

双模相干态和压缩真空态光场-非等同 两原子体系的腔场谱*

张桂明 李悦科 高云峰

(聊城大学教育传播技术学院, 山东 聊城 252059)

摘 要 研究了两个非等同二能级原子与双模腔场相互作用过程的腔场谱. 导出了双模初始光场处于任意量子态时腔场谱的计算公式, 给出了光场处于相干态和压缩真空态时的数值结果, 讨论了相对耦合常数 $R=g_2/g_1$ 和初始场强对腔场谱的影响. 发现相干态光场的腔场谱在 R 很小时为双峰, 在 R 接近于 1 时为 3 峰. 压缩真空态的腔场谱在弱场条件下表现为复杂的多峰结构, 在强场条件下则只有单经典共振峰或裂距很小的双峰.

关键词 腔场谱; 双模光场; 两原子体系

中图分类号 O431.2 **文献标识码** A

0 引言

光谱的研究是人们探索物质结构、获得原子与光场相互作用信息的重要途径. 原子辐射谱和腔场谱各自从不同的侧面反映着原子与光场相互作用的特性, 它已成为量子光学中研究的热点之一, 众多学者已广泛研究了理想腔内原子与辐射场多种相互作用过程的动力学特性^[1~10], 发现了包括真空场拉比劈裂^[11,12]在内的一系列非经典效应, 原子与光场间相互作用的量子特性被逐步揭示出来. 最近, Li 等人^[13]分析了 Jaynes-Cummings 模型(J-C 模型)中原子辐射谱和腔场谱结构的异同, 并首次明确提出了测量腔场谱的方法, 这使腔场谱的研究更具有学术价值和实践意义. 文献[1]研究了两个双能级原子与双模真空腔场具有不同耦合常数($g_1 \neq g_2$)时的自发辐射谱, 讨论了不同的耦合常数对其自发辐射线型的影响. 文献[2]研究了两原子与双模腔场具有相同耦合常数($g_1 = g_2$)的腔场谱, 发现在两模初始场都是光子数态或都是相干态情况下, 改变一模的光强就可以控制另一模的光强和频率. 然而这只是两原子相距很近的特殊情况. 在一般情况下, 由于两个原子所处的位置不同, 它们感受到的场强不同^[3], 因此两个原子(称之为非等同原子)与双模腔场间应具有不同的耦合常数($g_1 \neq g_2$), 其谱结构与耦合常数相同的情况也有较大差异. 另外, 腔场谱与光场初态有关, 不同叠加态对应的谱结构有明显的差异, 可显示出不同的量子化光场的各种特征. 本文将对两个非等同原子与双模叠加态光场相互作

用过程的腔场谱结构进行探讨.

1 模型与理论推导

当两个原子与双模腔场间具有不同耦合常数($g_1 \neq g_2$)时, 在旋波近似条件下, “两原子-双模腔场”系统的哈密顿量为^[1]($\hbar = 1$)

$$H = \omega_1 a_1^\dagger a_1 + \omega_2 a_2^\dagger a_2 + \frac{\omega_a}{2} \sum_{i=1}^2 \sigma_{z,i} + \sum_{i=1}^2 g_i (\sigma_i^+ a_{1,i} + \sigma_i a_{1,i}^\dagger) \quad (1)$$

式中 a_i, a_i^\dagger ($i=1, 2$) 分别为第 i 模腔场光子的湮没和产生算符, $\sigma_i^+, \sigma_i, \sigma_{z,i}$ 分别为第 i 个原子的赝自旋算符, g_i ($i=1, 2$) 是第 i 个原子与双模腔场的耦合常数, ω_i 为模 i 腔场光子的频率, ω_a 为原子跃迁频率. 在共振条件下 $\omega_a = \omega_1 + \omega_2$.

