

高阶非线性薛定谔方程的一个新型孤波解*

田晋平^{1,2} 何影记² 周国生²

(1 山西大学现代教育技术中心计算中心, 山西太原 030006)

(2 山西大学物理电子工程学院电子信息系, 山西太原 030006)

摘要 给出了高阶非线性薛定谔方程的一个新型孤波解, 该解描述了满足一定参数条件时光纤中超短光脉冲的传输, 解的表达式可以表示为亮孤子和暗孤子和的形式. 同时利用分步傅里叶方法在一定微扰条件下对脉冲传输进行了数值模拟.

关键词 光纤; 高阶非线性薛定谔方程; 组合孤波解

中图分类号 O437 **文献标识码** A

0 引言

当今信息高速公路已经成为一个热门讨论的话题, 在光通信领域, 光孤子通信系统的重要性也越来越被人们意识到. 由于光孤子本身固有的特性使其成为长距离大容量传输信息的良好载体, 最近对超短光脉冲的研究发现, 利用光孤子进行通信可以克服线性波传输系统在距离和速度上的限制^[1]. 我们知道, 描述皮秒光孤子非线性色散光纤中传输的一个完全可积模型是非线性薛定谔方程(NLS), 其中只考虑了群速度色散(GVD)和自相位调制^[2]. 对于亚皮秒和飞秒级的光孤子, 高阶效应的影响将变得非常重要, 此时系统要由高阶非线性薛定谔方程(HNLS)来描述^[3,4], 其中高阶效应包括三阶色散(TOD), 自陡峭(SSP)和自频移. M. Stern等的研究发现, 二阶和三阶色散引起的脉冲展宽可以用光栅对来补偿^[5]. 自陡峭效应使光脉冲的边缘出现震荡, 导致脉冲的频谱不对称展宽^[6,7]. 由于喇曼散射引起的自频移效应导致脉冲频谱红移^[8], 这对于光孤子通信是有十分害的^[9]. 近年来, 许多科研人员都从不同的方向分析研究了HNLS^[10,11], 并且得到一系列的数值解, 包括亮孤子和暗孤子, 我们的研究小组还分别于2000年和2002年发现了两种新型的组合孤子^[12-15].

本文仍然从研究HNLS作为出发点, 通过一系列的计算, 我们又发现了一种完全不同的新型组合孤子, 通过数值演化, 发现在一定的参数条件下, 该组合孤子仍然可以在光纤中稳定传输. 本文第二部分将详细介绍我们的计算和数值演化过程.

1 数学模型和数值演化

描述飞秒光脉冲传输的HNLS可以写为

$$\frac{\partial U}{\partial z} = i(a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + a_2 |U|^2 U) + a_3 \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + a_4 \frac{\partial |U|^2 U}{\partial t} + a_5 U \frac{\partial |U|^2}{\partial t} \quad (1)$$

式中 U 是电场的复包络, a_1 是二阶色散参数, a_2 是自相位调制参数, a_3 是三阶色散参数, a_4 是自陡峭参数, a_5 是自频移参数.

现在我们开始分析方程(1). 首先假设方程有如下形式的解

$$U(z, t) = A(z, t) \exp(-i\phi_L(z, t)) = A(z, t) \cdot \exp[-i(kz - ht)] = [i\beta + B_1 \operatorname{sech}(\eta_1 t - \zeta_1 z) + B_2 \tanh(\eta_2 t - \zeta_2 z)] \exp[-i(kz - ht)] \quad (2)$$

式中 $A(z, t)$ 表示振幅的复包络, $\phi_L(z, t) = kz - ht$ 为线性相移函数. 相应的振幅可表示为

$$|A(z, t)| = \{\beta^2 + [B_1 \operatorname{sech}(\eta_1 t - \zeta_1 z) + B_2 \tanh(\eta_2 t - \zeta_2 z)]^2\}^{1/2} \quad (3)$$

