

一种提高 1/4 波片相移量测量精度的方法*

王政平 李庆波 谭 巧 黄宗军 史金辉

(哈尔滨工程大学理学院, 哈尔滨 150001)

摘 要 提出了一种新颖的, 在已知四分之一波片快轴方向的情况下, 利用两个偏振片和一个三棱镜来提高波片相位延迟角测量精度的简便方法, 给出了对该方法的理论分析与不确定度公式, 并给出了应用实例. 此方法的主要优点是可以提高测量精度, 并且操作简单, 容易实现.

关键词 四分之一波片; 琼斯矩阵; 相位延迟

中图分类号 O432.2 **文献标识码** A

0 引言

对于测量波片相位延迟角的方法已经有一些报道, 如极大角法^[1], 半阴法^[2], 复合补偿法^[3]等. 笔者也曾报告过一种测量三棱镜反射相移的方法及其测量不确定度分析^[4]. 该方法也可用于波片相位延迟角的测量. 但对其测量不确定度分析的结果表明, 当待测波片相位延迟角在 $\pi/2$ 附近时, 该方法引入的测量不确定度可趋于无穷. 为解决这个问题, 本文提出了一种可以提高 1/4 波片相位延迟角测量精度的新方法, 即在已知 1/4 波片快轴方向的情况下, 在原来的光路中插入一个直角三棱镜. 此举可将包含三棱镜反射相移(约 $\pi/3$)与波片延迟量在内的总的待测相位延迟量从 $\pi/2$ 附近移动到 $5\pi/6$ 附近, 使得测量不确定度从趋近无穷移动到约 0.02 rad 左右^[4], 从而显著地提高测量精度. 此法还具有操作简单, 容易实现的优点.

1 测量光路及方法

该方法的原理光路如图 1. 光源发出的光束经过起偏器后形成偏振化方向与水平坐标轴(x 轴)夹角为 θ 的线偏光. 该光垂直射入待测 1/4 波片后, 出射的光线垂直射入三棱镜的一个直角边, 经斜边全反射后从三棱镜的另一直角边射出, 再经检偏器到达光功率计. 图 1 中 P1 为起偏棱镜, P2 为检偏

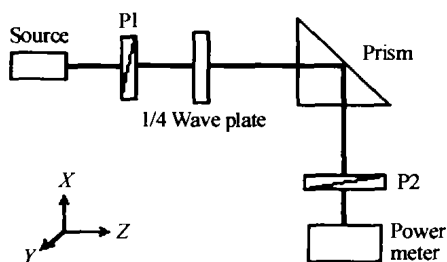


图 1 测量波片相位延迟角的原理光路图
Fig. 1 Schematic diagram of the retardance measurement of a quarter-wave plate

棱镜.

在 $\theta = \pi/4$ 的条件下, 按下述方法设定 1/4 波片快轴位置与检偏器 P2 透光轴的位置, 分别记录输出功率 I_1, I_2, I_3, I_4 . 再将 I_1, I_2, I_3, I_4 带入公式

$$\cos \delta = \left(\frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} + \frac{I_3 - I_4}{I_3 + I_4} \right) \times \frac{1}{2 \cos \Delta} \quad (1)$$

式中: I_1, I_2 分别是 1/4 波片快轴在 x 轴方向(水平方向)且检偏器透光轴与 x 轴夹角分别为 $\pm 45^\circ$ 时, 光功率计显示的数值. I_3, I_4 分别是 1/4 波片快轴在 y 轴方向(垂直方向)且检偏器透光轴与 x 轴夹角分别为 $\pm 45^\circ$ 时, 光功率计显示的数值. Δ 为三棱镜的反射相移, 需事先用文献[4]报告的方法测出. 由式(1)即可算出波片相位延迟量 δ .

2 测量原理

设起偏器透光轴与水平坐标 x 轴间的夹角为 θ (本实验中 θ 一直为 45°), 则透过起偏器的光矢可用琼斯矩阵表示为^[5]

$$E_{in}(\theta) = A \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad (2)$$

经在整个光路传输后, 由检偏器射出的光矢可表示为

$$E_{out} = P(\Psi) R(\Delta) Wk(\delta) E_{in}(\theta) \quad (3)$$

式中: $Wk(\delta)$ 为待测 1/4 波片的琼斯矩阵, 其中 δ 为波片的相位延迟角; $R(\Delta)$ 为三棱镜的反射矩阵, 其中 Δ 是三棱镜的反射相移; $P(\Psi)$ 为检偏器的矩阵, Ψ 为检偏器透光轴与水平坐标轴的夹角.

