

# 自聚焦透镜的傅里叶变换性质及成像性质\*

郎贤礼 刘德森\*\* 朱少丽 吕 涛

(西南师范大学物理学院, 重庆 400715)

**摘 要** 对自聚焦透镜的二维傅里叶变换性质, 成像性质以及脉冲响应作了系统论述. 并从理论上对自行研制的自聚焦透镜的光斑尺寸进行了计算. 在不考虑像差的情况下, 直径为 1.8 mm 的透镜其出射光斑直径为 1.2 μm, 利用狭缝扫描法进行了实际测量, 测量值为 1.5 μm, 理论值与实验值基本吻合, 从而说明理论分析的合理性.

**关键词** 自聚焦透镜; 傅里叶变换; 脉冲响应; 光斑

**中图分类号** TN253 **文献标识码** A

## 0 引言

自聚焦透镜(Selfoc)已被广泛应用于光纤通信和成像系统<sup>[1]</sup>中, 特别是在光纤通信中, 可作为连接器、耦合器、衰减器、光开关, 波分复用器等多种光无源器件<sup>[2]</sup>. 目前, 对它各方面研究已很深入、广泛, 并已形成了用几何光学、波动光学以及矩阵光学等方法来研究的比较完整的理论体系, 但用傅里叶光学的方法来讨论的文章并不多见. 本文采用傅里叶变换理论, 对自聚焦透镜的光学性质进行了讨论. 从波动光学的观点来看, 透镜的作用就是一个位相变换器, 对自聚焦透镜也可以, 仿照薄透镜的位相变换函数, 得到薄透镜型自聚焦透镜的位相变换函数, 进而推导出自聚焦透镜的脉冲响应, 并可以利用脉冲响应计算出光斑的尺寸. 通过与光斑实际测量值的比较来看, 这种计算值比较接近测量值, 比一般的计算方法准确.

## 1 位相变换函数

在成像光学系统中, 透镜类的几何光学元件既限制了波阵面而又可提取部分入射波进入系统, 还起着变换波面的作用, 为此引入一个复振幅透过率函数, 反映这两方面的性质. 设透镜前后的入射波和透射波分别:  $U_L(x, y), U'_L(x, y)$ , 且认为两者振幅相等, 则透镜的透过率可表为

$$t_L(x, y) = \frac{U'_L(x, y)}{U_L(x, y)} = \exp [j(\varphi_2 - \varphi_1)] \quad (1)$$

( $\varphi_2 - \varphi_1$ ) 为入射波和透射波的位相差.

则  $t_L(x, y)$  称为透过率函数, 也称为位相变换函数.

### 1.1 薄透镜的位相变换函数

薄透镜的位相延迟可写为

$$\phi(x, y) = kn\Delta(x, y) + k[\Delta_0 - \Delta(x, y)] \quad (2)$$

这里  $k$  是常数,  $n$  是透镜的折射率,  $\Delta(x, y)$  是坐标为  $(x, y)$  处透镜的厚度,  $\Delta_0$  是透镜中心最大厚度. 在近轴近似下, 其位相变换可写为<sup>[3]</sup>

$$t_L(x, y) = \exp [jkn\Delta_0] \exp [-j \frac{k}{2f}(x^2 + y^2)] \quad (3)$$

### 1.2 薄透镜型自聚焦透镜的位相变换函数

若一条光线在透镜的平面上坐标为  $(x, y)$  的点射入, 而在相对的另一面上近似相同的坐标射出, 也就是说忽略光线在透镜中的平移, 那么这个透镜的作用只是使入射波前发生延迟, 其大小正比于各点的折射率.

令自聚焦透镜的厚度为  $z$ , 在坐标  $(x, y)$  处的折射率满足<sup>[4]</sup>

$$n(x, y) = n(0) [1 - \frac{1}{2}g^2(x^2 + y^2)] \quad (4)$$

$n(0)$  是自聚焦透镜中心轴处的折射率,  $g$  为自聚焦透镜聚焦常数. 那么波通过透镜发生的位相延迟写为

$$\phi(x, y) = kzn(x, y) \quad (5)$$

$k$  为常数因子,  $n(x, y)$  为点  $(x, y)$  的折射率分布.

