

两能级原子与单模腔场共振耦合系统中热态纠缠现象

刘琼

(湖南省怀化学院物理与电子信息科学系, 湖南怀化 418008)

摘要 借助于共生纠缠度,研究了旋转波和非旋转波近似下共振 Jaynes-Cummings 模型中二能级原子与单光子腔场的热态纠缠现象. 结果表明:该共振耦合系统中,存在影响原子与单光子腔场纠缠的临界温度,当环境温度高于这一温度时,原子与腔场的纠缠特性消失. 若只考虑实光子跃迁,这一临界温度仅与原子和腔场的耦合强度有关,随耦合系数的增大而升高;若将虚光子一并考虑,只要实光子跃迁强度与虚光子跃迁强度不相等,在一定的温度下能很好的保持原子与腔场的纠缠相干性,当二者相等时,即使在绝对零度下,原子与腔场也难以形成纠缠形式.

关键词 热态纠缠现象;共振 J-C 模型;共生纠缠度;系统温度

中图分类号 O431 **文献标识码** A

0 引言

量子态纠缠现象已成为当今研究的前沿课题之一. 由于它是量子隐形传态^[1,2]、稠密编码^[3]、量子密码术^[4]和量子光刻^[5]等重要的量子资源,近年来,人们提出了许多制备量子态纠缠的理论和实验方案^[6-12],其中量子电动力学(QED)被公认是一种实现量子信息处理最有希望的技术之一. 通过人们不懈的努力,利用腔场 QED 技术可以实现腔场与腔场,腔场与原子以及原子与原子之间的纠缠态^[7-12]. 最近,两个原子的纠缠态^[13]已被实验所实现.

另一方面,利用腔场 QED 技术实现量子信息处理存在一些困难,如量子微腔的损耗和原子的自发辐射等因素,这些将引起量子系统的退相干和能量耗散. 人们对腔场和原子的相干特性研究常用主方程方法^[14],即假设原子系统,腔场与热库相耦合,通过对热库的求迹,来获取原子系统和腔场的量子信息. 然而,主方程方法主要探讨腔场的损耗率和原子的自发辐射对子系统量子相干性的影响,不考虑系统的温度,即认为环境温度为绝对零度,可是在实际情况下,量子系统不可避免地受到其周围环境的影响,特别是环境温度. 文献[15,16]研究了一个二能级原子在有限温度下的退相干特性,指出温度是影响量子纠缠特性最主要的障碍,因此,研究环境温度对量子系统的量子相干特性影响具有一定的现实意义. 本文在此基础上将进一步研究共振的 Jaynes-Cummings 系统中原子与单光子腔模的热态纠缠现象,探讨环境温度、耦合系数比对热态纠缠度的影响以及提出克服量子纠缠态遭破坏的策略.

1 理论模型

考虑一个二能级原子与单模腔场通过单光子跃迁相互作用的量子系统,为不失一般性,我们考虑的量子系统的 Hamiltonian 为^[17]

$$\hat{H} = \hbar \omega_f \hat{N} + \hbar \delta \hat{S}^z + \hbar \gamma (\hat{a}^+ \hat{S}^- + \hat{a} \hat{S}^+) + \hbar \lambda (\hat{a} \hat{S}^- + \hat{a}^+ \hat{S}^+) \quad (1)$$

式中总激发数 $\hat{N} = \hat{a}^+ \hat{a} + \hat{S}^z + 1/2$, \hat{S}^z 和 \hat{S}^{\pm} 分别是能级间隔为 $\hbar \omega_a$ 的二能级原子的反转、上升和下降算符, \hat{a}^+ 和 \hat{a} 是频率为 ω_f 的单模腔场的产生和湮没算符,原子频率与腔场频率的失谐量 $\delta = \omega_a - \omega_f$, λ 和 γ 代表原子与腔场的耦合系数. 方程(1)最后两项分别描述了原子与腔场的实光子和虚光子跃迁过程.