非线性相移可表示为

$$\phi_{NL}(z, t) = \arctan \left[\frac{\beta}{B_1 \operatorname{sech}(\eta_1 t - \zeta_1 z) + B_2 \tanh(\eta_2 t - \zeta_2 z)} \right] \quad (4)$$

当 $B_1 = 0$ 或者 $B_2 = 0$ 时, 方程解的形式根据 β 值是否为零变为有或者没有平台的亮、暗孤子解. 本文我们只考虑 B_1, B_2 都不为零的情形. 将试探解(2)代入方程(1), 合并各独立的同类项可以得到一组关于 $\operatorname{sech}^m(\eta_1 t - \zeta_1 z)$ 、 $\tanh^n(\eta_1 t - \zeta_1 z)$ 、 $\tanh^l(\eta_2 t - \zeta_2 z)$ 以及其独立乘积项的方程组, 这些方程严格确定了原方程存在假设解(2)时的参数关系, 通过分析这些方程得到 B_1, B_2 都不为零时, 原方程确实存在(2)所示形式的组合孤子解, 其中各参数满足如下关系

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, a_3 = 0, \beta = 0, \zeta_1 = 0, \\ \zeta_2 &= 0, k = 0, 2a_5 + 3a_4 = 0, \\ a_2 + a_4 h &= 0, B_1, B_2, \eta_1, \eta_2 \text{ 理论上为任意非零常} \end{aligned}$$

数. 此时解的形式变为

$$U(z, t) = [B_1 \operatorname{sech}(\eta_1 t) + B_2 \tanh(\eta_2 t)] \cdot \exp(iht) \quad (5)$$

可见,方程的解确实可以表示为一个亮孤子和一个暗孤子的和并且脉冲形式不随传输距离变化. $\beta=0$ 意味着该组合孤子解不可能有平台且非线性相移为零, $\zeta_1=0, \zeta_2=0, k=0$ 表明孤子传输过程中反向群速度和线性相移都不随传输距离变化, $a_1=0, a_3=0$ 意味着群速度色散和三阶色散必须互相补偿,才能形成和保持这种形状的光孤子脉冲,这可以解释如下:

一般地,同时补偿 GVD 和 TOD 在光学系统中是很困难的,但是在实际的系统中使其达到最优却是完全可能的.最近 Chang, Sardesai 和 Weiner^[16]成功地设计出的一种锁模激光器和啁啾脉冲放大器,就可以在补偿 GVD、TOD 和其它高阶效应的情况下在几飞秒甚至更窄的脉宽下工作.在这样的系统里,补偿色散的常用工具包括光栅对、棱镜序列、啁啾绝缘镜(chirped dielectric mirrors),都被用来平衡 GVD 和高阶色散.在飞秒光脉冲的长距离传输中,还可以用色散补偿光纤(DCF)来补偿 GVD 和标准单模光纤的三阶色散,目前已实现低于 500 fs 的脉冲稳定传输几千公里而只有很小的吸收损耗,并且人们还用可编程的脉冲整形器来消除残留的三阶色散,由此来完全恢复初始脉冲形状.

为了研究该组合孤子解的稳定性,我们用分步傅里叶方法进行了 80 个色散长度的数值模拟,发现其可以稳定传输,结果如图 1 所示,其中各参数取值

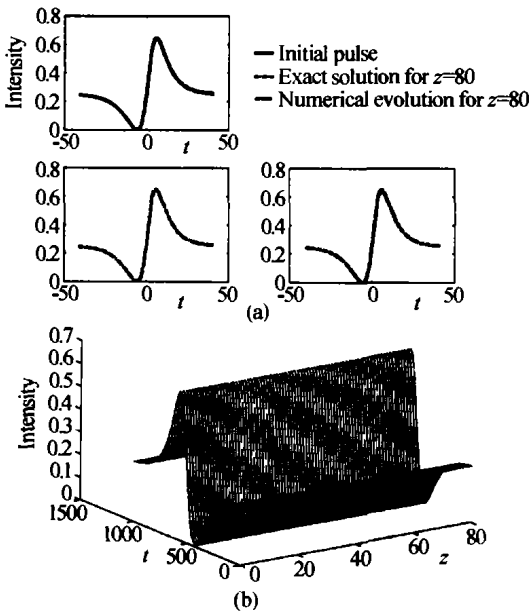


图 1 (a) 组合孤子的形状,分别为初始脉冲,传输 80 个色散长度后的精确和数值解;(b) 组合孤子传输 80 个色散长度的数值演化图

Fig. 1 (a) Shapes of initial pulse, exact and numerical solution after propagating 80 dispersion length; (b) Numerical evolution for 80 dispersion length

