM₀₁ 模厄米-高斯光束出发, 推导了自由空间量子密钥分配的单光子捕获概率表达式. 针对低轨卫星-地面站间激光链路, 进行了单光子捕获分析. 理论研究表明, 对于低轨卫星-地面站间量子密钥分配, 采用 TEM₁₀ 和 TEM₀₁ 模厄米-高斯型高度衰减激光脉冲作为单光子源是可行的.

关键词 量子密钥分配; 单光子捕获概率; 厄米-高斯光束

中图分类号 TN929.13

文献标识码 A

0 引言

量子密码术, 确切地说是量子密钥分配, 采用单光子通信技术, 通信双方通过量子信道和经典信道分配密钥. 其绝对安全性由量子力学的基本原理来保证. 自由空间量子密钥分配研究得到了学术界的高度重视. 第一个自由空间量子密钥分配实验由 Bennett 等人^[1]完成. 目前, 地面点对点大气光路的量子密钥分配实验^[2~6]取得了很大进展, 单光子传输的最远距离达到 23.4 km. 但是, 卫星-地面站和卫星间量子密钥分配实验还没有进行. 在已经进行的地面点对点实验中, 单光子源均采用高度衰减激光脉冲即弱激光脉冲. 单光子捕获技术是自由空间量子密钥分配的关键技术. 为了捕获单光子, 通常采用空域滤波、频域滤波和时域滤波. 空域滤波要求接收机具有较小的接收视场角, 同时对跟瞄精度提出严格限制. 频域滤波可以采用窄带或超窄带滤波. 对于时域滤波, 通常采用前驱波参考脉冲(不载有密钥信息)设置时间窗口的方法^[2,7,8]. 作者基于基模高斯光束, 对自由空间量子密钥分配的单光子捕获理论进行了研究^[9], 理论分析的结果得到了地面点对点实验^[3~6]的证实. 本文基于 TEM₁₀ 和 TEM₀₁ 模厄米-高斯光束, 首先推导了自由空间量子密钥分配的单光子捕获概率表达式, 然后针对低轨卫星-地面站间链路进行了单光子捕获分析.

1 自由空间量子密钥分配单光子捕获概率理论分析

根据量子电动力学, 光波的模式和光子的量子状态在物理概念上是等效的. 属于一种模式的光子具有相同的量子状态; 一种光的模式对应着一种光

子的量子状态; 模式即代表可以相互区分的光子量子状态. 这种等效性主要体现在: 1) 高斯光束与光子的波函数; 2) 归一化光强与光子概率密度; 3) 光的采集效率与单光子捕获概率; 4) 光损耗与单光子损耗概率^[10]. 光具有波粒二象性, 从波动性观点得到光的模式的概念, 从粒子性观点得到光子的量子状态.

光子的波动方程是麦克斯韦方程^[11], 麦克斯韦方程的解就是光子的波函数. 在真空中, 麦克斯韦方程的微分形式为

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中, \mathbf{E} 为电场强度矢量, \mathbf{B} 为磁感应强度矢量, \mathbf{D} 为电位移矢量, \mathbf{H} 为磁场强度矢量.

在标量场假设下, 麦克斯韦方程可简化为亥姆霍兹方程

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0 \quad (2)$$

式中, Ψ 表示电场或磁场.

厄米-高斯光束是亥姆霍兹方程在缓变振幅近似下的一个特解. 在直角坐标系下, 沿 z 轴方向传播的归一化的 TEM _{m} 模厄米-高斯光束的表达式为^[12]

$$\begin{aligned} \Psi_{mn}(x, y, z) &= \frac{1}{\sqrt{2^m m!}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w(z)} \cdot \\ &H_m \left[\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right] H_n \left[\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right] \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \right] \cdot \\ &\exp \left\{ -i \left[k \left(z + \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} \right) - (1 + m + n) \arctan \frac{z}{f} \right] \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

式中, $H_m[\sqrt{2}x/w(z)]$ 和 $H_n[\sqrt{2}y/w(z)]$ 分别为 m 阶和 n 阶厄米多项式, f 为高斯光束的共焦参数, $R(z)$ 为与传播轴线相交于 z 点的高斯光束等相位

面的曲率半径, $w(z)$ 是与传播轴线相交于 z 点的高斯光束等相位面上的光斑半径.

