

平面光波导器件时域有限差分束传输法分析中边界和初始条件的处理*

申屠伟进 蔡纯 戴劲草 张明德 孙小菡**

(东南大学电子工程系, 南京 210096)

摘要 从慢变包络(SVEA)时域光传输方程出发,对比了综合道格拉斯(GD)和传统的中心差分(CN)两种离散化格式,指出GD法比CN法精度有了很大提高.重点讨论了GD法的TD-BPM边界处理问题,给出了吸收边界和透明边界离散的显式和隐式表达式,分析并确定了交替方向隐式法(ADIM)的边界处理方式;同时,对激励源加入的连接边界进行了仔细讨论.结果表明对于隐式GD-TD-BPM法边界处理应采用隐式,中间激励更能反映光波导反射场的情况.

关键词 平面波导器件;时域有限差分法;束传输法;综合道格拉斯;边界条件;连接条件

中图分类号 TN242 **文献标识码** A

0 引言

随着光子器件与高速集成电路技术的不断成熟和发展,光网络才能展现出其高速、大容量、可配置等优点^[1].在光子器件研制过程中,模拟仿真和优化参数设计可以大大地缩短制造周期,降低成本,已经成为一种十分重要的设计手段^[2-4].目前光器件的数值模拟主要是采用时域有限差分法(FDTD)^[5]和光束传输法(BPM)^[6].由于FDTD法直接对麦克斯韦方程组进行离散,因此计算量大;然而实际光波分析中,光信号通常是准连续的,相对于其载频而言,信号的带宽很窄,如果基于FDTD模拟这样的光信号,势必造成很大浪费.随着计算机技术发展,BPM因其计算量小、速度快而得到广泛应用,但目前BPM软件大多基于频域分析.为了分析光信号在时域中传播特性,发展了基于慢变包络近似(SVEA)的TD-BPM^[7,8],把时间的二阶项降为一阶处理,已经成为许多数值模拟分析的重要处理方法.

BPM分析平面光波导时,开放边界和激励源设置的处理是十分重要的问题.国外许多人针对FD-BPM的边界做了大量的工作,主要有透明边界^[9]和吸收边界^[10],以及刚发展起来的补偿算符^[11]和理想匹配层^[12]等,但在时域应用尚不多见.同时,为了分析光在不连续介质的反射时,就需引入连接边界条件^[13],把计算区域分为总场区和反射场区.处理此类问题时,对不同结构也需认真处理.此外,在空间展开时,不同的离散化方式引起的误差有较大差异.

本文将综合道格拉斯(GD)法^[14]应用于FD-TD-BPM中,同时基于交替方向迭代法(ADIM)^[15],给出了二维平面光波导中光束传输方程离散形式,并与中心差分(CN)格式进行了对比;重点讨论了GD格式下的隐式吸收边界条件,并与透明边界进行对比;此外还详细讨论了连接边界条件和初始条件的问题.数值模拟了普通平面波导,与理论值进行了对比,为平面光子器件设计提供了更精确的手段.

1 理论

1.1 FD-TD-BPM基本模型

已知基于慢变包络近似的时域矢量波动方程为^[16]

$$-2j \frac{\omega n^2}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} = -\nabla \times \nabla \times E + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} E \quad (1)$$

式中, n 代表光波所处介质的折射率, c 是真空中光速, ω 为中心频率.对于平面光波导,假设在二维直角坐标系下将上式展开,对任一场分量可由式(1)得出

$$-2j \frac{\omega n^2}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} E \quad (2)$$

记 $\sigma = -2j \frac{\omega n^2}{c^2}$, $\nu = \frac{\omega^2 n^2}{c^2} = k_0^2 n^2$,采用ADIM法^[15],

式(2)可分为两个半步长处理的方程

$$\sigma \frac{E^{l+1/2} - E^l}{\Delta t/2} = \frac{\delta_x^2 E^{l+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{\delta_z^2 E^l}{\Delta z^2} + \nu \frac{E^{l+1/2} + E^l}{2} \quad (3)$$

$$\sigma \frac{E^{l+1} - E^{l+1/2}}{\Delta t/2} = \frac{\delta_x^2 E^{l+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{\delta_z^2 E^{l+1}}{\Delta z^2} + \nu \frac{E^{l+1/2} + E^{l+1}}{2} \quad (4)$$

对式(3)、(4)可按CN或GD格式展开.

