

基于平移不变小波阈值算法的噪声图象估计*

吴冬梅

(西安科技大学通信与信息工程学院,西安 710054)

摘要 在小波基下简单的阈值算法几乎是最优的非线性估计,若信号是分片光滑函数,小波阈值方法所得的风险就接近于最佳值.采用标准的小波阈值估计可较大幅度的提高 PSNR,但由于图像的边缘被 Gibbs 类的振荡所影响,图像视觉质量较差.本文采用改进的平移不变阈值算法可获得更高的 PSNR,更重要的是该方法明显地改善了图像的视觉质量.

关键词 图像估计;小波阈值法;平移不变阈值法

中图分类号 TP393.08

文献标识码

A

0 引言

图像噪声对图像分析、图像压缩的影响很大,因此,从被噪声污染的图像中估计原图象是图像处理领域中的一个重要内容.要估计一个带噪信号,需要充分利用信号和噪声的先验知识,常用的方法有贝叶斯方法与极小化极大方法、线性方法与非线性方法.信号处理估计大多利用贝叶斯方法和线性方法.统计学中存在非线性光滑化算法,但这些方法通常很特别且非常复杂.统计专家 Donoho 和 Johnstone 提出了在适当的基下简单的阈值算法几乎是最优的非线性估计.当信号是分片光滑函数时,那么用小波阈值方法所得的风险就接近于最佳值^[1].该方法中阈值的处理是关键问题,若处理不当,将无法取得预期的效果.因此阈值的优化选择与改进阈值计算的性能一直是该领域研究的重点.

1 噪声和图像信号在小波分解下的特性

设 $f(x, y) \in L^2(R)$, $N_{\delta(x_0, y_0)}$ 为 (x_0, y_0) 的任一开邻域,若任意 $(x, y) \in N_{\delta(x_0, y_0)}$ 有

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = k|(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2|^{\alpha/2}$$

则称 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点的奇异性为 α (α 为 Lipschitz 指数).若小波函数 $\Psi(x, y) \in C^2(R)$, 且具有 n 阶消失矩 ($n \in N$), 可以证明,任意 $(x, y) \in N_{\delta(x_0, y_0)}$ 有

$$|WT_f(a; b_1, b_2)| \leq ka^{\alpha}$$

上式说明,对于奇异性大于零的奇异点,随着尺度的增加,其小波变换后幅值将呈幂增加趋势;而对于奇异性小于零的奇异点,则小波变换的幅值随着尺度

的增加而减小^[2].

噪声几乎处处奇异,且其具有负的 Lipschitz 指数即其奇异性小于零.在小波变换下,噪声的平均幅值与尺度因子 2^j 成反比,平均模极大值个数与 2^j 成正比,即噪声的能量随着尺度的增加迅速减小.而图像信号具有正的 Lipschitz 指数即其奇异性大于零.在小波变换下,图像信号的平均幅值不会随着尺度的增加明显减小.图像信号的奇异性态和噪声小波变换的性态所具有的不同特性是在小波变换域中区分信号和噪声的主要依据^[3].

因此,若对小波系数进行阈值处理,就可以在小波变换域中去除低幅度的噪声和我们所不期望的信号,然后进行离散小波变换逆变换,尽管所恢复信号丢失了一点细节(对应小尺度时的幅度较小的小波变换系数),但仍将恢复我们所期望的信号.

2 小波阈值估计

2.1 估计子与估计风险

设 $B = \{g_m\}_{0 \leq m < N}$ 为规范正交基, f 为原始数据, W 是方差为 σ^2 的零均值白噪声,带噪声的数据 $X = f + W$ 在 B 下被分解.系数记为: $X_B[m] = \langle X, g_m \rangle$, $f_B[m] = \langle f, g_m \rangle$, $W_B[m] = \langle W, g_m \rangle$, 且满足 $X_B[m] = f_B[m] + W_B[m]$, 利用函数 $d_m(x)$ 来独立地从 $X_B[m]$ 中估计每个 $f_B[m]$. 所得的估计子为

$$\tilde{F} = DX = \sum_{m=0}^{N-1} d_m(X_B[m])g_m \quad (1)$$

假定考虑的信号类以 0 为中心,可得到 $d_m(X_B[m]) = a[m]X_B[m]$, 估计子的风险定义为^[4]

$$r(D, f) = E\{\|f - \tilde{F}\|^2\} = \sum_{m=0}^{N-1} E\{|f_B[m] - X_B[m]a[m]|^2\} \quad (2)$$

当 $a[m] = \frac{|f_B[m]|^2}{|f_B[m]|^2 + \sigma^2}$ 时,此风险取极小,为

$$r_{inf}(f) = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{|f_B[m]|^2 \sigma^2}{|f_B[m]|^2 + \sigma^2}$$

实践中,因为衰减因子 $a[m]$ 依赖于 $f_B[m]$,其值是未知的,所以不能计算它. 因此风险 $r_{inf}(f)$ 是一个不可达到的下界. 但采用取阈值方法可以接近于 $r_{inf}(f)$ [5].