在自由空间量子密钥分配中, 采用厄米-高斯型高度衰减激光脉冲作为单光子源, 考虑光的粒子性. 因为厄米-高斯光束是麦克斯韦方程的解, 所以对应于 TEM_m 模的归一化的光子波函数就是 $\Psi_m(x, y, z)$.

在光束传输横截面上捕获光子时, 只能出现两种情况, 一是捕获到一个光子, 一是什么也没捕获不到. 也就是说, 光子是作为一个最小单位出现的, 这反映了光子的粒子性. 但是在传输横截面上的某一位置, 要想准确地捕获到某一个光子是不可能的, 只能给出光子出现在某一位置的概率.

下面主要对 TEM_{10} 和 TEM_{01} 模进行讨论.

1.1 基于 TEM_{10} 模的单光子捕获概率

当 $m=1, n=0$ 时, $H_0(x)=1, H_1(x)=2x$. 对应于 TEM_{10} 模的归一化的光子波函数为

$$\Psi_{10}(x, y, z) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{x}{w^2(z)} \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}\right] \cdot \exp\left\{-i\left[k\left(z+\frac{x^2+y^2}{2R(z)}\right)-2\arctan\frac{z}{f}\right]\right\} \quad (4)$$

根据玻恩统计诠释, 在传输横截面上光子的概率密度函数为

$$\rho_{10}(x, y, z) = |\Psi_{10}(x, y, z)|^2 = \frac{8}{\pi} \frac{x^2}{w^4(z)} \cdot \exp\left[-\frac{2(x^2+y^2)}{w^2(z)}\right] \quad (5)$$

下面求 $\rho_{10}(x, y, z)$ 在传输横截面上的极值. 当 $x=0$ 时, $\rho_{10}(x, y, z)=0$, 即光子在 $x=0$ (y 轴) 附近出现的概率为零. 再求极大值, 考虑 x 方向, 有 $\partial\rho_{10}/\partial x=0$, 即 $1-2x^2/w^2(z)=0$, 解得 $x=\pm w(z)/\sqrt{2}$; 考虑 y 方向, 有 $\partial\rho_{10}/\partial y=0$, 解得 $y=0$. 因此, 在传输横截面上 $\rho_{10}(x, y, z)$ 在 $(w(z)/\sqrt{2}, 0)$ 和 $(-w(z)/\sqrt{2}, 0)$ 取极大值, 即光子在 $(w(z)/\sqrt{2}, 0)$ 和 $(-w(z)/\sqrt{2}, 0)$ 附近出现的概率最大.

在传输横截面上, 光子被接收机捕获到的概率称为单光子捕获概率, 记为 P_m . 假设接收机位于极大值点 $(w(z)/\sqrt{2}, 0)$ 或 $(-w(z)/\sqrt{2}, 0)$, 由于 $\rho_{10}(x, y, z)$ 在传输横截面上具有轴对称性, 因此在这两个极大值点的单光子捕获概率是相同的, 所以这里只对极大值点 $(w(z)/\sqrt{2}, 0)$ 进行计算. 设接收机天线孔径为 d , 接收机所在的圆域为

$$\left[x-\frac{w(z)}{\sqrt{2}}\right]^2 + y^2 = \frac{d^2}{4} \quad (6)$$

进行坐标变换 $X=x-w(z)/\sqrt{2}, Y=y$, 得

$$\rho_{10}(X, Y, z) = \frac{8}{\pi} \frac{1}{w^4(z)} \left[X+\frac{w(z)}{\sqrt{2}}\right]^2 \cdot$$

$$\exp\left\{-\frac{2}{w^2(z)}\left[\left(X+\frac{w(z)}{\sqrt{2}}\right)^2+Y^2\right]\right\} \quad (7)$$

采用平面极坐标系 $X=r\cos\varphi, Y=r\sin\varphi$, 得

$$\rho_{10}(r, \varphi, z) = \frac{8}{\pi} \frac{1}{w^4(z)} \left[r\cos\varphi+\frac{w(z)}{\sqrt{2}}\right]^2 \cdot$$

$$\exp\left\{-\frac{2}{w^2(z)}\left[\left(r\cos\varphi+\frac{w(z)}{\sqrt{2}}\right)^2+(r\sin\varphi)^2\right]\right\} \quad (8)$$