*江苏省高技术项目(7706008020)及“十五”863项目(2002AA31230)资助

**Tel:025-83793686 Email:xhsun@seu.edu.cn

收稿日期:2004-02-16

1.1.1 CN 格式

按照中心差分原理 $\delta_x^2 E_{i,j}^l = E_{i+1,j}^l - 2E_{i,j}^l + E_{i-1,j}^l$. 式(3)和式(4)化为如下两式

$$E_{i-1/2,j}^{l+1/2} + \eta_{i,j}^x E_{i,j}^{l+1/2} + E_{i+1/2,j}^{l+1/2} = \varepsilon_{i,j}^x E_{i,j}^l - \frac{\Delta x^2}{\Delta z^2} (E_{i,j+1}^l - 2E_{i,j}^l + E_{i,j-1}^l) \quad (5)$$

$$E_{i,j-1}^{l+1} + \eta_{i,j}^z E_{i,j}^{l+1} + E_{i,j+1}^{l+1} = \varepsilon_{i,j}^z E_{i,j}^{l+1/2} - \frac{\Delta z^2}{\Delta x^2} (E_{i+1/2,j}^{l+1/2} - 2E_{i,j}^{l+1/2} + E_{i-1/2,j}^{l+1/2}) \quad (6)$$

$$\eta_{i,j}^\alpha = \left(\frac{k_0^2 n_{i,j}^2 \Delta \alpha^2}{2} - 2 + j \frac{4\omega n_{i,j}^2 \Delta \alpha^2}{\Delta t c^2} \right);$$

$$\varepsilon_{i,j}^\alpha = \left(-\frac{k_0^2 n_{i,j}^2 \Delta \alpha^2}{2} + j \frac{4\omega n_{i,j}^2 \Delta \alpha^2}{\Delta t c^2} \right) \quad (\alpha = x \text{ 或 } z) \quad (7)$$

1.1.2 GD 格式

考虑了差分展开式中的高阶项,可得

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\delta^2 E}{\Delta x^2} - \frac{1}{12} \frac{\partial^4 E}{\partial x^4} \Delta x^2 + O(\Delta x)^4 \quad (8)$$

而 CN 格式只考虑式(8)右边的第一项,因此 GD 的截断误差比 CN 高两个数量级^[14]. 这样式(3)与式(4)经过一些处理运算,可以得到以下两个式子

$$\eta_{x,i-1/2,j}^- E_{i-1/2,j}^{l+1/2} + \xi_{x,i,j}^- E_{i,j}^{l+1/2} + \eta_{x,i+1/2,j}^- E_{i+1/2,j}^{l+1/2} = \eta_{z,i,j-1}^+ E_{i,j-1}^l + \xi_{z,i,j}^+ E_{i,j}^l + \eta_{z,i,j+1}^+ E_{i,j+1}^l \quad (9)$$

$$\eta_{z,i,j-1}^- E_{i,j-1}^{l+1} + \xi_{z,i,j}^- E_{i,j}^{l+1} + \eta_{z,i,j+1}^- E_{i,j+1}^{l+1} = \eta_{x,i-1/2,j}^+ E_{i-1/2,j}^{l+1/2} + \xi_{x,i,j}^+ E_{i,j}^{l+1/2} + \eta_{x,i+1/2,j}^+ E_{i+1/2,j}^{l+1/2} \quad (10)$$

$$\eta_{\alpha,i,j}^\pm = -\frac{j\omega n_{i,j}^2}{6c^2 \Delta t} \pm \frac{\omega^2 n_{i,j}^2}{48c^2} \pm \frac{1}{2\Delta \alpha^2};$$

$$\xi_{\alpha,i,j}^\pm = -\frac{5j\omega n_{i,j}^2}{3c^2 \Delta t} \pm \frac{5\omega^2 n_{i,j}^2}{24c^2} \mp \frac{1}{\Delta \alpha^2}; \alpha = x \text{ 或 } z \quad (11)$$

上面方程中的 η 或 ξ 是三角阵的系数,可以利用追赶法求解方程组.

1.2 边界条件的处理

直接引用 FDTD 中吸收边界的处理,发现显式吸收边界不能与 GD 的隐式相容,导致解发散. 因此必须找出吸收边界的隐式,以便与待求的方程组联立求解.