将式(5)代入式(1), 得

$$t_L(x, y) = \exp [jkzn(x, y)] \quad (6)$$

把式(4)代入式(6), 得到自聚焦透镜的位相变换函数

$$t_L(x, y) = \exp [jkzn(0)] \cdot \exp [-j \frac{kzn(0)g^2}{2}(x^2 + y^2)] \quad (7)$$

利用自聚焦透镜焦距公式<sup>[5]</sup>

$$f = \frac{1}{n(0)g \cdot \sin(g \cdot z)} \quad (8)$$

当  $g \cdot z$  很小时, 式(8)变为

$$f = \frac{1}{n(0)g^2 z} \quad (9)$$

则式(7)变为

\*重庆市科委(413223)和重庆市计委(413227)资助项目

\*\* Tel: 023-68254607 Email: liuds@swnu.edu.cn

收稿日期: 2004-05-18

$$t_L(x, y) = \exp [jkzn(0)] \cdot \exp \left[ -jk \frac{1}{2f} (x^2 + y^2) \right] \quad (10)$$

式(10)即为薄透镜型自聚焦透镜的位相变换函数.

## 2 自聚焦透镜的二维傅里叶变换性质

### 2.1 薄透镜型自聚焦透镜傅里叶变换性质

薄透镜型的自聚焦透镜是应用最广泛的透镜之一,通常是略小于 1/4 周期,为 0.23 或 0.24 周期.以这种透镜为例,研究它的傅里叶变换性质.考虑常用的一种光路,如图 1,假定用单色光照明,并且只关心后焦面上光场振幅的分布.

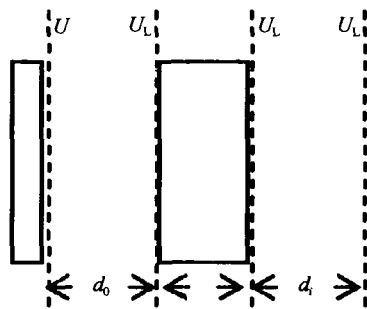


图 1 自聚焦透镜成像几何示意图  
Fig.1 Imaging sketch of GRIN-rod lens

物体放在透镜之前距离为  $d_0$  的地方,由垂直入射的振幅为  $A$  的平面波照明.物体的振幅透过率用  $t_0$  表示.此外令  $F_0(f_x, f_y)$  代表透过物体的光场的傅里叶频谱,而  $F_1(f_x, f_y)$  代表投射到透镜上的光场的傅里叶频谱,即

$$F_0(f_x, f_y) = F\{At_0\} \quad F_1(f_x, f_y) = F\{U_L\} \quad (11)$$

假定菲涅耳近似适用于在距离  $d_0$  传播,那么  $F_0$  和  $F_1$  可以通过菲涅耳衍射的传递函数<sup>[3]</sup>

$$H(f_x, f_y) = \exp(jkz) \exp[-j\pi\lambda d_0(f_x^2 + f_y^2)] \quad (12)$$

联系起来,即

$$F_L(f_x, f_y) = F_0(f_x, f_y) \exp[-j\pi\lambda d_0(f_x^2 + f_y^2)] \quad (13)$$

其中已弃去了一项常数位相延迟因子.透镜后面的振幅分布由式(1)及式(10)得出,即

$$U'_L(x, y) = U_L(x, y) \exp \left[ -jk \frac{1}{2f} (x^2 + y^2) \right] \quad (14)$$

用菲涅耳衍射公式<sup>[3]</sup>

$$U_f(x_f, y_f) = \exp \left[ j \frac{k}{2d_i} (x_f^2 + y_f^2) \right] \iint \{ U'_L(x, y) \cdot \exp \left[ j \frac{k}{2d_i} (x^2 + y^2) \right] \} \exp \left[ -j \frac{2\pi}{\lambda d_i} (x x_f + y y_f) \right] dx dy \quad (15)$$

及式(14)得出透镜后焦面上的场振幅的分布

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{A \exp \left[ j \frac{k}{2d_i} (1 - \frac{d_0}{f}) (x_f^2 + y_f^2) \right]}{j\lambda f} \cdot \iint \{ t_0(x_0, y_0) \exp \left[ -j \frac{2\pi}{\lambda d_i} (x_0 x_f + y_0 y_f) \right] \} dx_0 dy_0 \quad (16)$$

因此,光场在  $(x_f, y_f)$  处的振幅和位相仍和物体的频率为  $(x_f/\lambda f, y_f/\lambda f)$  有关.但在  $d_0 = f$  这一特殊情况下,这一位相因子为零.显然,若物体放在透镜的前焦面上,则位相弯曲消失,而得到准确的傅里叶变换关系.