波片的琼斯矩阵如下^[6]

$$Wk(\delta) = \begin{bmatrix} e^{i\delta} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha & (e^{i\delta} - 1) \sin \alpha \cos \alpha \\ (e^{i\delta} - 1) \sin \alpha \cos \alpha & e^{i\delta} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中, α 是 1/4 波片快轴与 x 轴方向的夹角. 反射过程用琼斯矩阵表示为

$$R(\Delta) = \begin{bmatrix} e^{i\Delta_p} & 0 \\ 0 & e^{i\Delta_r} \end{bmatrix} = e^{i\Delta_p} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\Delta} \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中 $\Delta = \Delta_r - \Delta_p$ 为反射相移量, $i = \sqrt{-1}$.

检偏器的琼斯矩阵如下

* 黑龙江省自然科学基金(F01-02)资助

Tel: 0451-2518226 Email: zpwang@hrbeu.edu.cn

收稿日期: 2003-03-04

$$P(\Psi) = \begin{bmatrix} \cos^2 \Psi & \sin \Psi \cos \Psi \\ \sin \Psi \cos \Psi & \sin^2 \Psi \end{bmatrix} \quad (6)$$

光功率计接收到的光强表达式为

$$I_{\text{out}} = E_{\text{out}}^+ E_{\text{out}} \quad (7)$$

式中光矢上标“+”表示对光矢的厄米运算.

Δ 的测量光路如图 2^[4].

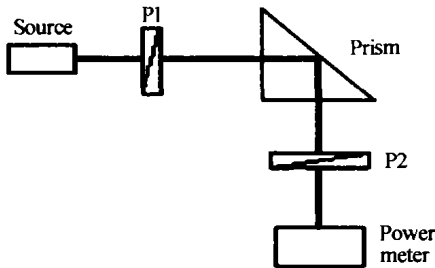


图 2 测量三棱镜反射相移的原理光路图

Fig. 2 Schematic diagram for the measuring method of the reflection-induced retardance (RIR) of a prism

测得的反射相移为

$$\Delta_{\text{测}} = \pm \arcsin(\sqrt{1 - V^2}) \quad (8)$$

式中

$$V = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}} \quad (9)$$

$I_{\text{max}}, I_{\text{min}}$ 分别为旋转检偏器 P2 一周所得到的光强最大值和最小值.

计算机仿真结果表明,按照式(5)定义的三棱镜反射相移 Δ 应为正值,故式(8)可改写为

$$\Delta = \arcsin(\sqrt{1 - V^2}) \quad (10)$$

当波片的快轴与 x 轴方向相同($\alpha = 0$)时,依式(3)、(7),输出光矢与光强分别为

$$E_{\text{out}x} = A \times$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\Psi)^2 \cos(\theta) + \frac{1}{2} \sin(2\Psi) \sin(\theta) e^{i(\Delta - \delta)} \\ \frac{1}{2} \sin(2\Psi) \cos(\theta) + \sin(\Psi)^2 \sin(\theta) e^{i(\Delta - \delta)} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$I_x = A^2 \left[\frac{1}{2} \sin(2\Psi) \sin(2\theta) \cos(\Delta - \delta) + \cos(\Psi)^2 - \sin(\theta)^2 \cos(2\Psi) \right] \quad (12)$$

令式(12)中检偏器 P2 的透光轴与 x 轴方向夹角分别为 $\pm 45^\circ$, 得到光矢与光强 I_1, I_2 分别为

$$E_{\text{out}1} = \frac{A}{2} \begin{bmatrix} \cos(\theta) + \sin(\theta) e^{i(\Delta - \delta)} \\ \cos(\theta) + \sin(\theta) e^{i(\Delta - \delta)} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$I_1 = \frac{A^2}{2} [1 + \sin(2\theta) \cos(\Delta - \delta)] \quad (14)$$

$$E_{\text{out}2} = \frac{A}{2} \begin{bmatrix} \cos(\theta) - \sin(\theta) e^{i(\Delta - \delta)} \\ -\cos(\theta) + \sin(\theta) e^{i(\Delta - \delta)} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$I_2 = \frac{A^2}{2} [1 - \sin(2\theta) \cos(\Delta - \delta)] \quad (16)$$