1.2.1 GD 格式的隐式吸收边界条件

已知 Higdon 边界条件^[10,17]如下式:

$$(\nu \partial x + \xi_i \partial t - j\omega \xi_i) E = 0 \quad (12)$$

式中, ν 为介质中的相速度, ξ_i 为优化参数. 下面以 $x = N$ 为例,其它三个边界可类似处理. 引入辅助场量 $E^l(N-1/2, j)$, 则式(12)可化为

$$E^{l+1/2}(N, j) = [E^l(N, j) + E^l(N-1, j) - f_2 E^{l+1/2}(N-1, j)] / f_1 \quad (13)$$

式中 f_1 和 f_2 是复数变量, 设 $f_i(a, b)$ 中 a 为实部, b 为虚部, $i = 1, 2$. 则

$$f_1 = f_1(1 + r_1, r_2), f_2 = f_2(1 - r_1, r_2)$$

$$(r_1 = \frac{\nu \Delta t}{\xi_i \Delta x}, r_2 = -\frac{\omega \Delta t}{2}) \quad (14)$$

1.2.2 透明边界条件

假设边界上满足指数关系式 $E = E_0 \exp(ik_x x)$, 这样就能吸收单一的平面波或者是衰减消逝波^[9]. 计算中可以取距离边界更远点进行加权平均,以减小反射影响. 对于消逝波, l 时刻 k_x 可由 $\exp(ik_x \Delta x) = \frac{1}{N} \sum \frac{E_{M-i}^l}{E_{M-i-1}^l}$ 得知,从而将计算的 k_x 应用到 $(l+1)$ 时刻的边界上

$$E_M^{l+1} = E_{M-1}^l \exp(ik_x \Delta x) \quad (15)$$

1.3 连接及初始条件

为了研究反射情况,一般把激励源设置在中间,通过总场区和反射场区的连接条件加入^[13],如图1. 在计算总场 $E^l(L, k)$ 时,要用到散射场 $E^s(L, k-1)$; 同理在计算散射场 $E^s(L, k-1)$ 时,要用到 $E^l(l, k)$. 以式(9)为例,当 $j = k-1$ 时,除了 $E_{i,j+1}^l$ 在总场区,其余的都在散射场区,所以代入点 (L, k) 的电场值时应该减去源在点 (L, k) 的作用,即为 $E_{i,j+1}^l = E_{i,j+1}^l - E_{in}(i, k-1/2) * \exp(\beta z/2)$. 当 $j = k$ 时,只有 $E_{i,j-1}^l$ 在散射场区,其余的都在总场区. 因此 $E_{i,j-1}^l = E_{i,j-1}^l + E_{in}(i, k-1/2) * \exp(-\beta z/2)$. 其中 E_{in} 是基模场的横向分布, β 为其传播常数.

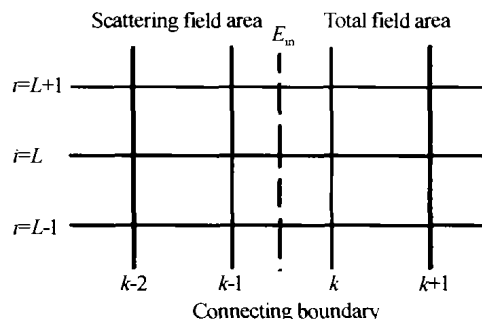


图1 二维空间中的连接边界及场区域
Fig.1 Connecting boundary and field areas in 2D space

初始条件主要包括两个方面:空间的光模场分布和时间上的变化规律,本文主要是采用正弦激励^[18]. 为了减小激励源引入高频分量的影响,保证场初始值满足 $E(t \rightarrow 0) = 0$, 则有

$$E(x, z_{in}, t) = \begin{cases} E(x, z_{in}) \times \sin(\pi ct/2\Delta T), & ct \leq \Delta T \\ E(x, z_{in}), & ct > \Delta T \end{cases} \quad (16)$$

$E(x, z_{in})$ 是场的横向分布,可为高斯分布或基模场分布.

高斯分布

$$E(x, z_{in}) = A \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{d^2}\right) \quad (17)$$

基模场分布

$$E(x, z_{in}) = \begin{cases} A \cos(h(x-x_0)) & (|x-x_0| \leq d) \\ A \cos(hd) \exp(-p(|x-x_0|-d)) & (|x-x_0| \geq d) \end{cases} \quad (18)$$

式中 x_0 为波导中心, d 为纤芯半宽; h 和 p 分别是横向传播常数和包层中的衰减因子.