到现在为止完全忽略了透镜孔径的有限大小所造成的效应.为了把孔径效应考虑进来,事实上绝大多数情况下,透镜的孔径要比物体大得多,并且离透镜的距离足够小,会使物体深深位于透镜孔径的非涅耳区域之内,例如自聚焦透镜作光纤耦合器,就是一个例子.所以这个条件会被满足,所得到的公式就会准确成立.

## 3 自聚焦透镜的成像性质

自聚焦透镜有类似于一般透镜的成像能力,如图 2.为简便起见,考虑单色照明情况下成实像的问题,这实际上意味着系统对于复场振幅是线性的.

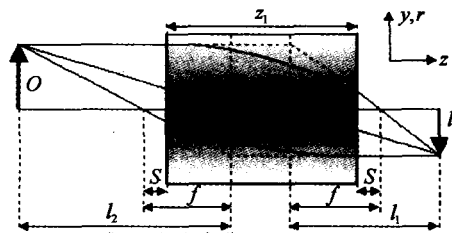


图 2 自聚焦透镜的成像  
Fig.2 Imaging configurations of GRIN-rod lens

### 3.1 自聚焦透镜的脉冲响应

如图 1 所示的几何关系,设一平面物体放在透镜前面距离为  $d_0$  的位置上,并用单色光照明.用  $U_0(x_0, y_0)$  表示紧靠着物体之后的复场.在透镜之后的平面上有一个复场分布,用  $U_i(x_i, y_i)$  表示.  $U_i(x_i, y_i)$  可以合理的称之为物分布  $U_0(x_0, y_0)$  的像.由于波动传播现象是线性的,总可以把场分布  $U_i$  表示成以下迭加积分<sup>[3]</sup>

$$U_i(x_i, y_i) = \iint h(x_i, y_i; x_0, y_0) \cdot U_0(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \quad (17)$$

其中  $h(x_i, y_i; x_0, y_0)$  是置于物坐标  $(x_0, y_0)$  的单位振幅的点源在坐标  $(x_i, y_i)$  处产生的场振幅,称为系统的脉冲响应,它能完备的描述系统的成像性质.

#### 3.1.1 薄透镜型自聚焦透镜的脉冲响应

为了求  $h(x_i, y_i; x_0, y_0)$ ,令物体为  $(x_0, y_0)$  点上的一个  $\delta$  函数(点源),那么投射到透镜上的将是  $(x_0, y_0)$  点发出的一个发散球面波,其傍轴近似为

$$U_L(x, y) = \frac{1}{j\lambda d_0} \exp \left\{ j \frac{k}{2d_0} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \right\} \quad (18)$$

通过透镜后,场分布变为

$$U'_L(x, y) = t_L P(x, y) U_L(x, y) \quad (19)$$

$P(x, y)$  是透镜的光瞳函数, 它在透镜孔径内值为 1, 其它地方为 0. 最后利用菲涅耳方程来描写通过距离  $d_i$  的传播, 得到

$$h(x_i, y_i; x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda d_i} \iint U'_L(x, y) \cdot \exp \left\{ j \frac{k}{2d_i} [(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2] \right\} dx dy \quad (20)$$

其中已弃去了常数位相因子. 合并式(18)、(19)、(20), 得到

$$h(x_i, y_i; x_0, y_0) = \frac{1}{\lambda^2 d_0 d_i} \exp \left[ j \frac{k}{2d_i} (x_i^2 + y_i^2) \right] \cdot \exp \left[ j \frac{k}{2d_0} (x_0^2 + y_0^2) \right] \iint P(x, y) \exp \left[ j \frac{k}{2} \left( \frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_i} - \frac{1}{f} \right) (x^2 + y^2) \right] \exp \left\{ -jk \left[ \left( \frac{x_0}{d_0} + \frac{x_i}{d_i} \right) x + \left( \frac{y_0}{d_0} + \frac{y_i}{d_i} \right) y \right] \right\} dx dy \quad (21)$$

