

# 多重散射理论声光耦合波方程的龙格-库塔法数值分析\*

朱京平<sup>1,2</sup> 李阳<sup>1</sup> 唐锐歆<sup>2</sup> 侯洵<sup>1,2</sup>

(1 中国科学院西安光学精密机械研究所, 西安 710068)

(2 西安交通大学电信学院, 西安 710049)

**摘要** 提出利用直观、方便且具有普遍性的4阶龙格-库塔(R-K)方法求解基于多重散射理论推导出的声光耦合波方程,模拟计算布喇格衍射下衍射效率随各关键参数的变化关系,分析入射光偏离 Bragg 角对 Bragg 衍射光效率的影响程度,以及最佳 Bragg 衍射效率所需参数的选取问题. 模拟结果表明:  $Q$  (Klein-Cook 参数) =  $4\pi$  时 Bragg 衍射效率可达 97%,证实了特征长度作为选取声光相互作用长度的合理性.

**关键词** 龙格-库塔法;数值分析;耦合波方程;声光布喇格衍射

**中图分类号** O426.3;TN76 **文献标识码** A

## 0 引言

声光器件有着广泛的应用. 主要有:空间光调制、图像处理的光外差系统、混和光学的双稳系统和光束偏转系统、光谱分析和光信号处理、激光印刷、雷达波谱分析、激光器主动锁模、激光打印、激光记录<sup>[1-5]</sup>等.

Klein 和 Cook 给出了 Raman Nath 衍射和 Bragg 衍射的近似解析解,又给出了其他几种情况下的数值解<sup>[6]</sup>. 由数值解,他们给出了 Bragg 衍射的条件. 文献[7]由此条件引出声光调制器的特征长度概念. 这些研究结果长期以来被广泛引用并被当作声光器件设计的理论依据. 但是,我们发现已有工作仍存在着一些问题. 首先,对 Bragg 近似解析解,由于在近似过程中丢掉了除 0 级和 1 级的其他级次,得出了衍射一级光效率为 1,存在着一定的误差;其次,由 Bragg 衍射的条件引出的声光器件特征长度的概念不明确,会对应用者产生误导. 在 1980 年, Korpel 和 Poon 发展出了一套通用的多重平面波散射理论<sup>[8]</sup>. 他们用角平面波和多重散射模型来描述声光互作用. 在二坐标系中较小的 Bragg 角根据平面波理论推导出描述强声光互作用的耦合波方程. 文献[7]根据理想 Bragg 和 Raman-Nath 条件得到了耦合波方程的近似解,并用差分算法得到了考虑多级衍射光耦合波方程的数值解. 多重平面波散射理论在声光互作用的其他方面得到了广泛的应用. 如:双频下的声光 Bragg 衍射<sup>[9]</sup>、双稳态声光器件模拟<sup>[10]</sup>等.

众所周知,声光器件几乎具有电光器件所具有的功能,且一个声光器件又具有多种功能,这是电光器件所望尘莫及的<sup>[11]</sup>. 随着光电子技术的发展,声光器件的应用将会越来越广泛,所以,寻找一种简单的求解声光耦合波方程的方便方法将是有意義的. 本文应用直观方便且具有普遍性的 R-K 方法,借助计算机,对多重散射理论导出的声光耦合波方程进行求解,计算出了近似 Bragg 衍射条件下 Bragg 衍射光的衍射效率随着参数  $\alpha$  (峰值相位延迟)、 $\phi_{inc}/\phi_B$  (归一化角度)、 $Q$  (Klein-Cook 参数)的变化情况. 针对工程实现时入射角很难严格满足 Bragg 角的情况,分析了入射光偏离 Bragg 角对 Bragg 衍射光效率的影响程度. 同时,还分析了最佳 Bragg 衍射效率所需参数的选取问题,以对器件优化设计提供帮助. 另外,针对文献[12]提出声光器件设计所依据的  $L=2L_0$  不合理的说法,本文通过数值模拟分析,证实了  $L=2L_0$  的合理可行性.

