

自由空间中超短脉冲光束的非傍轴效应分析

陆大全 胡 巍 郑一周 杨振军

(华南师范大学传输光学实验室, 广州 510631)

摘 要 在应用时间与空间傅里叶变换的基础上, 运用泰勒展开的方法, 得出了一种对多周期超短脉冲光束进行非傍轴修正的方法, 并将其应用于脉冲高斯光束. 与数值结果的比较表明, 对于束宽在波长量级的脉冲光束, 二阶修正已经很接近非傍轴精确解, 并在例子中观察到: 由于超短脉冲光束中时空耦合效应的存在, 脉冲的时间分布将会影响修正的空间分布.

关键词 脉冲光束; 非傍轴

中图分类号 O443 **文献标识码** A

0 引言

随着超强超短激光脉冲的产生及对其研究的不断深入^[1], 人们已经逐步认识到, 由于时空耦合效应的存在, 超短脉冲光束与一般单色光束的传输行为存在着很大的区别, 并且已有很多这方面的研究成果. 比如: 在自由空间中传播的超短脉冲的诸如时间微分效应、光周期缩短、脉冲的时间延迟、红移等许多效应都得到了深入的研究^[2-10]. 然而, 到目前为止所有的超短脉冲研究工作几乎都是基于标准的傍轴理论而进行的. 在一般情况下, 如果脉冲中每一频谱分量的发散角足够的小, 且束宽比波长要大得多, 傍轴理论能够较精确地描述脉冲光束的行为. 但如果频谱分量的发散角较大, 或束宽小到波长量级时, 傍轴理论的描述将会偏离精度. 此时, 有必要对光场进行非傍轴修正.

另一方面, 对于纯光束的非傍轴修正, 已经有了两类方法, 其一是 Lax 等^[11]通过运用归一化小量 $1/ka_0$ 而发展起来的微扰方法. 这里 k 为自由空间中的波矢, a_0 为光束的腰宽. 其二是 Cao 等^[12]运用级数展开的方式而发展起来的算符修正方法. 而对于脉冲, Fu 等^[13]对其进行过非傍轴修正. 但这种方法由于其给出的修正公式中包含了卷积, 使得非傍轴脉冲光束的解析形式难以得出. 另外, 虽然超短脉冲光束中有时空耦合效应的存在, 但其对于非傍轴修正有无影响, 以及有何影响, 都没得到过很好的研究.

在本文中, 在严格非傍轴方程和脉冲傍轴解的基础上, 通过运用傅立叶变换和级数展开的方法来处理非傍轴超短脉冲的自由空间传输问题. 发展了一种新的修正方法, 通过这种方法, 使得超短脉冲的傍轴解可以无限地向非傍轴解逼近. 与数值结果的

比较表明, 对于束宽在波长量级的脉冲光束, 二阶修正已经很接近非傍轴精确解, 并在例子中观察到: 由于超短脉冲光束中时空耦合效应的存在, 脉冲的时间分布将会影响其空间的非傍轴特性.

1 自由空间中多周期脉冲光束的时空非傍轴修正

在自由空间中, 脉冲光束 $E(\mathbf{r}, z, t)$ 沿 z 轴方向的传播可用波动方程

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2})E(\mathbf{r}, z, t) = 0 \quad (1)$$

来表示. 这里 $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ 为横坐标, 引入移动坐标 $t' = t - z/c, z' = z$ 对于脉冲长度大于一个振荡周期的脉冲光束, 可用其中心频率 ω_0 及包络 $\Psi(\mathbf{r}, z', t')$ 表示为: $E = \Psi(\mathbf{r}, z', t') \exp(i\omega_0 t')$ ^[7], 这里 $\omega_0 = 2\pi/T_0, T_0$ 为中心频率的振荡周期. 则方程(1)可表述为^[11]

$$[\nabla_{\perp}^2 + \partial z'^2 - 2ik_0 \partial z'(1 - \frac{i}{\omega_0} \partial t')] \Psi = 0 \quad (2)$$

这里 ∇_{\perp}^2 为横向拉普拉斯算符.

在时间频率域, 包络的频谱 $\Psi(\omega - \omega_0)$ 满足方程^[9]

$$[\nabla_{\perp}^2 + \partial z'^2 - 2ik \partial z'] \Psi = 0 \quad (3)$$

如果仅考虑脉冲光束的正向传输, 则式(3)的解可用角谱表示为

$$\Psi = \frac{1}{2\pi} \int A_0 e^{ik_{\perp} r + iz'(1 - \sqrt{1 - k_{\perp}^2/k^2})} d^2 k_{\perp} \quad (4)$$

这里 $k_{\perp} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y, A_0$ 为电场 $\Psi(\mathbf{r}, z', \omega - \omega_0)$ 在 $z' = 0$ 处的空间傅里叶变换.