式(1)的本征方程可写为

$$H |\Psi_i^N\rangle = E_i^N |\Psi_i^N\rangle \quad (2)$$

式中的上标 N 表示 (n_1, n_2) . 将 H 的本征函数 $|\Psi_i^N\rangle$ 按两个原子-双模腔场相互作用系统的四个本征基矢 $|\varphi_i^N\rangle$ 展开, 即

$$|\Psi_i^N\rangle = \sum_{j=1}^4 C_{ij}^N |\varphi_j^N\rangle \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} |\varphi_1^N\rangle &= |+, +, n_1, n_2\rangle \\ |\varphi_2^N\rangle &= |+, -, n_1+1, n_2+1\rangle \\ |\varphi_3^N\rangle &= |-, +, n_1+1, n_2+1\rangle \\ |\varphi_4^N\rangle &= |-, -, n_1+2, n_2+2\rangle \end{aligned} \quad (3b)$$

式(3b)右边的四个量子数依次表示第一、第二个原子所处的能级及模 I、模 II 腔场数态光子数. 把式(3a)代入式(2)可得

$$\sum_{j=1}^4 (\langle \varphi_i^N | H | \varphi_j^N \rangle - E_i^N \delta_{ij}) C_{ij}^N = 0 \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (4)$$

由式(4)可求出与式(1)对应的本征能量 E_i^N 和

* 山东省自然科学基金(Y2004A09)资助项目
Tel: 0635-8238061 Email: zhgm@lctu.edu.cn
收稿日期: 2004-05-18

本征函数 C_{ij}^N , 其结果为

$$E_i^N = \omega_1(n_1 + 1) + \omega_2(n_2 + 1) - g_1 \lambda_i^N \quad (5a)$$

$$\lambda_i^N = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} [(1 + R^2)N^2 \pm \sqrt{(1 + R^2)^2 N^4 - 4(1 - R^2)^2 N_1^2 N_2^2}]^{1/2} \quad (5b)$$

式中 λ_i^N 的方括号外当 $i=1, 3(2, 4)$ 取正(负)号, 方括号内当 $i=3, 4(1, 2)$ 取正(负)号. 与式(5)对应的本征函数 C_{ij}^N 为

$$\begin{aligned} C_{11}^N &= -2R\lambda_i^N N_1 / L_i^N \\ C_{12}^N &= [(\lambda_i^N)^2 - N_1^2(1 - R^2)] / L_i^N \\ C_{13}^N &= R[(\lambda_i^N)^2 + (1 - R^2)N_1^2] / L_i^N \\ C_{14}^N &= -\lambda_i^N [(\lambda_i^N)^2 - N_1^2(1 + R^2)] / N_2 L_i^N \end{aligned} \quad (6)$$

在式(5)和式(6)中 $R = g_2 / g_1, i=1, 2, 3, 4$, 以及

$$\begin{aligned} N_1 &= \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} \\ N_2 &= \sqrt{(n_1 + 2)(n_2 + 2)} \\ N^2 &= N_1^2 + N_2^2 \\ L_i^N &= \{4R^2 N_1^2 (\lambda_i^N)^2 + [(\lambda_i^N)^2 - N_1^2(1 - R^2)]^2 + \end{aligned} \quad (7a)$$

$$R^2 [(\lambda_i^N)^2 + N_1^2(1 - R^2)]^2 + \frac{(\lambda_i^N)^2}{N_2^2} [(\lambda_i^N)^2 - N_1^2(1 + R^2)]^2\}^{1/2} \quad (7b)$$

“双模腔场-两原子”系统的腔场谱可按式计算^[14]

$$S_N(\omega) = 2\Gamma \int_0^T dt' \exp[-(\Gamma - i\omega)(T - t')] \int_0^T dt \exp[-(\Gamma + i\omega)(T - t)] \langle \varphi(0) | A^+(t') A(t) | \varphi(0) \rangle \quad (8)$$