因此, 基于 TEM_{10} 模的单光子捕获概率为

$$P_{10} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{d}{2}} \rho_{10}(r, \varphi, z) r dr d\varphi = \frac{8}{\pi} \frac{1}{w^4(z)} \cdot$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{d}{2}} \left[r\cos\varphi+\frac{w(z)}{\sqrt{2}}\right]^2 \exp\left\{-\frac{2}{w^2(z)}\left[r^2+\sqrt{2}w(z)r\cos\varphi+\frac{w^2(z)}{2}\right]\right\} r dr d\varphi \quad (9)$$

1.2 基于 TEM_{01} 模的单光子捕获概率

当 $m=0, n=1$ 时, 对应于 TEM_{01} 模的归一化的光子波函数为

$$\Psi_{01}(x, y, z) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{y}{w^2(z)} \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}\right] \cdot \exp\left\{-i\left[k\left(z+\frac{x^2+y^2}{2R(z)}\right)-2\arctan\frac{z}{f}\right]\right\} \quad (10)$$

光子的概率密度函数为

$$\rho_{01}(x, y, z) = |\Psi_{01}(x, y, z)|^2 = \frac{8}{\pi} \frac{y^2}{w^4(z)} \cdot \exp\left[-\frac{2(x^2+y^2)}{w^2(z)}\right] \quad (11)$$

$\rho_{01}(x, y, z)$ 在传输横截面上的极值为: 当 $y=0$ 时, $\rho_{01}(x, y, z)=0$, 即光子在 $y=0$ (x 轴) 附近出现的概率为零; $\rho_{01}(x, y, z)$ 在 $(0, w(z)/\sqrt{2})$ 和 $(0, -w(z)/\sqrt{2})$ 取极大值, 即光子在 $(0, w(z)/\sqrt{2})$ 和 $(0, -w(z)/\sqrt{2})$ 附近出现的概率最大.

假设接收机位于极大值点 $(0, w(z)/\sqrt{2})$ 或 $(0, -w(z)/\sqrt{2})$, 由于在两个极大值点的单光子捕获概率相同, 这里只计算点 $(0, w(z)/\sqrt{2})$. 接收机所在的圆域为

$$x^2 + \left[y-\frac{w(z)}{\sqrt{2}}\right]^2 = \frac{d^2}{4} \quad (12)$$

进行两次坐标变换, 即 $X=x, Y=y-w(z)/\sqrt{2}$ 和 $X=r\cos\varphi, Y=r\sin\varphi$, 得基于 TEM_{01} 模的单光子捕获概率为

$$P_{01} = \frac{8}{\pi} \frac{1}{w^4(z)} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{d}{2}} \left[r\sin\varphi+\frac{w(z)}{\sqrt{2}}\right]^2 \cdot$$

$$\exp\left\{-\frac{2}{w^2(z)}\left[r^2+\sqrt{2}w(z)r\sin\varphi+\frac{w^2(z)}{2}\right]\right\} r dr d\varphi \quad (13)$$

2 低轨卫星-地面站间量子密钥分配单光子捕获分析

考虑远场情况,有

$$w(z) \approx \frac{1}{2} z \theta_0 \quad (14)$$

式中, θ_0 为基模高斯光束的远场发散角. 将式(14)分别代入式(5)和式(11),得

$$\rho_{10}(x, y, z) = \frac{128}{\pi} \frac{x^2}{z^4 \theta_0^4} \exp \left[-\frac{8(x^2 + y^2)}{z^2 \theta_0^2} \right] \quad (15)$$

$$\rho_{01}(x, y, z) = \frac{128}{\pi} \frac{y^2}{z^4 \theta_0^4} \exp \left[-\frac{8(x^2 + y^2)}{z^2 \theta_0^2} \right] \quad (16)$$