当 1/4 波片的快轴与 y 轴方向相同($\alpha = \pi/2$)时,依式(3)、(7),输出光矢与光强分别为

$$E_{\text{out}y} = A \times$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\Psi)^2 \cos(\theta) + \frac{1}{2} \sin(2\Psi) \sin(\theta) e^{i(\Delta + \delta)} \\ \frac{1}{2} \sin(2\Psi) \cos(\theta) + \sin(\Psi)^2 \sin(\theta) e^{i(\Delta + \delta)} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$I_y = A^2 \left[\frac{1}{2} \sin(2\Psi) \sin(2\theta) \cos(\Delta + \delta) + \cos(\Psi)^2 - \sin(\theta)^2 \cos(2\Psi) \right] \quad (18)$$

令式(18)中检偏器 P2 的透光轴与 x 轴方向夹角 Ψ 分别为 $\pm 45^\circ$, 得到光矢与光强 I_3, I_4 分别为

$$E_{\text{out}3} = \frac{A}{2} \begin{bmatrix} \cos(\theta) + \sin(\theta) e^{i(\Delta + \delta)} \\ \cos(\theta) + \sin(\theta) e^{i(\Delta + \delta)} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$I_3 = \frac{A^2}{2} [1 + \sin(2\theta) \cos(\Delta + \delta)] \quad (20)$$

$$E_{\text{out}4} = \frac{A}{2} \begin{bmatrix} \cos(\theta) - \sin(\theta) e^{i(\Delta + \delta)} \\ -\cos(\theta) + \sin(\theta) e^{i(\Delta + \delta)} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$I_4 = \frac{A^2}{2} [1 - \sin(2\theta) \cos(\Delta + \delta)] \quad (22)$$

由式(14)、(16)、(20)、(22)可以得到波片相位延迟角 δ 的计算公式如下

$$\cos \delta = \left(\frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} + \frac{I_3 - I_4}{I_3 + I_4} \right) \times \frac{1}{2 \cos \Delta \sin(2\theta)} \quad (23)$$

令式(23)中起偏角 $\theta = 45^\circ$, 即可得到式(1). 表明只要事先测出三棱镜反射相移及 $I_1 - I_4$, 就可用式(1)计算出波片的相位延迟量. 此即该方法的测量原理.

3 不确定度分析

在使用本方法测量的过程中,三棱镜反射相移的测量不确定度 $\delta\Delta$, 测量 I_1, I_3 时的误差角 $\delta\Psi_{+45^\circ}$, 测量 I_2, I_4 时的误差角 $\delta\Psi_{-45^\circ}$ 和起偏角误差 $\delta\theta$ 都有可能引入测量不确定度, 因此我们需要逐项进行分析.

3.1 三棱镜反射相移 Δ 的测量不确定度

三棱镜反射相移 Δ 的测量不确定度表达式及其中各项物理含义的细节可参阅文献[4].

3.2 δ 的总测量不确定度

$$\text{令 } \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} = V_1, \frac{I_3 - I_4}{I_3 + I_4} = V_2, \text{ 则得到 } \delta \text{ 对四个影响}$$

其测量不确定度的因素的偏导数分别为

$$\frac{\partial \delta}{\partial \Delta} = \frac{-\sin(\Delta)}{\cos(\Delta) \sqrt{1 - \frac{(V_2 + V_1)^2}{4 \cos^2(\Delta) \sin^2(2\theta)}}} \times \left[\frac{V_1 + V_2}{2 \sin(2\theta) \cos(\Delta)} - \cos(\delta) \right] \quad (24)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial \Psi_{+45^\circ}} = \frac{\partial \delta}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \Psi_{+45^\circ}} + \frac{\partial \delta}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \Psi_{+45^\circ}} = \frac{1}{2 \sin(2\theta) \cos(\Delta) \sqrt{1 - \frac{(V_1 + V_2)^2}{4 \cos^2(\Delta) \sin^2(2\theta)}}} \times (2 - V_2 - V_1) \times \cos(2\theta) \quad (25)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial \Psi_{-45^\circ}} = \frac{\partial \delta}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \Psi_{-45^\circ}} + \frac{\partial \delta}{\partial I_4} \frac{\partial I_4}{\partial \Psi_{-45^\circ}} =$$