## 1 多重平面波散射理论的数学表达及 R-K 方法

多重平面波散射理论已经被用在描述动态声光互作用过程. 多重平面波散射理论的基础是:光场和声场可以分解成无数的角平面波. 在数学上可用耦合微分方程组(1)来表示<sup>[9]</sup>

$$\frac{dE_n}{dz} = \frac{-j\alpha}{2} \left\{ e^{-j\frac{1}{2}[\frac{\phi_{inc}}{\phi_B} + (2n-1)]Qz} E_{n-1} + e^{j\frac{1}{2}[\frac{\phi_{inc}}{\phi_B} + (2n+1)]Qz} E_{n+1} \right\} \quad (1)$$

边界条件为:在  $z \leq 0$  时,  $E_n = E_{inc} \delta_{n0}$ ,  $\delta_{n0}$  是克罗内克符号,  $E_n$  是频率为  $\omega_n = \omega_0 + n\Omega$  在  $\phi_n = \phi_{inc} + 2n\phi_B$  方向上光波的复振幅.  $n$  为射级,可以取正数也可以

\*国家自然科学基金资助项目(60007006,60377020)  
Tel:029-88559520 Email:jpzhu@xjtu.edu.cn  
收稿日期:2004-04-06

取负数,所以 $E_n$ 可以代表上移和下移的衍射级.  
 $\sin \phi_B = K/2k = \lambda_m/2\Lambda$ ,  $K$  和  $k$  分别为声波和光波的传播常数,  $\Lambda$  和  $\lambda_m$  分别为声波和光波在介质中的波长,  $\phi_B$  为布喇格角,  $\phi_{inc}$  是入射平面波  $E_{inc}$  的入射角,  $\alpha$  是峰值相位延迟, 表达式为

$$\alpha = \frac{Ck_m SL}{2} = \frac{(\Delta n_0)_{max}}{n_0} k_m L \quad (2)$$

式中,  $C$  是与弹光系数  $p$  相关的常数,  $C = -n_0^2 p$ ,  $S$  是声场的振幅,  $L$  是声光相互作用长度与声场的有效宽度相近, 光沿  $z$  向传播,  $\xi = z/L$  是在声光相互作用区的归一化坐标.  $(\Delta n_0)_{max} = n_0 CS/2$ ,  $n_0$  是介质在没有加声场的平均折射率.

$Q$  (也被称为 Klein-Cook 参数) 是描述声光相互作用的重要参量, 定义为

$$Q = \frac{LK^2}{k_m} = \frac{2\pi\lambda_m L}{\Lambda^2} \quad (3)$$

多重散射理论的物理含义是,  $n$  级衍射光  $E_n$  由低一级衍射光  $E_{n-1}$  和高一级衍射光  $E_{n+1}$  散射产生. 这就等于假设不同级次的光只同相邻的光发生耦合.

方程(1)在  $Q \rightarrow 0$  时, 为理想 Raman-Nath 衍射, 具有解析解; 当  $Q \rightarrow \infty$  时, 除了  $E_0$  和  $E_1$  之外, 其他级衍射光都为 0, 这就是理想的 Bragg 衍射, 此时, 方程(1)的解为

$$E_0 = E_{inc} \cos(\alpha\xi/2) \quad (4)$$

$$E_1 = E_{inc}(-j) \sin(\alpha\xi/2) \quad (5)$$

$Q$  介于 0 和  $\infty$  之间时, 方程(1)无解析解, 必须用数值方法求解. 本文用 4 阶龙格-库塔(R-K)方法解上述耦合波方程<sup>[12]</sup>, 算法流程见图 1.