理论上, 由式(4), 可以通过一个时间反傅里叶变换得到时域中的电场 Ψ . 但是, 由于数学上的困难, 很难直接得出解析解. 不过, 在傍轴解 $\Psi^{(p)}$ 已知的情况下, 可以用泰勒展开的方法得出其非傍轴近似解.

当傍轴条件 $|\partial z' \Psi| \ll |k \Psi|$ 满足时, 式(3) 可表示为

$$[\nabla_{\perp}^2 - 2ik\partial z'] \Psi = 0 \quad (5)$$

从式(5) 易知, 傍轴条件还可表示为 $|\nabla_{\perp}^2 \Psi| \ll |k^2 \Psi|$, 在空间频率域, 这一关系亦可表示为 $\eta^2 = k_{\perp}^2/k^2 \ll 1$. 从数学的角度看, 可通过泰勒展开的方法将积分式(4) 展开到 η^2 的任意阶以得到近似非傍轴解. 当傍轴条件满足时 $\sqrt{1 - k_{\perp}^2/k^2} \approx 1 - k_{\perp}^2/(2k^2)$, 式(4) 可写为

$$\Psi^{(p)} = \frac{1}{2\pi} \int A_0 e^{ik_{\perp} r + iz' k_{\perp}^2/(2k)} d^2 k_{\perp} \quad (6)$$

这也就是傍轴式(5) 的标准积分解.

当傍轴条件 $\eta^2 \ll 1$ 变弱时, 需要保留式(4) 中泰勒展开式中的更高一阶(即 η^2 这一阶) 以描述其非傍轴性质, 这时电场

$$\Psi = \frac{1}{2\pi} \int A_0 e^{ik_{\perp} r + iz' k_{\perp}^2/(2k) + iz' k_{\perp}^4/(8k^3)} d^2 k_{\perp} \quad (7)$$

引入近似 $\exp[iz' k_{\perp}^4/(8k^3)] \approx 1 + iz' k_{\perp}^4/(8k^3)$, 式(7) 变为

$$\Psi = \left[1 + \frac{1}{8} ikz' \left(\frac{\nabla_{\perp}^2}{k^2} \right)^2 \right] \Psi^{(p)} \quad (8)$$

因为考虑的是多周期脉冲, 因此对于大部分频谱分量而言, $|\Delta\omega| = |\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ ^[7], 因此可以引入近似 $1/k \approx [1 - (\omega - \omega_0)/\omega_0] k_0$. 运用式(5) 及时间反傅里叶变换, 则可由方程(8) 得到时域中的非傍轴近似解

$$\Psi = \left[1 - \frac{iz'}{2k_0} \left(1 + \frac{i}{\omega_0} \partial_{z'} \right) \partial_{z'}^2 \right] \Psi^{(p)} \quad (9)$$

式(9) 是脉冲光束的一阶非傍轴近似解. 与文献[10] 中的式(18) 相比, 式(9) 多了一项 $(i/\omega_0) \partial_{z'}$, 这正是脉冲的时空耦合效应存在于脉冲非傍轴修正中的具体表现.

需要注意的是, 在式(9) 的推导过程中, 应用了对多周期脉冲光束才适用的脉冲光束表达方式 $E = \Psi(\mathbf{r}, z', t') \exp(i\omega_0 t')$ 及不等式 $\Delta\omega \ll \omega_0$, 因此, 对于脉冲长度在一个周期以下的脉冲光束, 式(9) 是不适用的. 由量级关系 $\partial_{z'} \Psi^{(p)} \sim (1/z_R) \Psi^{(p)}$, $(i/\omega_0) \cdot \partial_{z'} \Psi^{(p)} \sim (2n' \pi) \Psi^{(p)}$ (这里 $n' = \Delta t/T_0$ 是一个脉冲 Δt 内的振荡周期数). 因此, 在传输距离不是很长(几个瑞利距离之内) 的情况下, 修正的大小 $\Delta\Psi = \Psi - \Psi^{(p)} \sim \Psi^{(p)}/(k_0 a_0)^2$, 因此, 对于束宽在其中心频率的波长量级的脉冲光束, 修正精度已达到 $\Delta\Psi \sim \Psi^{(p)}/(2\pi)^2$, 在此情况下, 考虑一阶修正已基本能满足描述束宽在波长量级的脉冲光束的需要.