其中 Γ 为谱仪带宽(本文的计算中取 $\Gamma = 0.1g_1$), T 为测量时间(本文的计算中取 $T = 40g_1^{-1}$), $A(t) = a_1(t) + a_2(t)$, $|\varphi(0)\rangle$ 为系统的初态. 设初始时刻两原子均处于激发态而两模光场处于任意态, 即取

$$|\varphi(0)\rangle = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} q_{n_1}^{(1)} q_{n_2}^{(2)} |+, +, n_1, n_2\rangle \quad (9)$$

式中 $q_{n_1}^{(1)}, q_{n_2}^{(2)}$ 为两模初始光场的光子分布. 当有一模的初态光场为光子数态或压缩真空态时, 可证明 $\langle \varphi(0) | a_1^+(t') a_2(t) | \varphi(0) \rangle$ 和 $\langle \varphi(0) | a_2^+(t') a_1(t) | \varphi(0) \rangle$ 都等于零, 这时式(8)可化为^[2]

$$S = S_1(\omega) + S_2(\omega) \quad (10)$$

其中

$$S_1(\omega) = 2\Gamma \int_0^T dt' \exp[-(\Gamma - i\omega)(T - t')] \int_0^T dt \exp[-(\Gamma + i\omega)(T - t)] \langle \varphi(0) | a_1^+(t') a_1(t) | \varphi(0) \rangle \quad (11a)$$

$$S_2(\omega) = 2\Gamma \int_0^T dt' \exp[-(\Gamma - i\omega)(T - t')] \int_0^T dt \exp[-(\Gamma + i\omega)(T - t)] \langle \varphi(0) | a_2^+(t') a_2(t) | \varphi(0) \rangle \quad (11b)$$

若初始时刻两模光场均为相干态或任意叠加态, 则 $\langle \varphi(0) | a_1^+(t') a_2(t) | \varphi(0) \rangle$ 和 $\langle \varphi(0) | a_2^+(t') a_1(t) | \varphi(0) \rangle$ 一般不为零. 但可以证明, 只要两模腔场谱 $S_1(\omega)$ 和 $S_2(\omega)$ 的峰不重叠, $\langle \varphi(0) | a_1^+(t') a_2(t) |$

$\varphi(0)\rangle$ 和 $\langle \varphi(0) | a_2^+(t') a_1(t) | \varphi(0)\rangle$ 的积分与 $S_1(\omega) + S_2(\omega)$ 相比都可忽略不计, $S_1(\omega) + S_2(\omega)$ 是系统腔场谱很好的近似^[2](本文中令 $\omega_2 - \omega_1 = 10g_1$, 此时两模腔场谱的峰不重叠).

对式(11a), 经繁琐运算, 可得

$$S_1(\omega) = 2\Gamma \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} (p_{n_1}^{(1)} p_{n_2}^{(1)}) \sum_{r=1}^4 \sum_{k=1}^4 |G_{kr}^{(1)} Z_{kr}^{(1)}|^2 \quad (12a)$$

其中

$$G_{kr}^{(1)} = \sum_{m=1}^4 C_{k1}^N C_{km}^N C_{m1}^N b_m^{n_1} \quad (12b)$$

$$Z_{kr}^{(1)} = \frac{e^{i[\omega - (E_k^N - E_r^{N_1})T]} - e^{-\Gamma T}}{\Gamma + i[\omega - (E_k^N - E_r^{N_1})]} \quad (12c)$$

$$p_{n_1}^{(1)} = |q_{n_1}^{(1)}|^2, p_{n_2}^{(2)} = |q_{n_2}^{(2)}|^2 \quad (12d)$$

$$b_1^{n_1} = \sqrt{n_1}, b_2^{n_1} = b_3^{n_1} = \sqrt{n_1 + 1}, b_4^{n_1} = \sqrt{n_1 + 2} \quad (12e)$$

式中的上标 N 代表 (n_1, n_2) , 上标 N_1 代表 $(n_1 - 1, n_2)$, N_2 代表 $(n_1, n_2 - 1)$.

对于 $S_2(\omega)$ 只须将上述公式中的 n_1 换成 n_2 即可.