2.2 阈值函数与阈值

在式(1)中,当 d_m 是阈值函数时,算子 D 是基 B 下的非线性投影子. 阈值函数分为硬取阈值和软取阈值. 硬取阈值估计子的实现是

$$d_m(x) = \rho_T(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } |x| > T \\ 0, & \text{若 } |x| \leq T \end{cases} \quad (3)$$

与硬取阈值不同的是,软取阈值将所有噪声系数的幅值减少 T ,其估计子的实现是

$$d_m(x) = \rho_T(x) = \begin{cases} x - T, & \text{若 } x \geq T \\ x + T, & \text{若 } x \leq -T \\ 0, & \text{若 } |x| \leq T \end{cases} \quad (4)$$

选取的阈值 T 必须刚好大于噪声的最大水平. 对适当选取的 T ,取阈值的风险接近于 oracle 投影子 $r_p(f) = \sum_{m=0}^{N-1} \min(|f_B[m]|^2, \sigma^2)$ 的风险. 当 $T = \sigma \sqrt{2 \ln N}$,对所有 $N \geq 4$,硬或软阈值估计子的风险 $r_i(f)$ 满足 $r_i(f) \leq (2 \ln N + 1)(\sigma^2 + r_p(f))$.

2.3 小波阈值计算

在离散正交小波基下分解信号,此时 $B = [\{\Psi_{j,m}[n]\}_{L < j \leq J, 0 \leq m < 2^{-j}}, \{\phi_{j,m}[n]\}_{0 \leq m < 2^{-j}}]$. 式中 ϕ 是尺度函数, Ψ 是小波. 小波基下的阈值估计子可写为 [6]

$$\tilde{F} = \sum_{j=L+1}^J \sum_{m=0}^{2^{-j}} \rho_T(\langle X, \Psi_{j,m} \rangle) \Psi_{j,m} + \sum_{m=0}^{2^{-J}} \rho_T(\langle X, \phi_{j,m} \rangle) \phi_{j,m} \quad (5)$$

式中 $\rho_T(x)$ 为硬或软阈值函数. 取阈值将所有 $|\langle X, \Psi_{j,m} \rangle| \leq T$ 的系数置为零,在 f 的能量含于少许小波系数中时,估计风险很小.

目前提出的阈值 T 的选取方法主要有以下几种:1) Donoho 和 Johnstone 统一阈值 $T = \sigma \sqrt{2 \ln N}$,其中, σ 为噪声标准方差, N 为图像的像素点数;2) 零均值正态分布的置信区间阈值, $T = 3\sigma \sim 4\sigma$; 3) BayesShrink 阈值和 MapShrink 阈值;4) 最小最大化阈值. 在各种阈值中,由于统一阈值计算简单,故得到广泛的应用,但它不是最优的,其趋向于“过扼杀”小波系数,从而会导致较大重建误差 [7].

在确定阈值 T 时,噪声的标准差 σ 的求法是很关键的. 在小波变换各尺度下噪声是不能确定的,因而 σ 也就无法求得,但可采用一种近似的方法. 长度为 N 的信号 X 在最细的尺度上有 $N/2$ 个小波系数 $\{\langle X, \Psi_{l,m} \rangle\}_{0 \leq m < N/2}$,若 f 在 $\Psi_{l,m}$ 的支集上光滑,则系数 $|\langle f, \Psi_{l,m} \rangle|$ 很小,此时 $\langle X, \Psi_{l,m} \rangle \approx$

$\langle W, \Psi_{l,m} \rangle$. 若 M 是 P 个均值为零、方差为 σ^2 的独立高斯随机变量的绝对值的中位,已证明有 $E\{M\} \approx 0.6745\sigma$. 通过忽略 f 的影响,可由 $\{\langle X, \Psi_{l,m} \rangle\}_{0 \leq m < N/2}$ 的中位 M_X 来估计噪声的方差

$$\tilde{\sigma} = M_X / 0.6745 \quad (6)$$

3 平移不变阈值算法

对带噪声的小波系数取阈值会在靠近间断点的地方产生小的涟漪,实际上,将系数 $\langle f, \Psi_{j,m} \rangle$ 置为零是从 f 中减去 $\langle f, \Psi_{j,m} \rangle \Psi_{j,m}$,当 $\langle f, \Psi_{j,m} \rangle$ 是不可忽略时,就引入了振荡. 采用平移不变估计可有效减少这些振荡,改善图像的质量.