当然, 如果需要, 可以保留泰勒展开中比 η^4 更高的阶以提高修正精度, 在这里, 作为一种极端情

况, 保留式 $\sqrt{1 - k_{\perp}^2/k^2}$, e^x , $1/k$ 泰勒展开式的所有项, 得到了时域中脉冲的完整非傍轴修正表达式

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n \quad (10)$$

这里

$$\Psi_n = \sum_{m=2l=0}^{\infty} \sum_{n!} \frac{(iz')^n}{n!} \left\{ (-2i)^m \frac{(2m-3)!!}{(2m)!!} \cdot \left[\frac{\partial_{z'}^m}{k_0^{m-1}} \left(\frac{i}{\omega_0} \partial_{z'} \right)^{l(m-1)} \right] \right\} \Psi^{(p)} \quad (11)$$

当然, 在实际应用中, 不可能在式(10) 中取无穷多项作计算, 因此, 可以根据需要而截断 n 于合理的值 N 处, 使之成为一个实用的公式. 考虑到在量级上, $\partial_{z'} \Psi^{(p)} \sim (1/z_R) \Psi^{(p)}$, $(i/\omega_0) \partial_{z'} \Psi^{(p)} \sim (2n' \pi) \Psi^{(p)}$, $\Psi_{(n+1)}/\Psi_n \sim 1/(k_0 a_0)^2$, 并考虑到截断 n 于合理的值 N 处的情况下, 小于 Ψ_{N+1} 的项可以略去, 因此可以依据量级关系而截断 m, l 于合适的值 M, L 处, 从而得到实用化的修正公式

$$\Psi_n = \sum_{m=2l=0}^M \sum_{n!} \frac{(iz')^n}{n!} \left\{ (-2i)^m \frac{(2m-3)!!}{(2m)!!} \cdot \left[\frac{\partial_{z'}^m}{k_0^{m-1}} \left(\frac{i}{\omega_0} \partial_{z'} \right)^{l(m-1)} \right] \right\} \Psi^{(p)} \quad (12)$$

式中, 由量级关系得 $M \geq N+1$, $L \geq 2(M-m) \cdot \ln(k_0 a_0)/\ln(2\pi n')$. 在傍轴解已知的情况下, 可以用式(9) 或(12) 求得非傍轴方程的一阶或高阶近似解, 且截断点越大, 所得解将会越接近非傍轴精确解, 但计算也将随之变得越复杂, 可以根据实际需要而选取合适的 N 值.

从式(9) 及(12) 可以看出, 由于脉冲中时空耦合效应的存在, 非傍轴效应将会由脉冲光束的空间及时间分布共同决定. 而如果脉冲很长, 则其时空耦合效应会变的很弱, $(i/\omega_0) \partial_{z'}$ 项很小以至于可以忽略不计, 则通过运用式(5), 本文的修正蜕化为 Cao 的光束非傍轴修正^[9]. 另外, 与文献[10] 中所述修正方法相比较, 由于本文的修正方法仅为基本算符对傍轴解的作用而避免了卷积所带来的困难, 因此可以较为方便地应用于单周期以上的任意脉冲光束以求得其非傍轴解析解.

2 脉冲高斯光束非傍轴修正的时空行为

在本文所发展的非傍轴修正公式(即式(9) 及(12)) 中, 我们注意到: i) 非傍轴修正解仅为基本算符对傍轴解 $\Psi^{(p)}$ 的作用; ii) 没有对傍轴解 $\Psi^{(p)}$ 的初始条件进行限制, 亦即 $\Psi^{(p)}$ 是任意的. 因此, 对于任意一个已知的傍轴脉冲光束解, 都可以较为方便地得到其相应的非傍轴修正解. 在本节中, 取傍轴解 $\Psi^{(p)}$ 为脉冲高斯光束作为例子来研究其非傍轴修正

的时空行为.

脉冲高斯光束解的解析形式是由 Porras 得到的,其表达式为^[14]

$$\Psi^{(p)} = f(t'_c) G(0) = F(t'_c) \frac{iz_R}{q(z)} \exp \left[\frac{-ik_0 r^2}{2q(z)} \right] \quad (13)$$

式中 $F(t'_c)$ 为任意脉冲表达式, $G(0)$ 为高斯光束, $t'_c = t' - r^2/[2cq(z)]$, $q(z) = z + iz_R$. 在图 1, 图 2 中, 参数都取为 $a_0 = \lambda_0 = 1 \mu\text{m}$, $\Delta t = T_0$.

在图 1 中, 取脉冲函数为高斯脉冲 $F(t) = \exp(-t^2/\Delta t^2)$ 来检验修正结果的可靠性. 通过利用式(4)由快速傅里叶变换的方法求出了完全非傍轴数值解(可认为它是精确解), 并与一阶、二阶非傍轴修正所得结果作比较来检验修正结果的可靠性. 从图中可以看出, 一阶修正的结果与精确解差别不大, 而二阶修正的结果已经很接近精确解.