$$2\sin(2\theta)\cos(\Delta)\sqrt{1-\frac{(V_1+V_2)^2}{4\cos^2(\Delta)\sin^2(2\theta)}} \times (2+V_1+V_2)\cos(2\theta) \quad (26)$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial\theta} = \frac{\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)\sqrt{1-\frac{(V_2+V_1)^2}{4\cos^2(\Delta)\sin^2(2\theta)}}} \times \left[\frac{V_1+V_2}{\cos(\Delta)\sin(2\theta)} - 2\cos(\delta) \right] \quad (27)$$

则 δ 的测量不确定度为

$$\delta\delta = \left[\left(\frac{\partial\delta}{\partial\Psi_{+45^\circ}} \right)^2 (\partial\Psi_{+45^\circ})^2 + \left(\frac{\partial\delta}{\partial\Psi_{-45^\circ}} \right)^2 (\partial\Psi_{-45^\circ})^2 + \left(\frac{\partial\delta}{\partial\theta} \right)^2 (\partial\theta)^2 + \left(\frac{\partial\delta}{\partial\Delta} \right)^2 (\partial\Delta)^2 \right]^{1/2} \quad (28)$$

最终测量结果表示为

$$\delta = \delta_{\text{测}} \pm \delta\delta \quad (29)$$

3.3 四个误差分量各自对 δ 总测量不确定度影响的分析与比较

令式(28)中各个误差分量分别在 -0.087 rad 到 $+0.087 \text{ rad}$ (-5° 到 $+5^\circ$) 之间变化, 不考察的误差为零, 得到其各自对总不确定度的影响的计算机仿真结果如图 3(图中 Ψ_1 为 Ψ_{+45° , Ψ_2 为 Ψ_{-45°).

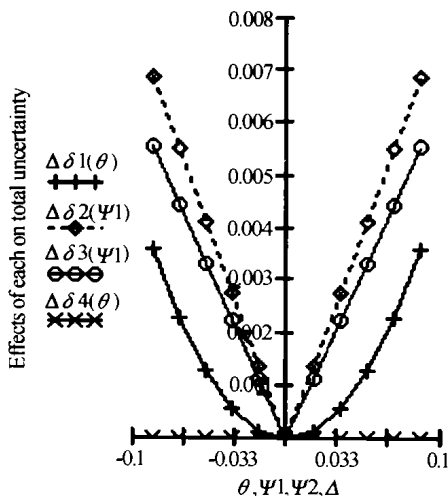


图 3 各分量对总测量不确定度的影响
Fig. 3 The effects of each element on the total measurement uncertainty

由图 3 可以看出, 检偏器角度的调整误差对总不确定度的影响最大, 起偏器误差角的影响次之, 三棱镜反射相移测量不确定度的影响与前三者相比几乎可以忽略不计.

4 应用实例

笔者选取适用波长为 633 nm 的 $1/4$ 波片为待测波片, 测量光路如图 1. 采用中国计量测试高科技联合实验室生产的稳频稳功率 He-Ne 激光器为光源, 用该实验室生产的 LM-5E 型光功率计探测输出光功率. 实验前预先测得直角三棱镜的反射相移为 $\Delta = 1.06 \pm 0.05 \text{ rad}$. 调整 $\theta = \pi/4$, 分别测得 $I_1 =$

371 nW , $I_2 = 54 \text{ nW}$, $I_3 = 9 \text{ nW}$, $I_4 = 414 \text{ nW}$. 将上述测量值代入式(1)算得 $\cos \delta = -0.216$, 得到延迟角的测量结果为 $\delta_{\text{测}} = 1.789 \text{ rad}$ (102.5°).