考虑周期为 N 的信号,设 $f^p[n] = f[n-p]$,在基 B 下, f 的表示不是平移不变的,系数向量 f_B 与 f_B^p 不是简单地被平移,它们可以完全不同. 因而通过对系数 f_B^p 取阈值所恢复的信号不是对 f_B 取阈值后所重构信号的平移.

针对上述问题,平移不变算法估计 f 的所有平移且在逆平移后对它们取平均. 对所有的 $0 \leq p < N$,通过对平移后的数据 $X_B^p[n] = X_B[n-p]$ 取阈值后而算得 f_B^p 的估计子 \tilde{F}^p

$$\tilde{F}^p = \sum_{m=0}^{N-1} \rho_T(X_B^p[m]) g_m \quad (7)$$

通过逆平移以及对这些估计求平均,获得平移不变估计子 [3]

$$\tilde{F}[n] = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \tilde{F}^p[n+p] \quad (8)$$

通常,这比标准的阈值估计子要求多 N 倍的计算量. 在小波基下,它们是部分平移不变的,运算次数仅乘以 $\log_2 N$,且平移不变性大大地减少了风险. 当计算小波基下的平移不变估计时,不是平移信号,而是在相反方向移动小波

$$\langle f[n-p], \Psi_{j,m}[n] \rangle = \langle f[n], \Psi_{j,m}[n+p] \rangle = \langle f[n], \Psi_j[n - N2^j m + p] \rangle$$

若 f 和所有小波 Ψ_j 以 N 为周期,则所有这些内积由二进小波变换所提供

$Wf[2^j, p] = \langle f[n], \Psi_j[n+p] \rangle$, 对 $0 \leq p < N$ 通过对二进小波系数 $\langle X[n], \Psi_j[n-p] \rangle$ 取阈值且用逆二进小波变换重构信号可算出平移不变小波估计子.

4 仿真实验结果比较

在小波基下,采用标准的阈值估计和平移不变估计分别对被噪声污染的 Lena 图进行估计,噪声是方差为 σ^2 的零均值高斯白噪声,选 Symmlet4 小波. 估计图像的性能用峰值信噪比 (PSNR) 和视觉质量

综合评价.

图3是在 Symmlet4 小波基下用硬取阈值而算得的, 阈值被取为 $T=3\sigma$, 而不是 $T=\sigma\sqrt{2\ln N^2}$, 因为这样可以明显地改进 PSNR, 噪声的标准差 σ 由式(6)计算. 这个估计恢复光滑的图像分量与间断, 但边缘的视觉质量被 Gibbs 类的振荡所影响. 图4是用小一半的阈值 $T=3/2\sigma$ 通过小波软取阈值而获得的, 软阈值估计在间断处减低了噪声效果, 但对系数的幅值减少 T 倍, 作用太强, 导致较低的信噪比, 要得到可比较的信噪比, 软取阈值的 T 大约为硬取阈值的一半. 与污染图像相比, 图3和图4的 PSNR 分别提高了 4.64 dB 和 3.86 dB, 信噪比有较大幅度的提高, 但图像视觉质量较差.

由改进的平移不变估计算法算得图5(硬取阈值)、图6(软取阈值), 图5与图3相比 PSNR 提高了 1.35 dB, 图6与图4相比 PSNR 提高了 0.66 dB, 可见平移不变估计算法有较高的 PSNR, 更重要的

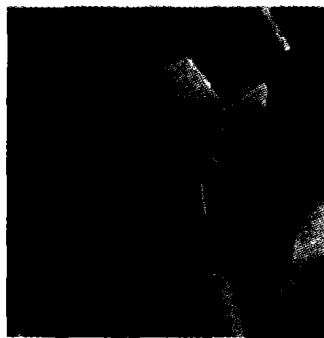
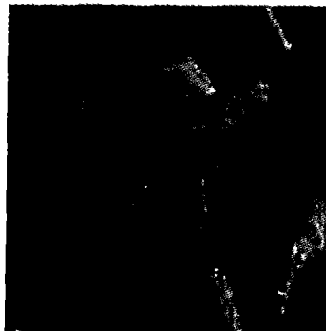