对于 Jaynes-Cummings 模型,原子与腔场基矢所展开的希尔伯特空间是 $2 \times \infty$ 维的,但目前对高维系统量子态的生成纠缠没有方法计算. 最近 Wootters^[18]给出了 2×2 系统纠缠态生成纠缠的解析求法,因此本文采用 Wootters 的处理方法来研究原子与单光子腔模的纠缠现象,原子与腔场的基矢采用截取态矢 $\{|0\rangle|0\rangle, |0\rangle|1\rangle, |1\rangle|0\rangle, |1\rangle|1\rangle\}$ (其合理性在本文的后面有讨论),基矢中前面的代表腔场态,后面的代表原子态,且腔场的真空态 $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 单光子态 $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 而原子基态 $|g\rangle \equiv |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 激发态 $|e\rangle \equiv |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 从而这里研究的希尔伯特空间为 2×2 维.

进一步假设原子与腔场发生共振相互作用,即 $\delta = 0$. 于是在相互作用绘景中,系统的哈密顿量在基矢 $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ 下为

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hbar \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda e^{-2i\omega t} \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \\ \lambda e^{2i\omega t} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

为了度量原子与单光子腔场的纠缠程度,本文借助于文献[18]引入的共生纠缠度(Concurrence),其定义为

$$C_{12} = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \quad (3)$$

式中参量 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ 是算符 $\hat{\mathcal{R}}$ 本征值的平方根. 算符 $\hat{\mathcal{R}}$ 为

$$\hat{\mathcal{R}}_{12} = \hat{\rho}_{12}(\hat{\sigma}' \otimes \hat{\sigma}') \hat{\rho}_{12}^*(\hat{\sigma}' \otimes \hat{\sigma}') \quad (4)$$

这里 $\hat{\sigma}'$ 是泡利算符, $\hat{\rho}^*$ 为密度阵 $\hat{\rho}$ 在标准基矢 $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ 下的复共轭. 与其它的纠缠度量物理量一样,共生纠缠度具有以下特点:

$$\rho(T) = 2^{-1} [\cosh(\hbar\gamma/kT) + \cosh(\hbar\lambda/kT)] \times$$

$$\begin{bmatrix} \cosh\left(\frac{\hbar\lambda}{kT}\right) & 0 & 0 & -\sinh\left(\frac{\hbar\lambda}{kT}\right)\exp(-2i\omega t) \\ 0 & \cosh\left(\frac{\hbar\gamma}{kT}\right) & -\sinh\left(\frac{\hbar\gamma}{kT}\right) & 0 \\ 0 & -\sinh\left(\frac{\hbar\gamma}{kT}\right) & \cosh\left(\frac{\hbar\gamma}{kT}\right) & 0 \\ -\sinh\left(\frac{\hbar\lambda}{kT}\right)\exp(-2i\omega t) & 0 & 0 & \cosh\left(\frac{\hbar\lambda}{kT}\right) \end{bmatrix} \quad (5)$$

根据式(3)~(5),可以计算得原子与单模腔场的共生纠缠度为

$$C = \max\left\{0, \frac{\sinh\left(\frac{\hbar\gamma}{kT}\right) - 1}{\cosh\left(\frac{\hbar\gamma}{kT}\right) + 1}\right\} \text{ 当 } \lambda = 0 \quad (6)$$

$$C = \max\left\{0, \frac{\sinh\left(\frac{\hbar\gamma}{kT}\right) - \cosh\left(\frac{\hbar\lambda}{kT}\right)}{\cosh\left(\frac{\hbar\gamma}{kT}\right) + \cosh\left(\frac{\hbar\lambda}{kT}\right)}\right\} \text{ 当 } \gamma > \lambda \quad (7)$$

$$C = \max\left\{0, \frac{\sinh\left(\frac{\hbar\lambda}{kT}\right) - \cosh\left(\frac{\hbar\gamma}{kT}\right)}{\cosh\left(\frac{\hbar\gamma}{kT}\right) + \cosh\left(\frac{\hbar\lambda}{kT}\right)}\right\} \text{ 当 } \lambda > \gamma \quad (8)$$

从式(6)~(8)可以看出,该 Jaynes-Cummings 模型能产生原子与腔场的热纠缠态,并且快速振荡项对原子与腔场的纠缠度没有影响. 当耦合系数 $\lambda = \gamma$,即使在绝对零度下,原子与单模腔场也不能形成任何形式的纠缠态. 更有趣的是,当 $\lambda > \gamma$,该 Jaynes-Cummings 模型也可以产生原子与腔场的纠缠态. 为了更清楚理解环境温度对该 Jaynes-Cummings 模型热纠缠现象影响,本文首先考察旋转波近似,即 $\lambda = 0$,由式(6)可知,若原子和腔场要形成热态纠缠,必满足条件

1) $C = 0$ 表示两粒子不存在任何纠缠形式;2) $0 < C < 1$ 表示两粒子为部分纠缠态;3) $C = 1$ 意味着两粒子处于最大纠缠态.