直角三棱镜反射相移的测量不确定度为 $\delta\Delta = 0.05 \text{ rad}$. 测量中使用的两个偏振片度盘的精度都为 $1.745 \times 10^{-3} \text{ rad}$ (0.1°), 但考虑到测量过程中角度调整的实际情况, 各个偏振片调整误差角均取为

$$\delta\Psi_{+45^\circ} = \delta\Psi_{-45^\circ} = \delta\theta = 0.017 \text{ rad} (1^\circ)$$

将上述调整误差角值及反射相移测量不确定度代入式(28), 算得测量不确定度为 $\delta\delta = 1.821 \times 10^{-3} \text{ rad} \approx 0.002 \text{ rad}$. 最终测量结果为

$$\delta = \delta_{\text{测}} \pm \delta\delta = (1.789 \pm 0.002) \text{ rad} \approx (102.5 \pm 0.1)^\circ$$

即本方法的测量不确定度在 0.1° 数量级 (0.1°).

为验证本方法的可重复性, 笔者实际测量了四组实验数据, 如表 1. 其中 S 为各测量值与平均值之间的相对误差

$$S = |\delta_i - \bar{\delta}| / \bar{\delta} (i = 1, 2, 3, 4) \quad (30)$$

\bar{S} 为 S 的算术平均值. 结果表明: 本方法具有比较令人满意的可重复性, 而且各个测量值与平均值之间的离散程度都小于 0.6% .

表 1 $\lambda/2$ 波片相位延迟角测量数据

$\Delta(^\circ)$	60.7	60.8	61.0	60.2
I_1/nW	371	375	380	368
I_2/nW	54	55	54	56
I_3/nW	9	8	10	8
I_4/nW	414	410	425	420
$\delta(^\circ)$	102.50	102.86	102.09	103.20
$\bar{\delta}(^\circ)$	102.67			
S	0.17%	0.19%	0.56%	0.52%
\bar{S}	0.36%			

为了验证测量结果的正确性, 进行了如图 4 所示的实验. 令线偏光透射过上述 $1/4$ 波片, 并且调整线偏光偏振方向与波片快轴方向之间夹角为 45° , 之后用一个可旋转的检偏器检偏. 若该波片的相位延迟角是 $\pi/2$, 则出射光应为圆偏振光, 其光强随检偏器旋转一周的分布应该是个圆; 若波片的相位延迟角小于 $\pi/2$, 则出射光应该为长轴在 1,3 象限的椭圆; 若波片的相位延迟角大于 $\pi/2$, 则出射光应该为长轴在 2,4 象限的椭圆. 实测光矢(光强的平方根)分布结果为一个长轴在 2,4 象限的椭圆, 如图 5. 表明该波片引入的相位延迟角确实大于 $\pi/2$. 为进一步验证 $\delta = 1.789 \text{ rad}$ 这一测量结果的正确性,

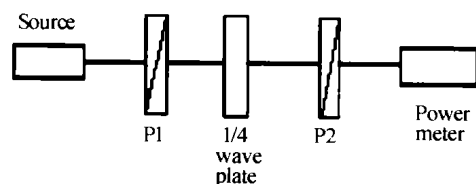


图 4 验证性实验光路
Fig. 4 Schematic diagram of the verifying test

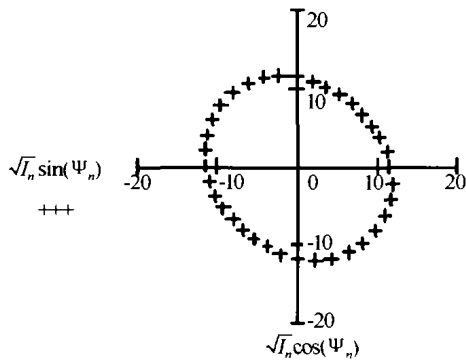


图5 旋转检偏器实验得到的光矢分布
Fig.5 Optical vector distribution while rotating the analyzer

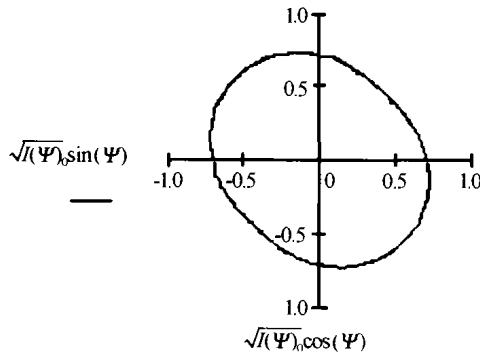


图6 $\delta = 1.789 \text{ rad}$ 时计算机仿真得到的光矢分布
Fig.6 The ellipse calculated with the measured value of $\delta = 1.789 \text{ rad}$

笔者利用 $\delta = 1.789 \text{ rad}$ 得到计算机仿真结果如图 6. 比较图 5 与图 6 知二者相符得很好.