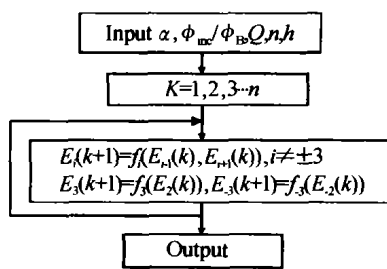


图 1 用 R-K 方法求解耦合波方程的流程图  
 Fig. 1 Calculation flow of R-K used in solving the coupled wave equation

## 2 数值结果及讨论

这里提出的 R-K 解法具有通用性, 它能求出各级衍射光的解, 本文考虑到  $\pm 3$  级. 从分析可以看出, R-K 算法的解由三参数  $\alpha$ 、 $\phi_{inc}/\phi_B$ 、 $Q$  决定, 这 3 个参数都是无量纲的量. 对于一定的实验条件, 三参数确定, 对应的解也就确定, 而三参数则由其对应表达式里的物理参数决定. 对任意一组确定的物理参数, 都能求出确定的解, 因此它能给出任意衍射级.

R-K 解法可利用计算机实现, 并能达到很好的近似程度. 应用求解程序解方程时, 可以根据需要求出所需的任意级的解.

对 Bragg 衍射, 由于解析解仅考虑零级和一级衍射光而忽略其他各级衍射光的影响, 由此得出以 Bragg 入射且  $\alpha = \pi$  时, 一级光的衍射效率为 1. 但 R-K 解法考虑了多级衍射光的影响, 因而一级效率不可能为 1. 例如, 在理想无损介质条件下, 当  $Q = 16\pi$ 、 $\xi = \pi$ 、 $\phi_{inc}/\phi_B = -1$  时, R-K 解法得到的一级光的衍射效率 99.81% (考虑共有 7 级衍射光的情况).

图 2 反映了在理想无损介质条件下, Bragg 衍射光的衍射效率  $\eta$  随峰值相位延迟  $\alpha$  之间的关系. 从图中可以看出: 在 Bragg 入射的情况下,  $+1$  级光的衍射效率随着  $\alpha$  是正弦变化的, 当  $\alpha = \pi$  时  $\eta$  达到最大值 97%.

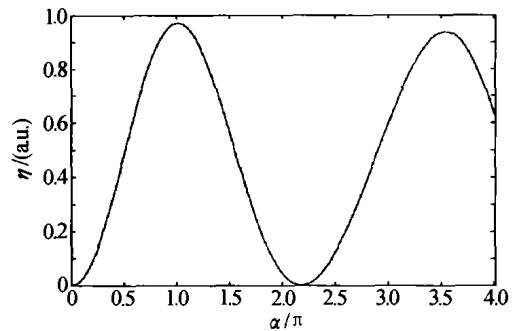


图 2 当  $Q = 4\pi$ 、 $\phi_{inc}/\phi_B = -1$  时, Bragg 衍射光的衍射效率随  $\alpha$  的变化情况

Fig. 2 When  $Q = 4\pi$ ,  $\phi_{inc}/\phi_B = -1$ , the efficiency of Bragg diffraction light varies with  $\alpha$

图 3 表示  $\alpha = \pi$ 、 $\phi_{inc}/\phi_B = -1$  时, Bragg 衍射光衍射效率  $\eta$  随参数  $Q$  的变化关系. 从图中我们可以得到, 当  $Q = 2\pi$  时 Bragg 衍射光的衍射效率为 90.1%; 而当  $Q = 4\pi$  时衍射效率为 97%, 有 3% 的能量分布在其他衍射级上.

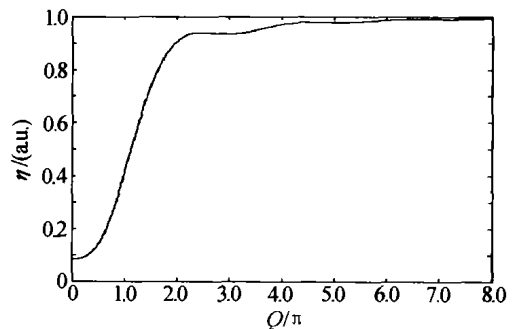


图 3 当  $\alpha = \pi$ 、 $\phi_{inc}/\phi_B = -1$  时, Bragg 衍射光的衍射效率随  $Q$  的变化情况

Fig. 3 When  $\alpha = \pi$ ,  $\phi_{inc}/\phi_B = -1$ , the efficiency of Bragg diffraction light varies with  $Q$

$Q = 2\pi$  对应  $L = L_0 = \Lambda^2/\lambda$ , 也就是声光器件设计时常用到的特征长度, 一般声光器件中换能器长度选为  $L = 2L_0$ . 从模拟结果可以看出: 声光器件选取  $L = 2L_0$  时, Bragg 衍射效率已经达到 97%, 如果

再增加  $L$ , 虽然衍射效率也会有相应的增加, 但增加幅度很小, 考虑到的增加还会引起介质损耗的增加, 因而  $L = 2L_0$  的选择是合理可行的.