2 腔场 QED 系统中热态纠缠现象

在有限温度下,可以用密度算符 $\rho(T) = \exp\left(-\frac{\hat{H}}{kT}\right)/Z$ 描述系统的微观状态,这里 \hat{H} 是系统的哈密顿量, $Z = \text{tr}[\exp(-\hat{H}/kT)]$ 是配分函数, k 为玻尔兹曼常数, T 表示系统的绝对温度. 由于 $\rho(T)$ 描述系统处于热平衡时的量子态,若系统的量子态处于纠缠形式,则称该量子态为热纠缠态^[19].

由式(2),不难计算得原子与单模腔场在有限温度下的热密度矩阵为

$$\sinh\left(\frac{\hbar\gamma}{kT}\right) - 1 > 0 \text{ or } T_c < T = \frac{1.134 \hbar\gamma}{k} \quad (9)$$

由此可得出结论:

1) 在旋转波近似下,共振的 Jaynes-Cummings 模型存在一个临界温度. 当系统的环境温度高于临界温度时,原子与腔场的热纠缠态消失. 这是显然的,因为系统温度的升高,使量子纯态向经典混合态过渡,量子相干性遭到破坏.

2) 临界温度只决定于原子与腔场的耦合强度,并随耦合强度的增大而升高. 这给我们启发,若在高温下实现量子系统的纠缠,以克服它们的消相干特性,可以采取增强原子与腔场耦合强度的方法. 例如,选取原子与腔场的耦合系数为 $\gamma = 700 \text{ MHz}$ ^[20],系统的临界温度为 mK 数量级,当耦合系数增强到 $\gamma = 3.5 \times 10^5 \text{ MHz}$,则临界温度可达 ~ K,利用目前的实验技术,这一温度很容易实现.

3) 由以上分析可知,克服量子系统消相干特性的另一种方法是降低系统的环境温度. 例如原子与腔场的耦合系数选为 $\gamma = 700 \text{ MHz}$,当环境温度为 $T = 6 \text{ mK}$,原子与腔场的纠缠度为 0.1085 Ebits,若系统温度冷却到 1 μK 时,其纠缠度达到 1 Ebits. 即原子与腔场在该温度下保持最大纠缠态. 对于这样

的低温现在也很容易实现,如利用激光冷却技术.因此,在实现量子计算和量子通讯方面,腔场 QED 是一种充满希望和强有力的技术.

下面借助于数值分析方法,讨论非旋波近似 Jaynes-Cummings 模型中原子与单光子腔场的热纠缠现象.由式(7)、(8)可知, $\gamma > \lambda$ 和 $\lambda > \gamma$ 这两种情况对共生纠缠度的影响具有相似的规律,于是这里只讨论 $\gamma > \lambda$ 情况.图 1 描绘的是在耦合系数比 γ/λ 分别为 0.6, 0.8, 0.95, $\gamma = 700$ MHz 参数条件下原子与单光子腔场的共生纠缠度随温度的变化规律.由图 1 可以看出,当环境温度极低时,原子与腔场的共生纠缠度 $C(T) = 1$,即原子与腔场处于最大纠缠态,但随着系统温度的升高,它们的纠缠度逐渐减小,超过某一温度时,他们的量子纠缠关系消失;另外,也发现耦合系数比 λ/γ 对纠缠度有影响,例如,当系统温度 $T = 1$ uK, $\gamma = 700$ MHz,若耦合系数比 $\lambda/\gamma = 0.01$,它们的共生纠缠度 $C(T) = 0.9881$ Ebits,当 $\lambda/\gamma = 0.80$,纠缠度 $C(T) = 0.4888$ Ebits,特别是 $\lambda/\gamma = 1$,此时纠缠度 $C(T) = 0$,这表明它们的热态纠缠现象消失.另外,耦合系数比也影响着产生热纠缠的临界温度和纠缠度变化的快慢.由图 1 可以看出,原子与腔场的耦合系数比越大,临界温度越低.