2 仿真及结果分析

2.1 GD 格式与 CN 格式对比

如图 2 所示的二维平面波导中, 激励源为高斯脉冲, 加在左端面上, 横向为基模场分布, 纵向 $1/e$ 全宽为 $4 \mu\text{m}$; 纤芯和包层的折射率分别为 $n_{co} = 3.6$, $n_{cl} = 3.564$, 纤芯宽度 $2d = 1.458 \mu\text{m}$. 光进入波导 200 fs 后, 传输距离的理论值为 $16.7 \mu\text{m}$. 图 3 为基于 GD、CN 两种格式, $\Delta t = 1 \text{ fs}$, $\Delta x = 0.1458 \mu\text{m}$, 所得的计算结果. 可见, 随着 Z 向网格步长的减小, 传输距离日益接近理论值. GD 格式在 $\Delta z = 0.05 \mu\text{m}$ 时就比较接近理论值, 而 CN 格式要在更小的步长 ($0.02 \mu\text{m}$) 下才能达到.

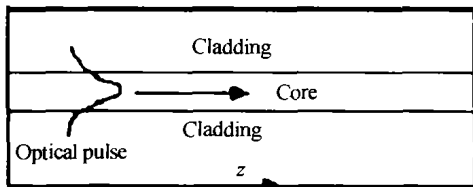


图 2 二维平面波导
Fig. 2 Schematics of two dimensional waveguide

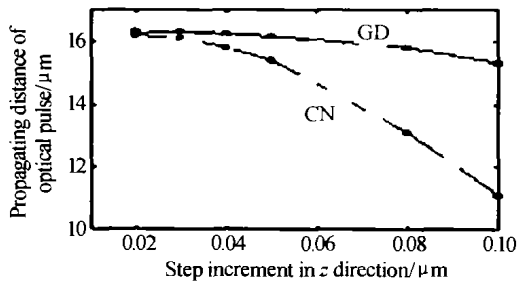


图 3 两种格式精度的对比
Fig. 3 Accuracy comparison between two methods

2.2 吸收边界和透明边界比较

波导左端面上加的激励源信号如式 (16), 取 $\Delta T = 40 \mu\text{m}$, 横向为基模场分布如式 (18). 在右端面上加边界条件, 从图 4 可知单层吸收边界效果不如透明边界好. 图 5 和图 6 分别是两种边界条件下

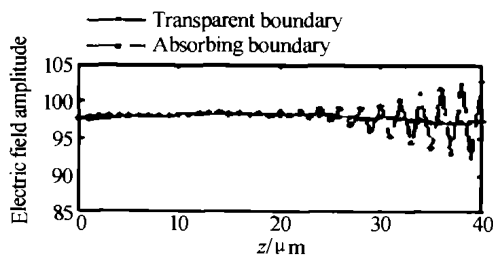


图 4 两种边界条件的比较
Fig. 4 Comparison between two boundary conditions

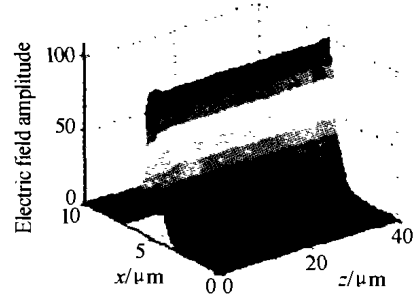


图 5 透明边界下的总场分布
Fig. 5 Total field under transparent boundary condition

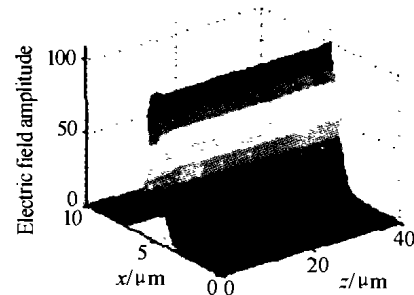


图 6 吸收边界下的总场分布
Fig. 6 Total field under absorbing boundary condition

的总场图, 可以看出吸收边界所引起的反射与入射波一块形成了驻波.