图 4 为 Bragg(一级) 衍射光的衍射效率随归一化角度的变化关系.

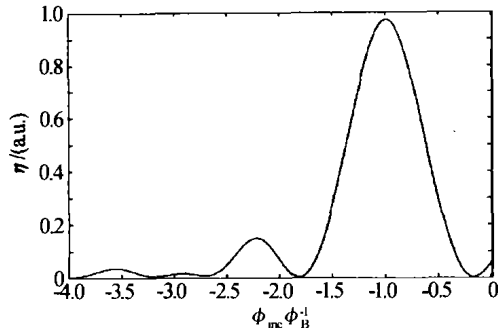


图 4 当  $Q = 4\pi, \alpha = \pi$  时, Bragg 衍射光的衍射效率随  $\phi_{\text{inc}} \phi_{\text{B}}^{-1}$  的变化情况

Fig. 4 When  $Q = 4\pi, \alpha = \pi$ , the efficiency of Bragg diffraction light varies with  $\phi_{\text{inc}} \phi_{\text{B}}^{-1}$

从模拟结果可以看出: 1) 当  $\phi_{\text{inc}}/\phi_{\text{B}} = -1$  时衍射效率最大为 97.1%; 2) 当  $\phi_{\text{inc}}/\phi_{\text{B}}$  介于 -1.12 和 -0.86 之间时, 一级的衍射效率都在 90% 以上. 因为  $\phi_{\text{B}} = \arcsin(\lambda/2\Lambda)$ ,  $\lambda \ll \Lambda$ , 所以  $\phi_{\text{B}}$  的值一般很小, 严格满足 Bragg 角只是理想情况. 为了尽最大的可能提高衍射效率, 要使人射角尽可能的接近 Bragg 角, 这样衍射一级效率虽说受到一定影响, 但对系统效率的影响不会很大.

在设计声光器件时, 光波长  $\lambda_m$  一般是确定的, 由此可以得出声光 Bragg 衍射器件的设计步骤:

① 选择合适的声光晶体, 确定晶体的切割方向

这样就决定了晶体的弹光系数  $p$ 、品质因素  $M$  和声波波速  $v$ .

② 选择叉指换能器长度

考虑到高频的声光器件成本比低频的要高的多, 因而无需盲目地追求高  $Q$  值, 这样, 在特定的声波频率下, 根据  $Q = 4\pi$ , 就能够确定声光叉指换能器的最优长度

$$L = 2L_0 = \frac{2\Lambda^2}{\lambda_m} = \frac{2f^2}{\lambda_m v^2} \quad (6)$$

③ 选取合适的激发源参数, 使得峰值相位延迟达到最优值  $\alpha = \pi$

从图 1 中可以看出,  $P_A$  的改变可以实现对一级衍射光实现强度调制. 由式(2)可得

$$\alpha = \frac{(\Delta n_0)_{\text{max}} k_m L}{n_0} = \frac{\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{2ML}{h}} \sqrt{P_A} \quad (7)$$

式中,  $h$  为叉指换能器厚度,  $P_A$  为激发声场功率. 于是, 入射光波长一定时, 可以通过选取适当的激励源的功率来确定  $\alpha$ .

### 3 结论

求解由多重平面波散射理论推导出的正常声光相互作用耦合波方程的 R-K 解法直观方便且具有普遍性. 模拟计算结果表明, 对  $Q = 4\pi, \alpha = \pi$  并以严格的 Bragg 角入射时, 衍射的效率可达 97%. 本文用数值计算的方法验证了以往文献提出的声光器件特征长度概念的合理性, 指出了一般声光器件设计参数选取方法. 这对声光器件的设计具有重要的指导意义.