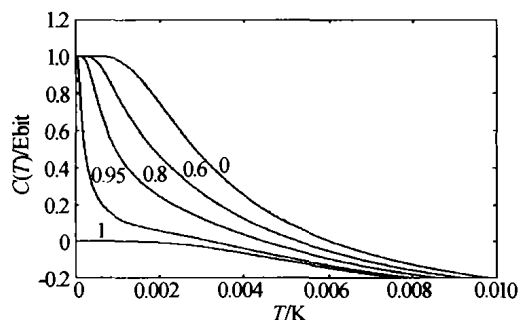


图 1 非旋波近似下原子与单光子腔模共生纠缠度随系统温度的变化规律

Fig. 1 Concurrence versus temperature under resonant atom-field system without the rotating-wave approximation

3 结论

借助于共生纠缠度,本文研究了在共振 Jaynes-Cummings 模型中原子与单光子腔场的热纠缠态.所得结论是:1) 在旋转波近似下,得到了该系统产生纠缠的条件是 $\sinh\left(\frac{\hbar\gamma}{kT}\right) - 1 > 0$. 这表明当系统温度高于由原子与腔场耦合强度所决定的临界温度时,原子与腔场难以形成纠缠态.由此提出了克服量子消相干特性的两种方法:一种是采取一些实验技术增强原子与腔场的耦合强度,提高产生纠缠的临界温度,以使它们的纠缠特性在较高的实验环境温度下被保持;另一种在实验条件允许下,通过降低系统的环境温度,可以在有限的温度下很好地保持住

原子与单模腔场形成的纠缠特性.2) 在非旋转波近似下,发现当两个耦合系数相等,即 $\lambda = \gamma$,即使在绝对零度下原子与腔场也不能处于任何纠缠形式,更有趣的是无论 $\gamma > \lambda$ 和 $\lambda > \gamma$,原子与单光子腔场在一定的温度下均能产生热纠缠态.

本文上面的结论是在采用原子与腔场的截取态矢 $\{|0\rangle|0\rangle, |0\rangle|1\rangle, |1\rangle|0\rangle, |1\rangle|1\rangle\}$ 条件下得到的.严格地说,这只在旋转波近似下才成立.但如果取高维基矢,我们无法计算其纠缠.而且,取截取态矢 $\{|0\rangle|0\rangle, |0\rangle|1\rangle, |1\rangle|0\rangle, |1\rangle|1\rangle\}$ 虽然会使定量性的结论产生一些误差,但仍然能说明本文的定性结论:原子与单光子腔场在一定的温度下能产生热纠缠态.原子与腔场耦合强度影响热纠缠的产生.

参考文献

- Bennett C H, Brassard G, Crepeau C, et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rose channels. *Phys Rev Lett*, 1993, **70** (13): 1895 ~ 1899
- Zheng Y Z, Wang X H, Guo G C. Teleportation of a tripartite entangled coherent state. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32** (6): 765 ~ 768
- Bennett C H, Wiesner S J. Communication via one-and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states. *Phys Rev Lett*, 1992, **69**: 2881 ~ 2884
- Ekert A K. Quantum cryptography based on Bell's theorem. *Phys Rev Lett*, 1991, **67** (6): 661 ~ 663
- Boto A N, Kok P, Abrams D S, et al. Quantum interferometric optical lithography: Exploiting entanglement to beat the diffraction limit. *Phys Rev Lett*, 2000, **85** (13): 2733 ~ 2736
- Weinfurter H, Zukowski M. Four-photon entanglement from down-conversion. *Phys Rev A*, 2001, **64**: 010102(R)-1-4
- King B E, Wood C S, Myatt C J, et al. Cooling the collective motion of trapped ions to initialize a quantum register. *Phys Rev Lett*, 1998, **81** (7): 1525 ~ 1528
- Dai H Y, Li c Z, Chen P X, et al. Generation of superpositions of squeezed coherent states through non-resonant interaction of degenerate V-type three-level atoms with single-mode cavity field. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32** (4): 494 ~ 497
- Dai H Y, Chen P X, Liang L M, et al. Generation of four-photon coherent states via non-resonant interaction of a degenerate V-type atom with single-mode cavity field. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32** (5): 584 ~ 587
- 宋克慧, 郭光灿. 通过大失谐 Jaynes-Cummings 模型实现类自旋的腔场 GHZ 态. *物理学报*, 1999, **48** (4): 661 ~ 666
- Song K H, Guo G C. *Acta Physica Sinica*, 1999, **48** (4): 661 ~ 666
- Song K H. Generation of four-atom Greenberger-Horne-