5 结论

本文提出了一种在已知 1/4 波片快轴方向的情况下,通过采用偏振片和直角三棱镜来提高 1/4 波片相位延迟角测量精度的方法. 依据波动光学理论

并采用琼斯矩阵对该方法的原理进行了理论推导,并对该法的测量不确定度进行了分析,本方法可以提高 1/4 波片相位延迟角测量精度,直接测量范围为 $0 \leq \delta \leq \pi$. 因为实验结果与光强有关,故本方法须使用稳频稳功率激光器及高稳定光功率计. 最后给出了应用实例及其验证性实验的结果,表明该方法是可行的. 该方法具有操作简单,容易实现,适于实际运用的优点.

参考文献

- 1 王宁,李国华,张大伟. 一种测定波片相位延迟角的简便方法. 曲阜师范大学学报, 2001, 27(4): 47 ~ 49
Wang N, Li G H, Zhang D W. *Journal of Qufu Normal University*, 2001, 27(4): 47 ~ 49
- 2 薛庆文,李国华. 半阴法测量波片的相位延迟. 光电子·激光, 1998, 9(2): 150 ~ 151
Xue Q W, Li G H. *Journal of Optoelectronics · Laser*, 1998, 9(2): 150 ~ 151
- 3 薛庆文,李国华. 复合补偿法测量波片的相位延迟. 激光杂志, 1996, 17(2): 84 ~ 85
Xue Q W, Li G H. *Laser Journal*, 1996, 17(2): 84 ~ 85
- 4 李庆波,王政平,孙伟民,等. 用偏振片测量反射相移的方法及其理论研究. 哈尔滨工程大学学报, 2002, 23(3): 59 ~ 62
Li Q B, Wang Z P, Sun W M, et al. *Journal of Harbin Engineering University*, 2002, 23(3): 59 ~ 62
- 5 Jones R C. A new calculation for the treatment of optical systems: I; II; III. *J O S A*, 1941, 31(7): 488 ~ 503
- 6 P. S. 西奥卡里斯, E. E. 格道托斯著. 杨霁辉译. 光测弹性学矩阵理论. 科学出版社, 北京, 1987 年第一版: 49 ~ 85
Theocarip P S, Gdoutos E E. *Matrix theory of photoelasticity*, Beijing: Science Press, 1987. 49 ~ 85

Method to Enhance the Accuracy of Retardance Measurement of a Quarter-wave Plate

Wang Zhengping, Li Qingbo, Tan Qiao, Huang Zongjun, Shi Jinhui
Science School, Harbin Engineering University, Harbin 150001

Received date: 2003-12-16

Abstract A novel method used for the enhancement of the accuracy of the measurement of the retardance of a quarter-wave plate employing two polaroids and a prism is reported under the condition of knowing the direction of the fast axis of the plate. The theoretical analysis of the principle and the uncertainty formula are given. An application example is also demonstrated. The measured result of the example is verified with an experiment. The main advantages of this method include the accuracy enhancement, simple measuring setup and easy operation.

Keywords Quarter-wave plate; Jones Matrix; Retardance



Wang Zhengping professor and supervisor for the students for Ph. D. Degrees at Harbin Engineering University (HEU), was born in Heilongjiang Province of China in 1949, obtained his B. Sc. in Physics and M. Eng. in Electronic Engineering Degrees at the Dept. of Physics and the Dept. of Electronic Engineering of the HEU in 1982 and 1989, respectively. His research interest is mainly concentrated in the area of fiber-optic sensing technology. More than sixty papers have been published in academic journals and proceedings of international conferences in China and abroad since 1991.