2 结果分析

依据式(5)、(6)和式(12)可以计算双模腔场处于任意态时的腔场谱, 本文讨论两模均处于相干态或压缩真空态的情况. 由于计算公式过于复杂, 不宜作解析分析, 我们采用了数值计算的方法, 其结果示于图1~4(本文模 I 为高频场, 在图右侧, 其中心频率在 0 处; 模 II 为低频场, 在图的左侧, 其中心频率在 $-10g_1$ 处).

2.1 两模均处于相干态时的腔场谱

首先讨论两模初始场均为弱场 ($\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 1$) 条件下, 相对耦合常数 R 对腔场谱的影响(图1). 由图可知, 在 $R = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ 时两模均为对称的双峰结构, 但两峰的间距随 R 的增加而减小, 同时在 $R \geq 0.5$ 后出现边带. 在 $R = 1$ 时中间的两峰已合为一体, 形成 3 峰结构. 峰的高度随 R 的增加而缓慢递增, 但 $R \rightarrow 1$ 时增加得较快. 可以看出, 在该情况下相对耦合常数 R 对两模的场强和频率都有影响.

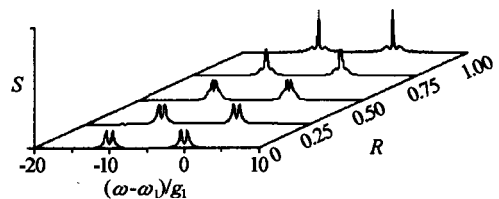


图1 弱场条件下相干态初始场的腔场谱, $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 1, \Gamma = 0.1g_1, T = 40/g_1$

Fig. 1 Cavity field spectrum for weak field with both initial fields in coherent state. Parameters $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 1, \Gamma = 0.1g_1, T = 40/g_1$

当两模初始场强相同且为强场($\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 10$), 相对耦合常数 $R=0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$ 时的腔场谱如图 2. 在 $R=0, 0.25$ 时为双峰结构, 随 R 的增大, 两峰逐渐向共振频率靠拢, 在 $R \geq 0.5$ 后产生出两个侧峰, 并随 R 的增加而增高; 在 $R \geq 0.75$ 时中间两峰已合为一体, 形成 3 峰结构. 随 R 的增加, 峰的个数是按 $2 \rightarrow 4 \rightarrow 3$ 的规律变化的. 值得注意的是, 从 $R=0$ 到 $R=0.5$ 峰的高度基本未变, 但在 $R > 0.5$ 后主峰的高度呈迅速递增之势, 至 $R=1$ 时最高, 显示出两原子之间的合作效应^[15].

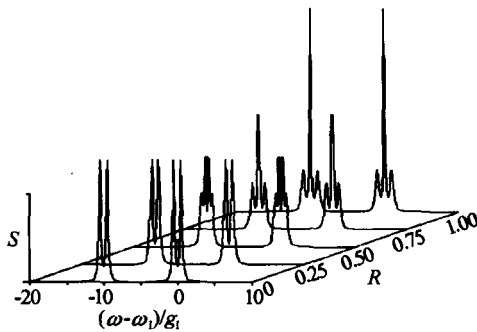


图 2 强场条件下相干态初始场的腔场谱, $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 10, \Gamma = 0.1g_1, T = 40/g_1$

Fig. 2 Cavity field spectrum for strong field with both initial fields in coherent state. Parameters $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 10, \Gamma = 0.1g_1, T = 40/g_1$

2.2 两模均处于压缩真空态时的腔场谱

当两模初始光场均为弱场($\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 1$), 相对耦合常数 $R=0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$ 时的腔场谱如图 3. 与相干态腔场谱明显不同, 压缩真空态表现为复杂的多峰结构. 峰的个数与 R 有密切关系, 随 R 的增大, 中间峰高度增大, 而边带各峰被压低. 同时, 由于两原子的合作效应, 主峰高度在 $R \rightarrow 1$ 时迅速增高.