- Zeilinger states. *Acta Photonica Sinica*, 2000, **29**(1): 18 ~ 21
- 12 Rauschenbeutel A, Noguees G, Osnaghi S, *et al.* Step-by-step engineered multiparticle entanglement. *Science*, 2000, **288**: 2024 ~ 2028
- 13 Osnaghi S, Bertet P, Auffeves A, *et al.* Coherent control of an atomic collision in a cavity. *Phys Rev Lett*, 2001, **87**(3): 037902-1-4
- 14 Klimov A B, Romero J L. General properties of quantum systems interacting with a field mode in the low-Q cavity. *Phys Rev A*, 2001, **64**:063802-1-7
- 15 陈平形, 李承祖, 黄明球, 等. 任意温度的热库中量子位的消相干. 光子学报, 2000, **29**(1): 5 ~ 8
Chen P X, Li C Z, Huang M Q, *et al.* *Acta Photonica Sinica*, 2000, **29**(1): 5 ~ 8
- 16 向少华, 杨雄, 宋克慧. 推广的 Jaynes-Cummings 模型中原子纠缠的时间演化和热纠缠态. 物理学报, 2004, **53**(5): 1289 ~ 1292
Xiang S H, Yang X, Song K H. *Acta Physica Sinica*, 2004, **53**(5): 1289 ~ 1292
- 17 Xie K H, Liu D H, Xu G O. Dipole squeezing in the multiphoton Jaynes-Cummings model with and without the rotation-wave approximation. *Z Phys B*, 1996, **99**: 253 ~ 260
- 18 Wootters W K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Phys Rev Lett*, 1998, **80**(10): 2245 ~ 2248
- 19 Arnesen M C, Bose S, Vedral V. Natural thermal and magnetic entanglement in the ID heisenberg mode. *Phys Rev Lett*, 2001, **87**: 017901-1 ~ 4
- 20 Munstermann P, Fischer T, Rempe G, *et al.* Dynamics of single-atom motion observed in a high-finesse cavity. *Phys Rev Lett*, 1999, **82**(19): 3791 ~ 3794

Thermal Entanglement in a Two-level Atom Resonantly Coupled to Single-mode Cavity System

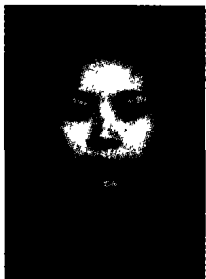
Liu Qiong

Dept. of Physics and Electronic Information Science, Huaihua University, Huaihua Hunan 418008

Received date: 2004-11-19

Abstract The thermal entanglement produced by resonant Jaynes-Cummings model with and without the effect of virtual-photon field is investigated. It is shown that there exists a critical temperature, above which thermal entanglement of atom and field mode vanishes. In the absence of virtual-photon field, the critical temperature increases with the increasing of the coupling constant between atom and cavity field. Thermal entanglement can be generated for sufficiently strong coupling under room temperature. In the presence of virtual-photon field, it is also shown that the critical temperature is determined by the processes of real and virtual photon transition. When the process of virtual photon transition is equal to that of real photon transition, no thermal entanglement takes place even if the setup is cooled to below the critical temperature.

Keywords Thermal entanglement; Resonant Jaynes-Cummings model; Concurrence; Temperature



Liu Qiong was born on Dec. 2, 1968, in Huaihua, Hunan Province. She received B. S. degree in physics from Hunan Normal University in 1990. Now she is a lecturer at Department of Physics, Huaihua College. Her research interest is the field of quantum optics.