图1 原图像
Fig.1 Original image



PSNR=21.691 dB
图2 带噪声的图像
Fig.2 Noisy image



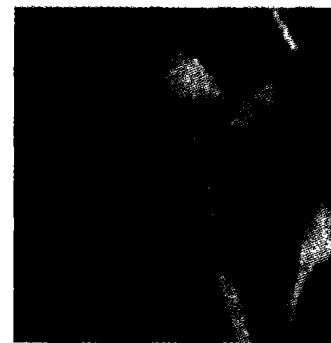
PSNR=26.329 dB
图3 硬取阈值的估计
Fig.3 Estimation with a wavelet hard thresholding



PSNR=25.551 dB
图4 软取阈值的估计
Fig.4 Estimation with wavelet soft thresholding



PSNR=27.685 dB
图5 平移不变硬取阈值
Fig.5 Translation invariant hard thresholding



PSNR=26.211 dB
图6 平移不变软取阈值
Fig.6 Translation invariant soft thresholding

是该方法明显地改善了图像的视觉质量, 图5、6中的图像更加平滑, 且边缘更加清晰.

5 结论

由白噪声所污染的图像在可分离的二维小波基下被分解, 信号能量只会集中在几个系数上, 倘若信号是分片光滑函数, 那么用小波阈值方法所得的风险就接近于最佳值. 阈值 T 可选取统一阈值或零均值正态分布的置信区间阈值, 但要根据实际情况做一定的修正, 噪声的标准差 σ 可用一种近似的方法求出. 采用改进的平移不变阈值估计算法可获得比标准的阈值估计更高的 PSNR, 更重要的是该方法消除了图像边缘的振荡, 明显地改善了图像的视觉质量. 阈值方法还可以用到诸如信号存储、反卷积之类复杂问题中, 它可以通过寻找最佳基、使用追踪算法等自适应方法来改进阈值计算的性能.

参考文献

- 1 Stéphane Mallat 著, 杨力华, 戴道清译. 信号处理的小波导引. 北京: 机械工业出版社, 2002. 340 ~ 354
Stéphane Mallat. A Wavelet Tour of Signal Processing. Beijing: China Machine Press. 2002. 340 ~ 354
- 2 Ding Xuxing, Zhu Rihong, Li Jianxin. An Adaptive Wavelet Transform via Lifting for Image Compression. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(2): 225 ~ 228
- 3 丁兴号, 邓善熙. 基于小波包的图像去噪方法. 电子测量与仪器学报, 2003, **17**(2): 35 ~ 39
Ding X H, Deng S X. *Journal of Electronic Measurement and Instrument*, 2003, **17**(2): 35 ~ 39
- 4 Donoho D, Johnstone I. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. *Biometrika*, 1994, **81**(12): 425 ~ 455
- 5 刘卫光, 周利华. 基于小波概率估计的图像融合方法研究. 光子学报, 2004, **33**(1): 101 ~ 104
Liu W G, Zhou L H. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(1): 101 ~ 104
- 6 Donoho D, Johnstone I. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage. *J American Statist Assoc*, 1995, **90**: 1200 ~ 1224
- 7 杨静, 王岩飞, 刘波. 一种新的非抽取提升结构小波变换图像融合算法. 光子学报, 2004, **33**(6): 727 ~ 730
Yang J, Wang Y F, Liu B. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(6): 727 ~ 730

Noisy Image Estimation With Translation Invariant Wavelet Thresholding

Wu Dongmei

Communication and Information Institute, Xi'an University of science and technology, Xi'an 710054

Received date: 2004-09-23

Abstract The simple thresholding algorithm in a wavelet basis is almost optimum nonlinear estimation. For piecewise smooth signal, the risk with wavelet thresholding is nearly the best value. The PSNR of Estimation with standard wavelet thresholding is enhanced, but edges of the picture are influenced by Gibbs's surge, so the visual quality is lower. With a advanced translation invariant wavelet thresholding algorithm, the higher PSNR of Estimation is obtained, and it is more important to improve the visual quality of Estimation.

Keywords Image estimation; Wavelet thresholding; Translation-invariant thresholding



Wu Dongmei was born in 1964, in zhejiang Province. She received her M. S. degree from NanJing University of Science and Technology in 1988. Now she is a associate professor of Xi'an University of science and technology. Her current research interest is digital signal processing and Image processing.