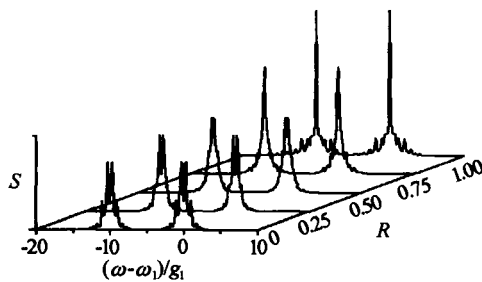


图 3 弱场条件下压缩真空态初始场的腔场谱, $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 1, \Gamma = 0.1g_1, T = 40/g_1$

Fig. 3 Cavity field spectrum for weak field with both initial fields in squeezed vacuum state. Parameters $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 1, \Gamma = 0.1g_1, T = 40/g_1$

当两模初始场强相同且为强场($\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 10$), 相对耦合常数 $R=0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$ 时的腔场谱如图 4 所示. 与弱场条件下的腔场谱不同, 即使 $R=0$ 时每模腔场谱也只有劈裂很小的双峰. 随 R 增大, 每模腔场都变的只有单一经典共振峰, 非经典特性消失. 由于每模腔场谱都是单峰, 两原子的合作

效应在这里表现的更加明显和直接, 随 $R \rightarrow 1$ 峰高的增加更快.

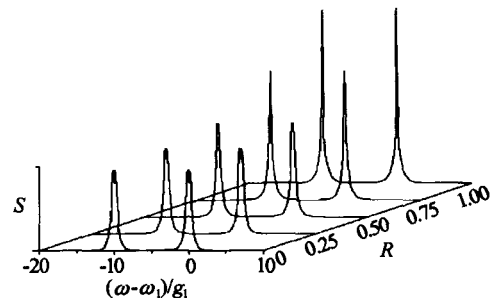


图 4 强场条件下压缩真空态初始场的腔场谱, $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 1, \Gamma = 0.1g_1, T = 40/g_1$

Fig. 4 Cavity field spectrum for strong field with both initial fields in squeezed vacuum state. Parameters $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 10, \Gamma = 0.1g_1, T = 40/g_1$

3 结论

在两个非等同原子与双模光场双光子共振相互作用过程中, 两原子相对耦合常数 R 、平均场强和两模光场初态的不同对于腔场谱结构都有明显的影响. 当两模光场均为相干态时, 在 R 从 0 增大到 1 的过程中, 弱场条件下的腔场谱结构从 2 峰变为 3 峰; 强场条件下, 峰的个数按 $2 \rightarrow 4 \rightarrow 3$ 的规律变化. 峰的总高度随 R 的增大而增加, 在 $R=1$ 时达到极大值, 显示出两原子之间的合作效应.

在两模光场均为压缩真空态的情况, 腔场谱在弱场条件下表现为复杂的多峰结构. 由于两原子的合作效应, 主峰高度在 $R \rightarrow 1$ 时迅速增高. 在强场条件下, R 较小时每模腔场谱只有劈裂很小的双峰. 随 R 增大, 两模的腔场都为单一经典共振峰, 非经典特性消失, 两原子的合作效应表现的更加明显.

参考文献

- 冯健, 宋同强, 王文正, 等. 双模腔场中两原子自发辐射的一般理论. 光子学报, 1996, 25(8): 689~693
Feng J, Song T Q, Wang W Z, et al. Acta Photonica Sinica, 1996, 25(8): 689~693
- 高云峰, 冯健, 宋同强. 两原子-双模腔场系统的腔场谱. 光学学报, 2000, 20(9): 1194~1200
Gao Y F, Feng J, Song T Q. Acta Optica Sinica, 2000, 20(9): 1194~1200
- 冯健, 宋同强, 高云峰. 高 Q Kerr 介质腔中非简并双光子 Jaynes-Cummings 模型中原子的辐射谱. 光子学报, 1996, 25(11): 976~981
Feng J, Song T Q, Gao Y F. Acta Photonica Sinica, 1996, 25(11): 976~981
- 高云峰, 冯健, 史舒人. 双相干态光场与原子依赖强度耦合过程的腔场谱. 光子学报, 2001, 30(11): 1303~1306
Gao Y F, Feng J, Shi S R. Acta Photonica Sinica,