上述脉冲响应函数是一个很庞杂的结果, 最麻烦的是那些含有二次位相因子的项. 注意到有两项是与坐标  $(x, y)$  无关的, 即

$$\exp \left[ j \frac{k}{2d_i} (x_i^2 + y_i^2) \right] \text{ 和 } \exp \left[ j \frac{k}{2d_0} (x_0^2 + y_0^2) \right]$$

这两项仅仅表示在  $x_i, y_i$  和  $x_0, y_0$  平面上的位相弯曲, 可以直接弃去<sup>[3]</sup>.

通过以上简化, 最后得到

$$h(x_i, y_i; x_0, y_0) = \frac{1}{\lambda^2 d_0 d_i} \iint P(x, y) \cdot \exp \left[ j \frac{k}{2} \left( \frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_i} - \frac{1}{f} \right) (x^2 + y^2) \right] \exp \left\{ -jk \left[ \left( \frac{x_0}{d_0} + \frac{x_i}{d_i} \right) x + \left( \frac{y_0}{d_0} + \frac{y_i}{d_i} \right) y \right] \right\} dx dy \quad (22)$$

为了进一步简化, 只限于讨论透镜后面一个特殊的平面, 它和透镜的距离  $d_i$  满足

$$\frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_i} - \frac{1}{f} = 0 \quad (23)$$

这在初等几何光学里称为透镜定律. 对于所讨论的透镜, 这种条件是可以满足的<sup>[6]</sup>. 从几何光学的观点来看, 如果要达到一个和理想情况相近的脉冲响应, 透镜定律是必须满足的, 并定义系统的放大率为

$$M = \frac{d_i}{d_0} \quad (24)$$

最后, 自聚焦透镜的脉冲响应简化为

$$h(x_i, y_i; x_0, y_0) = \frac{1}{\lambda^2 d_0 d_i} \iint P(x, y) \cdot \exp \left\{ -j \frac{2\pi}{\lambda d_i} [(x_i + Mx_0)x + (y_i + My_0)y] \right\} dx dy \quad (25)$$

由此可以看出, 脉冲响应由透镜孔径的夫琅和

费衍射图样给出.

### 3.1.2 任意长度自聚焦透镜的脉冲响应

对于任意长度的自聚焦透镜, 不能利用上述方法, 因为要考虑光线在透镜中的平移. 可用波动光学的方法来处理. 对式(4)折射率分布的介质, 它的传播常数可简化为<sup>[7]</sup>

$$\beta_{mn} = k_0 n(0) - \left(n + \frac{1}{2}\right)g - \left(m + \frac{1}{2}\right)g \quad (26)$$

其中  $k_0 = 2\pi/\lambda$ .

然后利用模式展开法<sup>[8]</sup>来找  $U_i$  与  $U_0$  的关系

$$U(x_i, y_i, z_i) = \frac{j}{\lambda z} \frac{gz}{\sin gz} \exp(-jkz) \cdot \iint U(x_0, y_0, z_0) K(x_i, y_i; x_0, y_0) dx_0 dy_0 \quad (27)$$

其中

$$K(x_i, y_i; x_0, y_0) = \exp \left[ -\frac{j}{2\omega_0^2} \cot gz (x_i^2 + y_i^2 - 2x_i x_0 \sec gz - 2y_i y_0 \sec gz + x_0^2 + y_0^2) \right] \quad (28)$$

由于自聚焦透镜大部分都是圆柱状的, 利用柱坐标处理问题会更方便, 通过坐标系变换, 得到在柱坐标系下的方程

$$U(r_i, \theta_i, z_i) = \frac{j}{\lambda z} \frac{gz}{\sin gz} \exp(-jkz) \iint U(r_0, \theta_0, z_0) K(r_i, \theta_i; r_0, \theta_0) r_0 dr_0 d\theta_0 \quad (29)$$

这里

$$K(r_i, \theta_i; r_0, \theta_0) = \exp \left\{ -\frac{j}{2\omega_0^2} \cot gz [r_i^2 - 2r_i r_0 \cos(\theta_i - \theta_0) \sec(gz) + r_0^2] \right\} \quad (30)$$

其中  $\omega_0^2 = \frac{1}{gk}$ , 方程  $K(x_i, y_i; x_0, y_0)$  以及  $K(r_i, \theta_i; r_0, \theta_0)$  实际就是自聚焦透镜的脉冲响应.