将式(14)分别代入式(9)和式(13),得

$$P_{10} = \frac{128}{\pi} \frac{1}{z^4 \theta_0^4} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{z}{2\sqrt{2}}} \left[r \cos \varphi + \frac{z \theta_0}{2\sqrt{2}} \right]^2 \cdot \exp \left\{ -\frac{8}{z^2 \theta_0^2} \left[r^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} z \theta_0 r \cos \varphi + \frac{1}{8} z^2 \theta_0^2 \right] \right\} r dr d\varphi \quad (17)$$

$$P_{01} = \frac{128}{\pi} \frac{1}{z^4 \theta_0^4} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{z}{2\sqrt{2}}} \left[r \sin \varphi + \frac{z \theta_0}{2\sqrt{2}} \right]^2 \cdot \exp \left\{ -\frac{8}{z^2 \theta_0^2} \left[r^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} z \theta_0 r \sin \varphi + \frac{1}{8} z^2 \theta_0^2 \right] \right\} r dr d\varphi \quad (18)$$

对于 TEM_{10} 和 TEM_{01} 模,在传输横截面上,原点到概率密度极大值点的距离均为

$$\frac{1}{\sqrt{2}} w(z) \approx \frac{1}{2\sqrt{2}} z \theta_0 \quad (19)$$

假设卫星沿 x 轴或者 y 轴方向运动,运动速度为 v ,卫星从原点运动到极大值点所需时间为 τ ,则

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{w(z)}{v} \approx \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{z \theta_0}{v} \quad (20)$$

对于低轨卫星-地面站间量子密钥分配,假设发射机在地面站,接收机在卫星上.为了捕获单光子,采用前驱波参考脉冲设置一个短的时间窗口,参考脉冲后的 τ 时刻单光子到达,这样可使卫星上接收机以最大概率捕获光子.

图 1 和图 2 为光子在传输横截面上的概率密度

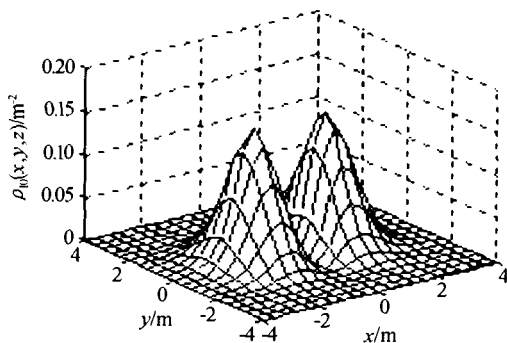


图 1 基于 TEM_{10} 模的光子概率密度分布曲线, $z=700$ km, $\theta_0=5$ μ rad

Fig. 1 The curve of probability density distribution based on TEM_{10} mode with $z=700$ km, $\theta_0=5$ μ rad

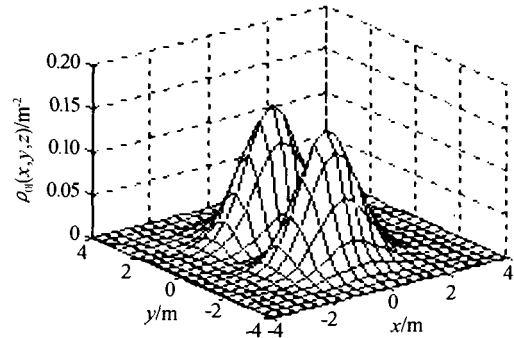


图 2 基于 TEM_{01} 模的光子概率密度分布曲线, $z=700$ km, $\theta_0=5$ μ rad

Fig. 2 The curve of probability density distribution based on TEM_{01} mode with $z=700$ km, $\theta_0=5$ μ rad

分布曲线,分别对应于 TEM_{10} 和 TEM_{01} 模.根据式(19),原点到极大值点的距离约为 $7\sqrt{2}/8$ m.假设卫星运行圆形轨道,轨道高度为 700 km,则卫星运动速度 $v \approx 7.5046 \times 10^3$ m/s.根据式(20),卫星从原点运动到极大值点所需时间 $\tau \approx 0.1649$ ms.因此,为了以最大概率捕获光子,就要求光子在参考脉冲后的 0.1649 ms 到达.

这里的 τ 值是在参数 $z=700$ km, $\theta_0=5$ μ rad 得到的,与文献[2]中的 100 ns 相比高出三个数量级.其优点是降低了计时的难度,有利于实际量子密钥分配系统的实现,但代价是降低了量子密钥比特率.这就需要进行优化分析,选择合适的系统参数.

此外,与基模高斯光束相比,采用 TEM_{10} 和 TEM_{01} 模厄米-高斯光束的优点是,不会由于卫星在 τ 时间内的运动而造成单光子捕获概率的损耗.