#### 参考文献

- 曹跃祖. 声光效应原理及应用. 物理与工程, 2000, 10(5): 46 ~ 50  
Cao Y Z. *Physics and Engineering*, 2000, 10(5): 46 ~ 50
- Miller D A B. Bistable optical devices, physics and operating characteristics. *Laser Focus World*, 1982, (4): 79 ~ 85
- Poon T C. Canning holography and two-dimensional image processing by acousto-optic two-pupil synthesis. *JOSA*, 1980, 7: 871 ~ 885
- Korpel A. *Acousto-Optics*. Marcel-Dekker, New York, 1988
- Gottlieb M, Ireland G L M, Levy J N. *Electro-Optic and Acousto-Optic Scanning and Deflection*. Marcel-Dekker, New York, 1983
- Klein W R, Cook B D. Unified approach to ultrasonic light diffraction. *IEEE trans Sonic and Ultrasonics*, 1967, 14(3): 123 ~ 140
- Chen S T, Chatterjee M R. A numerical analysis and expository interpretation of the diffraction of light by ultrasonic waves in the Bragg and Raman-Nath regimes using multiple scattering theory. *IEEE Transactions on Education*, 1996, 39: 56 ~ 68
- Korpel A, Poon. Explicit formalism for acousto-optic multiple plane wave scattering. *JOSA*, 1980, 9: 817 ~ 830
- Appel R K, Somekh M G. Series solution for two-frequency Bragg interaction using the Korpel-Poon multiple-scattering model. *JOSA*, 1993, 10: 466 ~ 498
- Cont A, Poon T C. Simulations of bistable acousto-optic devices using matlab. *IEEE*, 2003, 0-7803-7697-8/03
- 徐介平. 声光器件的原理、设计和应用. 北京: 科学出版社, 1982, 1 ~ 363  
Xu J P. *The principle, Design and Application of Acousto-optic Device*. Beijing: Publishing Company of Science, 1982, 1 ~ 363
- 黎永航, 蔡懿, 郑国梁, 等. 声光效应拉曼-内斯方程矩阵级数解法及声光调制器优化设计. *中国激光*, 2002, 29: 595 ~ 601  
Li Y H, Cai Y, Zheng G L, et al. *Chinese Journal of Lasers*, 2002, 29: 595 ~ 601
- 李有法. 数值计算方法. 北京: 高等教育出版社, 1984.

121 ~ 143

Company of Higher Education, 1984, 121 ~ 143

Li Y F. Numerical Calculation Method. Beijing: Publishing

## Numerical Analysis of Coupled-wave Equation Derived from Multiple Scattering Theory Using Runge-Kutta Method

Zhu Jingping<sup>1,2</sup>, Li Yang<sup>1</sup>, Tang Ruixin<sup>2</sup>, Hou Xun<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics (XIOPM), CAS, Xi'an 710068

<sup>2</sup> School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049

Received date: 2004-04-06

**Abstract** Fourth-order Runge-Kutta method was proposed to solve the acousto-optic couple-wave equation derived from the multiple scattering theory. Bragg diffraction efficiency varying with the key parameters was numerical simulated. The relation between the Bragg diffraction efficiency and the incidence light which was deflected from the exact Bragg incidence angle was analyzed. The optimal parameters selected according to the Bragg diffraction efficiency was discussed too. The numerical simulation result showed that, when  $Q = 4\pi$ , the Bragg diffraction efficiency was 97%, this was coincident with the traditional characteristic length.

**Keywords** Runge-Kutta Method; Numerical simulation; Coupled-wave equation; Acousto-optic Bragg diffraction

**Zhu Jingping** Ph. D, was born in 1967, Professor of Xi'an Jiaotong University, Postdoctor of Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics (XIOPM) of CAS. She is engaged in research on integrated optics, passive devices in fiber communication, fiber sensor.