众所周知, 在成像问题中, 传播常数  $\beta_{mn}$  起着很重要的作用, 这个方程的得出也是在认为  $\beta_{mn}$  是模式数  $n$  和角模数  $m$  的线性函数的条件下推出的, 而它的高阶项与像差有关<sup>[9]</sup>, 讨论这个问题已超出本文的范围. 方程可通过把  $U(r_0, \theta_0, z_0)$  用固有振荡模展开<sup>[7,10]</sup>的方法解出.

### 3.1.3 光斑尺寸

光斑尺寸是一个非常重要的参量, 也是评价自聚焦透镜的标准之一. 我们可利用式(29)来比较准确的估计它的光斑尺寸. 考虑一个  $1/4$  周期透镜, 即  $gz = \pi/2$ , 入射光假设为单色平面波, 那么  $U(r_0, \theta_0, z_0)$  简化为

$$U_0(r_0) = \begin{cases} 1 & 0 < r_0 < a \\ 0 & r_0 > a \end{cases} \quad (31)$$

把方程代入, 经过不很复杂的运算, 得到

$$U_2(r_2) = C \frac{a^2}{2} \frac{2J_1[k(0)gr_2 a]}{k(0)gr_2 a} \quad (32)$$

其振幅由中心向边缘平滑的降落,光斑的边缘定义在振幅降落为中心处的  $1/e$ ,得到光斑直径

$$\Delta D = \frac{5.2}{k_0 n(0) g a} = \frac{2.6\lambda}{\pi n(0) g a} \quad (33)$$

通过式(33)可以估算光斑的尺寸.

另外,自聚焦透镜的出射光斑一般来说并不是一个均匀的斑,而是有一定的照度分布,其中央极大值称为爱里斑,也可以用爱里斑的直径来表示出射光斑的大小

$$D = 1.22 \frac{\lambda f}{d} \quad (34)$$

其中是  $\lambda$  光源的波长,  $f$  为自聚焦透镜的焦距,  $d$  是自聚焦透镜的直径.

这种方法只能粗略的估计,并不准确.

### 3.1.4 光斑测试及结果分析

测试仪为自行研制的狭缝扫描光斑测试仪,其原理是利用带狭缝的光探头去扫描自聚焦透镜的出射光斑,光强随探头移动而变化.其中,在中心位置光强最强,当光强降为中心最大值的  $1/e$  时,定义为光斑的边缘,光探头移动的距离利用电感测微仪测出,从而得到光斑的直径.

仪器主要由带狭缝的光探头、光强计、电感测微仪、记录仪以及机电部分组成.图3为仪器的实物图.该仪器优点是结构原理简单,缺点是精度不是很高.

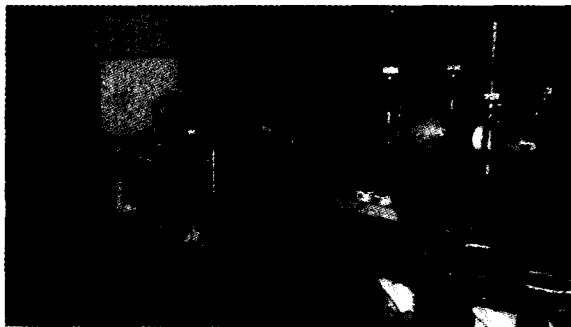


图3 光斑测试装置图

Fig. 3 Apparatus of optical spot measurement

样品是自行研制的铰玻璃自聚焦透镜,中心折射率 1.617,直径 1.80 mm,长度以略小于  $1/4$  周期为宜,本文取的是 0.23 周期,透镜的焦距  $f$  是 1.28 mm.光源为 He-Ne 激光光源,波长 632.8 nm,测量结果见表 1.