3 结论

本文对自由空间量子密钥分配的单光子捕获理论进行了初步研究.基于 TEM_{10} 和 TEM_{01} 模厄米-高斯光束,导出了单光子捕获概率的表达式.针对低轨卫星-地面站间量子密钥分配,采用 TEM_{10} 和 TEM_{01} 模厄米-高斯型高度衰减激光脉冲作为单光子源,单光子捕获采用前驱波参考脉冲设置时间窗口的方法,这样可使卫星上接收机以最大概率捕获光子.本文工作为今后进行低轨卫星-地面站间量子密钥分配实验奠定了一定的理论基础.

参考文献

- Bennett C H, Bessette F, Brassard G, *et al.* Experimental quantum cryptography. *Crypto*, 1992, 5 (1): 3~28
- Hughes R J, Buttler W T, Kwiat P G, *et al.* Free-space quantum cryptography in daylight. *Proc of SPIE*, 2000, 3932: 117~126
- Buttler W T, Hughes R J, Lamoreaux S K, *et al.* Daylight quantum key distribution over 1.6 km. *Phys*

- Rev Lett*, 2000, **84**(24): 5652~5655
- 4 Rarity J G, Gorman P M, Tapster P R. Secure key exchange over a 1.9 km free-space range using quantum cryptography. *Electron Lett*, 2001, **37**(8): 512~514
 - 5 Kurtsiefer C, Zarda P, Halder M, *et al.* Long distance free space quantum cryptography. *Proc of SPIE*, 2002, **4917**: 25~31
 - 6 Hughes R J, Nordholt J E, Derkacs D, *et al.* Practical free-space quantum key distribution over 10 km in daylight and at night. *New Journal of Physics*, 2002, **4**: 43.1~43.14
 - 7 Buttler W T, Hughes R J, Kwiat P G, *et al.* Practical free-space quantum key distribution over 1 km. *Phys Rev Lett*, 1998, **81**(15): 3283~3286
 - 8 Nordholt J E, Hughes R J, Morgan G L, *et al.* Present and future free-space quantum key distribution. *Proc of SPIE*, 2002, **4635**: 116~126
 - 9 Zhang G Y, Ma J, Tan L Y, *et al.* Single-photon acquisition probability for free-space quantum key distribution. *Proc of SPIE*, 2005, **5631**: 173~180
 - 10 Erdmann R. Proposed methods of addressing some rate and range limits in quantum cryptography. *Proc of SPIE*, 2002, **4821**: 486~493
 - 11 曾谨言. 量子力学(卷 I). 北京: 科学出版社, 2000. 65~66
 - 12 周炳琨, 高以智, 陈侗嵘, 等. 激光原理. 北京: 国防工业出版社, 2000. 72~73
- Zeng J Y. Quantum Mechanics (volume I). Beijing: Science Press, 2000. 65~66
- Zhou B K, Gao Y Z, Chen T R, *et al.* Principle of Laser. Beijing: National Defence Industry Press, 2000. 72~73

Theoretical Study of Single-photon Acquisition Based on Hermite-Gaussian Beams

Zhang Guangyu^{1,2}, Ma Jing¹, Tan Liying¹

¹ National Key Laboratory of Tunable Laser Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001

² College of Applied Sciences, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080

Received date: 2004-06-25

Abstract Single-photon acquisition probability is deduced from TEM₁₀ and TEM₀₁ mode Hermite-Gaussian beams of optical electromagnetic field equation. Single-photon acquisition is analyzed for the laser links between a ground station and a satellite in a low earth orbit. The theoretical study shows that it is feasible for quantum key distribution between a ground station and a satellite in a low earth orbit to use highly attenuated laser pulses based on TEM₁₀ and TEM₀₁ mode Hermite-Gaussian beams as single-photon sources.

Keywords Quantum key distribution; Single-photon acquisition probability; Hermite-Gaussian beams



Zhang Guangyu was born on Sep. 25 1971, in Faku, Liaoning Province. He received the B. S. degree in applied physics, and the M. S. degree in material physics and chemistry from Harbin University of Science and Technology in 1995 and 2002. And currently he is working toward the Ph. D. degree in physical-electronics from Harbin Institute of Technology. His research interests are in the area of satellite optical communication and quantum cryptography.