- 2001, **30** (11): 689~693
- 5 高云峰, 冯健. 非简并拉曼过程中交流斯塔克位移对腔场谱的影响. 物理学报, 2004, **53**(3): 762~766
Gao Y F, Feng J. *Acta Physica Sinica*, 2004, **53**(3): 762~766
- 6 陈爱喜, 张增常. 高 Q Kerr 介质腔中二项式光场与原子相互作用. 光子学报, 2003, **32** (10): 1274~1277
Chen A X, Zhang Z C. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32** (10): 1274~1277
- 7 刘素梅. 耦合双原子与单模压缩相干态光场的相互作用. 光子学报, 2004, **33**(1): 113~117
Liu S M. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(1): 113~117
- 8 Nasreen T, Razmi M S K. Atomic emission and cavity field spectra for a two-photon Jaynes-Cummings model on the presence of the Stark shift. *J Opt Soc Am*, 1993, **B10** (7): 1292~1300
- 9 Ashraf M M. Cavity field spectra of the nondegenerate two-photon Jaynes-Cummings model. *Phys Rev*, 1994, **A50** (6): 5116~5121
- 10 张桂明, 李悦科, 高云峰. 非等同双原子与双模腔场拉曼相互作用模型的腔场谱. 物理学报, 2004, **53**(11): 3739~3743
Zhang G M, Li Y K, Gao Y F. *Acta Physica Sinica*, 2004, **53**(11): 3739~3743
- 11 Agarwal G S. Vacuum-field Rabi oscillation of atoms in a cavity. *J Opt Soc Am*, 1985, **B2**(3): 480~485
- 12 Thompson R J, Rempe G, Kimble H J. Observation of normal-mode splitting for an atom in an optical cavity. *Phys Rev Lett*, 1992, **68**(8): 1132~1135
- 13 Li F L, Gao S Y, Zhao Y T. Atomic emission and cavity field spectra of the Jaynes-Cummings model. *Chinese Physics*, 2003, **12**(5): 872~878
- 14 Eberly J H, Wodkiewicz K. Time-dependent spectrum of resonance fluorescence. *J Opt Soc Am*, 1977, **67** (9): 1252~1261
- 15 罗振飞, 徐至展, 徐磊. 两个双能级原子与辐射场的喇曼相互作用. 物理学报, 1992, **41**(12): 1950~1954
Luo Z F, Xu Z Z, Xu L. *Acta Physica Sinica*, 1992, **41**(12): 1950~1954

Cavity Field Spectra of Two Atoms Interacting with Two-mode Field in Superposition States

Zhang Guiming, Li Yueke, Gao Yunfeng

College of Educational Technology and Mass medium, Liaocheng University, Liaocheng 252059

Received date: 2004-05-18

Abstract The cavity field spectra of two atoms interacting with two-mode field with different coupling constant via two-photon resonant transition processes are investigated. The results for the initial fields in coherent state or squeezed vacuum state are presented. The effects of relative coupling constant $R = g_2/g_1$ and initial field intensity on the spectrum structure are discussed. When the two modes are both in coherent states, the each mode spectrum appears two peaks for small R and three peaks for $R \approx 1$. When the two modes are both in squeezed vacuum states, the complicated multi-peak structure appears for weak fields and single classical resonance peak appears for strong field.

Keywords Cavity field spectrum; Two-mode field; Two atoms system



Zhang Guiming was born in 1952. He graduated from Department of Mechanics of Peking University in 1977. He is currently an associate professor of Physics. His major research is quantum optics.