2.3 连接条件中 β 及 ΔT 的影响

我们把激励源通过中间连接条件引入到波导中, 可分析反射场以及 β 的影响. 激励源如式 (16), $\Delta T = 40 \mu\text{m}$. $\beta = \beta_{\text{exact}} \times \zeta$, ζ 是优化系数. 图 7 为 ζ 在 $1.0 \sim 0.75$ 之间变化时的反射场, 五条曲线自上而下各自对应 $\zeta = 1.0, 0.9, 0.85, 0.80, 0.75$, 可见, $\zeta = 0.75$ 时基本上可以忽略人为引入的反射. 图 8 为 ΔT 分别对应于 $20 \mu\text{m}, 10 \mu\text{m}$ 和 $5 \mu\text{m}$ 时电场沿纵向的分布. 可见, ΔT 越小, 使得激励源引入

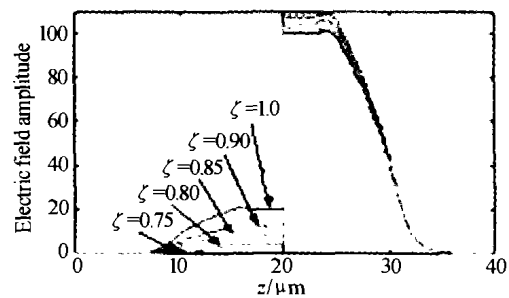


图 7 不同优化系数 ζ 下连接时的反射场幅度
Fig. 7 Field distribution in connecting boundary with different optimized coefficients

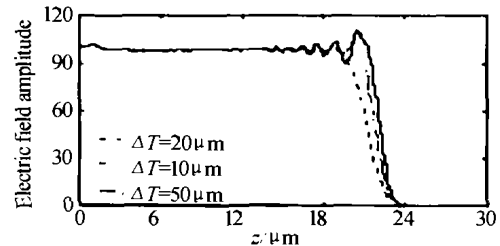


图 8 激励源不同上升时间时所对应的场幅度分布
Fig. 8 Field amplitude with different rise times for the excited source

更多的高频分量,场振幅在纵向纹波越大.因此,必须选择恰当的 ΔT .

最后,将波导边界处理成透明情况, ζ 及 ΔT 分别为 0.75 和 40 μm ,对图 2 二维平面波导进行 GD-FD-TD-BPM 的模拟.其中在 Z 向网格点为 100 处为两介质的交界面,交界面左侧的折射率 $n_1 = 3.6$,右侧的折射率 $n_2 = 1.5$,所得的结果如图 9.分析其反射与透射的情况,理论上得到的透射场与反射场幅值之比为 3.43,模拟结果为 3.40,相差 0.9%.由此可知连接边界以及 GD-FD-TD-BPM 的模拟是正确的.

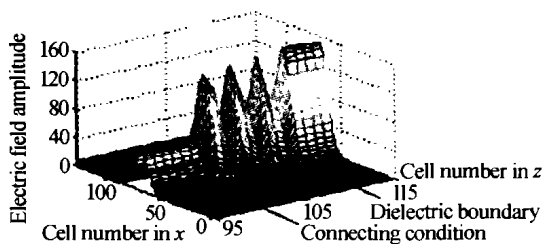


图 9 Z 向两种不同介质界面引起的光反射与透射场
Fig.9 Reflected and transmitted lightwave fields on the surface between two different media

3 结论

本文将 GD 法用于 FD-TD-BPM 中,给出了基于 ADIM 二维平面光波导时域光束传输方程离散形式,与 CN 格式对比,重点讨论了 GD 格式下的边界条件、激励源连接边界和初始条件问题.主要结论如下

1) GD 格式展开 TD-BPM 方程,纵向网格步长在 0.05 μm 时的数值计算结果与理论分析值相差 4%;而传统 CN 格式展开时,步长须为 0.02 μm 才可达同样精度,比 GD 格式增加了 2.5 倍网格数;

2) 比较端面引起的反射场,表明透明边界条件要比单层隐式吸收边界条件大大减少了端面反射,且处理和展开式较后者简单;

3) 激励源的引入位置及构成参数对于数值分析精度有较大影响,激励源应通过中间连接条件引入;正弦激励源周期过小,将导致较大的场振幅纹波;修正因子在 0.75 时可大大降低计算引入的反射;

4) GD-FD-TD-BPM 可以较快速地模拟平面光波导中光的传输,为平面光子器件提供了较精确的设计手段.