表 1 实际测得光斑直径与理论值比较

样品	透镜中心折率 $n(0)$	透镜常数 $g/\text{mm}^{-1}$	透镜半径 $a/\text{mm}$	光源波长 $\lambda/\text{nm}$	理论 $\Delta D/\mu\text{m}$	实际测得光斑直径 $\mu\text{m}$
1	1.617	0.304	0.93	632.8	1.184	1.54
2	1.617	0.309	0.90	632.8	1.203	1.57
3	1.617	0.306	0.92	632.8	1.189	1.55

利用式(34)来计算透镜的爱里斑直径为 0.56  $\mu\text{m}$ .

实验结果来看:用爱里斑直径表示自聚焦透镜的出射光斑时与测量值有很大的差距,而用式(33)计算的光斑大小与虽然较实际测量值偏大,但差别不大.理论值比实际测量值偏大主要原因是,透镜制作过程没有考虑像差、衍射的影响以及仪器本身的测量误差.如果考虑到上述因素,结果还是令人满意的.

## 4 结论

利用对普通透镜傅里叶变换的方法,得出了薄透镜型自聚焦透镜的位相变换函数,进而得出它的脉冲响应,其形式也与一般透镜的傅里叶变换式相同.

对于任意长度的自聚焦透镜,要利用波动光学的方法,通过标量波动方程,以及利用模式展开的方法,求出它的脉冲响应.并利用所得的结论,对光斑尺寸进行了理论上计算,约为 1.2  $\mu\text{m}$ ,并实验测量了自行研制的自聚焦透镜的出射光斑,实际测量光斑尺寸为 1.5  $\mu\text{m}$ ,两者较为接近.

### 参考文献

- 田维坚,姚胜利,陈荣利,等.用于运动目标探测的多通道成像系统.光子学报,2002,31(1):41~49  
Tian W J, Yao S L, Chen R L, et al. *Acta Photonica Sinica*, 2002, 31(1): 41~49
- 刘德森.微小光学和微小光子器件.光子学报,1997,26(Z1):21~23  
Liu D S. *Acta Photonica Sinica*, 1997, 26(Z1): 21~23
- Goodman J W. Introduction to Fourier Optics. McGraw-Hill, 1968. 65~102
- Iga K, Ykokubun H, Oikawa M, et al. Fundamentals of Microoptics. Academic Press, Inc. 1984. 8~9
- 刘德森,高应俊.变折射率介质的物理基础.北京:国防工业出版社,1991. 309~314  
Liu D S, Gao Y J. Physical Fundamentals of GRIN Media. Beijing: National Defense Industry Press, 1991. 309~314
- 刘德森.变折射率光学理论与实践.重庆:西南师范大学出版社,2004  
Liu D S. Fundamentals and Practices of Gradient Index Optics. Chongqing: Southwest China Normal University Press, 2004
- Marcatali E A J, Schmeltzer R A. Hollow metallic and dielectric waveguides for long distance optical transmission and lasers. *Bell Syst Tech J*, 1964, 43(7): 1783~1809
- Iga K, Hata S, Kato Y, et al. Image transmission by an optical system with a lens-like medium. *Jpn J Appl Phys*, 1974, 13(1): 79~86

- 9 Iga K. Theory for gradient-index imaging. *Appl Opt*, 1980, **19**(7):1039~1042
- 10 Suematsu Y, Fukinuki H. Analysis of the idealized light waveguide using Gas lens. *J IECE Jpn*, 1965, **48**(10): 1684~1690

## Imaging and Fourier Transform Properties of GRIN-rod Lens

Lang Xianli, Liu Desen, Zhu Shaoli, Lü Tao

*School of Physics, Southwest China Normal University, Chongqing 400715*

Received date: 2004-05-18

**Abstract** Imaging and Fourier Transforming properties of GRIN-rod Lens are discussed firstly. Then the optical spot of GRIN-rod lens is calculated in theory. Taking no account of aberrations, the optical spot size of the lens whose diameter is 1.80 mm is 1.2  $\mu\text{m}$ . Compare the measurement value which is 1.5  $\mu\text{m}$  with the theoretical one, they are almost identical with each others. It also proves the theoretical analysis is reasoned.

**Keywords** GRIN-rod lens; Fourier transforms; Impulse response; Optical spot



**Lang Xianli** was born on Feb 16, 1979, in Weifang, Shandong Province, China. He graduated from Changwei Teachers College in 2000. He is currently pursuing the M. S. degree in optics at Southwest China Normal University. Now he focuses on microoptics and integrated optics.