如下

$$a_4 = -0.004, a_2 = 1, \eta_1 = 1/8, \eta_2 = 1/5, B_1 = B_2 = 1/2.$$

我们还在数值模拟中加入微扰,图 2(a)是对条件 $2a_5 + 3a_4 = 0$ 加入微扰后的结果,计算中取 $a_5 = -3a_4/2 \times 1.1$. 从图中可以看到,此时的脉冲仍然可以稳定传输.图 2(b)是对条件 $a_2 + a_4 h = 0$ 加入微扰后的结果,计算中取 $h = -a_2/a_4 \times 0.95$. 从图中可以看到,此时脉冲已经开始产生色散拖尾了,但基本形状仍然是稳定的.

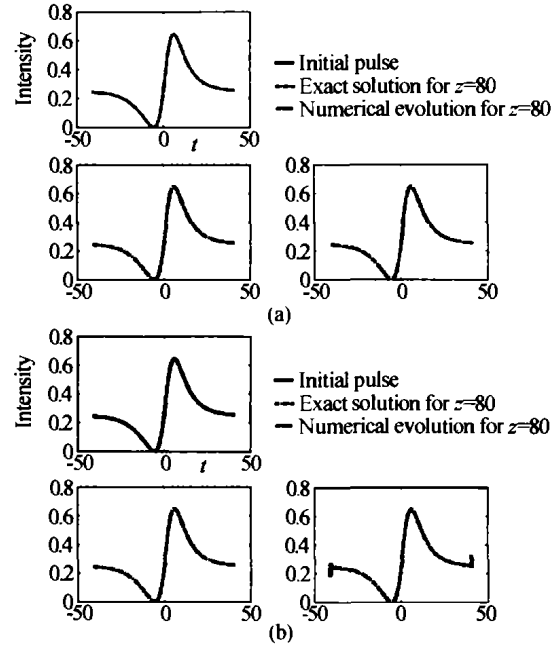


图 2 (a) 参数 a_5 加入 10% 微扰后组合孤子脉冲形状,分别为初始脉冲,传输 80 个色散长度后的精确和数值解;(b) 参数 h 加入 5% 微扰后组合孤子脉冲形状,分别为初始脉冲,传输 80 个色散长度后的精确解和数值解

Fig. 2 (a) Shapes of initial pulse, exact and numerical solution after propagating 80 dispersion length by adding 10% perturbation to parameter a_5 ; (b) Shapes of initial pulse, exact and numerical solution after propagating 80 dispersion length by adding 5% perturbation to parameter h

文中各参数和图中坐标都已经进行了归一化处理,其中纵坐标表示脉冲强度, t 表示归一化的时间, z 表示归一化的传输距离.

2 结论

就高阶非线性薛定谔方程进行了详细的分析求解,得出满足一定参数条件的一类新型的组孤波解.这种形式的组孤波解不同于我们小组在参考文献[13]、[14]中得出的两种组和孤波解,因而我们认为这可能在光纤通信、激光器或者其它领域有着潜在的应用价值.