参考文献

- 1 Eldada L. Telecom optical componentry: past, present, future. *Proceedings of SPIE*, 2001, **4604**: 1 ~ 15
- 2 Tao Z H, Chang J H, Sun X H, et al. A novel design method for broadband fiber raman amplifier. *Acta Photonica Sinica*,

2004, **33**(4): 435 ~ 438

- 3 Li C Q, Sun X H, Zhang M D, et al. Configuration research of 2D-OOC signature sequence code for OCDMA system. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(1): 46 ~ 50
- 4 Li C Q, Sun X H, Zhang M D, et al. Configuration research of 2D-RSC signature sequence code for OCDMA system. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(2): 187 ~ 191
- 5 Chu S T. Modeling of guided-wave optical structures by the finite-difference time-domain method. [Ph. D. dissertation], University of Waterloo, Waterloo, Ont., Canada, 1990
- 6 Yevick D. A guide to electric field propagation techniques for guided-wave optics. *Opt. Quantum Electron*, 1994, **26**: S185 ~ S197
- 7 Liu P L, Zhao Q, Choa F S. Slow-wave finite-difference beam propagation method. *IEEE Photon Technol Lett*, 1995, **7**(9): 890 ~ 892
- 8 Ma F. Slowly varying envelope simulation of optical waves in time domain with transparent and absorbing boundary conditions. *J Lightwave Technol*, 1997, **15**(10): 1974 ~ 1985
- 9 Hadley G R. Transparent boundary condition for the beam propagation method. *Opt Lett*, 1991, **16**(9): 624 ~ 626
- 10 Higdon R L. Absorbing boundary condition for difference approximation to the multidimensional wave equation. *Math Comput*, 1986, **47**(176): 437 ~ 459
- 11 Ramahi O M. Complementary operators: A method to annihilate artificial reflections arising from the truncation of the computational domain in the solution of partial difference equations. *IEEE Trans Antennas Propagat*, 1995, **43**(14): 697 ~ 704
- 12 Berenger J P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J Comput Phys*, 1994, **114**(2): 185 ~ 200
- 13 Yamauchi J, Shibayama J, Sekiguchi M, et al. Finite-difference beam propagation method based on the generalized Douglas scheme for a nonuniform grid. *IEEE Photon Technol Lett*, 1997, **9**(1): 67 ~ 69
- 14 Yamauchi J, Shibayama J, Saino O, et al. Improved finite-difference beam propagation method based on the generalized Douglas scheme and its application to semivectorial analysis. *J Lightwave Technol*, 1996, **14**(10): 2401 ~ 2406
- 15 李立康, 於崇华, 朱政华. 微分方程数值解法. 上海: 复旦大学出版社, 1998. 269 ~ 274
- Li L K, Wu C H, Zhu Z H. Numerical Solution for Differential Equation. Shanghai: Fudan Publishing House, 1998. 269 ~ 274
- 16 Shibayama J, Takahashi T, Yamauchi J, et al. Efficient time-domain finite-difference beam propagation method for the analysis of slab and circularly symmetric waveguides. *J Lightwave Technol*, 2000, **18**(3): 437 ~ 442
- 17 Shibayama J, Takahashi T, Yamauchi J, et al. Comparative

study of absorbing boundary condition for the time-domain beam propagation method. *IEEE Photon Technol Lett*, 2001, **13**(4): 314 ~ 316

18 Yamauchi J, Shibayama J, Nakano H. Application of the generalized Douglas scheme to optical waveguide analysis. *Opt Quantum Electron*, 1999, **31**(4): 675 ~ 687

Boundary Condition and Initial Condition in the Time-domain Beam Propagation Methods Applied to Study Planar Waveguides

Shentu Weijin, Cai Chun, Dai Jingcao, Zhang Mingde, Sun Xiaohan

Department of Electronic Engineering, Southeast University, Nanjing 210096

Received date: 2004-02-06

Abstract Based on time-domain beam propagation methods (TD-BPM) with the slowly varying envelope approximation (SVEA), both schemes of generalized Douglas (GD) and conventional central-difference (CN) have been respectively used to disperse lightwave transmission equation, and have been compared each other. The results showed that the former is more accurate. The explicit and implicit expressions of absorbing and transparent boundary condition have been derived for the GD scheme in TD-BPM, respectively. The boundary condition based on the alternating-direction implicit method (ADIM) was also established. Meanwhile, incident wave and connecting condition have been discussed in details. As a result, the boundary condition of implicit GD-TD-BPM must apply implicit expression, and settling incident wave in computational region may effectively detail the reflected field.

Keywords Planar waveguides; Time-domain finite difference; Beam propagation methods; Generalized Douglas scheme; Boundary condition; Connecting boundary condition



Shentu Weijin was born in 1980, in Zhejiang Province, graduated from Southeast University in 2002. Now he is currently working as a Ph. D. candidate in the area of photonic devices at Tsinghua University.