参考文献

- 1 Hasegawa A, Kodama Y. Solitons in optical Communications. Oxford: Oxford University Press, 1995. 1 ~ 505
- 2 Agrawal GP. Nonlinear Fiber Optics. San Diego: Academic Press, 1989. 21 ~ 239
- 3 Kodama Y. Optical solitons in a monomode fiber. *J Stat Phys*, 1985, **39**: 597 ~ 614
- 4 Kodama Y, Hasegawa A. Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide. *IEEE J Quantum Electron*, 1987, **23**(5): 510 ~ 524
- 5 Stern M, Heritage J P, Chase E W. in: Conference on Laser and Electro-Optics, Vol. 7 of 1990 OSA Technical Digest Series (Optical Society of America, Washington, D. C., 1990), P56
- 6 de Oliveria J R, de Moura M A, Hickmann J M, et al. Self-steepening of optical pulses in dispersive media. *J Opt Soc Am B*, 1992, **9**(11): 2025 ~ 2027
- 7 de Oliveria J R, de Moura M A. Analytical solution for the modified nonlinear Schrödinger equation describing optical shock formation. *Phys Rev E*, 1998, **57**(4): 4751 ~ 4756
- 8 Mitschke F M, Mollenauer L F. Selective stimulated Raman scattering in highly P₂O₅-doped silica single-mode fibers. *Opt Lett*, 1986, **11**(10): 656 ~ 658
- 9 Hirota R. Exact envelope-soliton solution of a nonlinear wave equation. *J Math Phys*, 1973, **14**: 805 ~ 809
- 10 田慧平, 王涛, 李仲豪, 等. 非秒光孤波传输系统中自频移的抑制. *光子学报*, 2003, **31**(Z2): 75 ~ 78
- Tian H P, Wang T, Li Z H, et al. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **31**(Z2): 75 ~ 78
- 11 Tian Huiping, Tian Jinping, Li Zhonghao, et al. Exact solutions for extended higher order nonlinear Schrödinger equation including Raman self-frequency shift. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(4): 427 ~ 432
- 12 Bo Mingxia, Tian Huiping, Li Zhonghao, et al. Optical solitary wave solution for coupled higher order nonlinear Schrödinger equation. *Acta Photonica Sinica*, 2002, **31**(11): 1352 ~ 1356
- 13 田慧平, 李仲豪, 王钢, 等. 高阶非线性薛定谔方程新一类孤波解的传输稳定性分析. *光子学报*, 2000, **29**(Z1): 369 ~ 372
- Tian H P, Li Z H, Wang G, et al. *Acta Photonica Sinica*, 2000, **29**(Z1): 369 ~ 372
- 14 Li Zhonghao, Li Lu, Tian Huiping, et al. New types of solitary wave solutions for the higher order nonlinear Schrödinger equation. *Phys Rev Lett*, 2000, **84**(18): 4096 ~ 4099
- 15 Tian Jinping, Tian Huiping, Li Zhonghao, et al. An intermodulated solitary wave solution for the higher order nonlinear Schrödinger equation. *Physica Scripta*, 2003, **67**(4): 325 ~ 328
- 16 Chang CC, Sardesai H P, Weiner A M. Dispersion-free fiber transmission for femtosecond pulses by use of a dispersion compensating fiber and a programmable pulse shaper. *Opt Lett*, 1998, **23**(4): 283 ~ 285

A New Exact Solitary Wave Solution for the Higher Order Nonlinear Schrödinger Equation

Tian Jinping^{1,2}, He Yingji², Zhou Guosheng²

¹ Computer Center of Shanxi University, Taiyuan, Shanxi 030006

² Department of Electronics and Information Technology, Shanxi University, Taiyuan, Shanxi 030006

Received date: 2003-12-08

Abstract A new type of solitary wave solution for the higher order nonlinear Schrödinger equation (HNLS), which governs the propagation of subpicosecond and femtosecond optical pulses in optical fibers under certain parametric conditions, is presented. The expression of this novel solution is composed of the sum of bright and dark solitary waves. The evolution of the solitary wave and its stability under some perturbations are investigated by using the numerical simulation methods.

Keywords Optical fibers; HNLS; Combined solitary wave solution



Tian Jinping a teacher of Computer Center of Shanxi University, was born in April, 1975, in Shanxi Province, P. R. China. He earned B. Sc. from Department of Electronics and Information Technology in Shanxi University in 1997. Now he is a Ph. D. candidate in Shanxi University. His interests are in the area of ultrashort and ultrafast process in the transmission of optics.