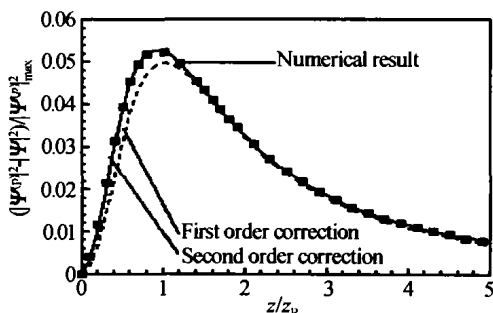


图 1 高斯脉冲高斯光束的一阶、二阶非傍轴修正量及数值结果在轴上分布的比较

Fig. 1 Comparison of the on-axis distribution between the first-order, second-order non-paraxial correction and the numerical result

轴上非傍轴修正沿传输方向的变化如图 1: 在 $z' = 0$ 处为零, 然后随着传输距离的增加而增加, 并在瑞利距离 $z' = z_R$ 处达到最大值, 然后随着传输距离的进一步增加而逐渐减小.

在图 2 中, 则在瑞利距离 $z' = z_R$ 处, 取脉冲函数的形式分别为 $F_a(t) = -i\Delta t/(t - i\Delta t)$, $F_b(t) = \exp(-t^2/\Delta t^2)$, $F_c(t) = i\Delta t/(t + i\Delta t)$, 用二阶的结果研究修正的横向分布. 图 2 表明非傍轴效应削弱了光

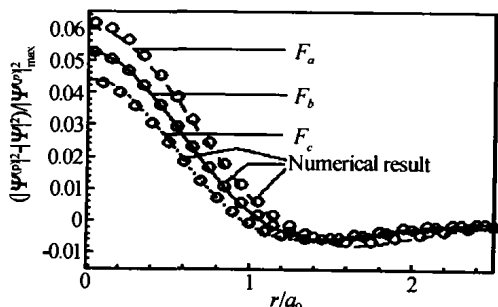


图 2 脉冲形式分别为 F_a, F_b, F_c 的脉冲高斯光束的二阶非傍轴修正量及对应数值结果在 $z' = z_R$ 处的横向分布

Fig. 2 The transverse distribution of the second-order non-paraxial correction and the corresponding numerical result of Gaussian beam driven by F_a, F_b, F_c at the $z' = z_R$ plane

束中心部分的光强, 同时加强了光束边沿的光强.

从图 2 中还可以发现一个有趣的现象, 由于脉冲光束中的时空耦合作用, 脉冲函数为 F_a, F_b, F_c 的脉冲光束的非傍轴修正量在空间横向分布上各不相同, 且呈递减的关系. 为了证明其正确性, 我们用相应的完全非傍轴的精确数值结果(图中的圆圈)验证了这一规律.

为什么会有这种差别呢? 这可以从它们的频谱特性上得到解释: 一方面, 当脉冲形式为 F_a 时, 脉冲光束的频谱分布在 $\omega \leq \omega_0$ 区域. 当脉冲形式为 F_c 时则反之. 而当脉冲形式为 F_b 时, 脉冲光束的频谱在 $\omega \leq \omega_0$ 区域及 $\omega \geq \omega_0$ 区域都有分布. 另一方面, 由傍轴条件可知, 低频分量的傍轴条件较难满足, 高频分量的傍轴条件则较易满足. 综合以上两点, 则图 2 中的区别可谓顺理成章.

3 结论

从严格的脉冲非傍轴方程出发, 通过引入时间和空间傅里叶变换, 发展了一种对多周期脉冲光束适用的时空非傍轴修正方法. 与数值结果比较表明, 对于束宽在波长量级的脉冲光束, 二阶修正已经很接近非傍轴精确解. 将此修正方法应用于脉冲高斯光束时观察到: 由于超短脉冲所固有的时空耦合效应, 脉冲光束的非傍轴修正的空间分布会被其时间分布所影响, 通过脉冲的频谱特性对这一现象进行了分析和解释.

参考文献

- 1 Stingl A, Spielmann C, Krausz F, et al. Generation of 11-fs pulses from a Ti:sapphire laser without the use of prisms. *Opt Lett*, 1994, **19**(3): 204 ~ 206
- 2 Jepsen P U, Keiding S R. Radiation patterns from lens-coupled terahertz antennas. *Opt Lett*, 1995, **20**(8): 807 ~ 809
- 3 Belenov E M, Nazarkin A V. Transient diffraction and precursorlike effects in vacuum. *J Opt Soc Am(A)*, 1994, **11**(1): 168 ~ 172
- 4 Christov I P. Propagation of femtosecond light pulses. *Opt Commun*, 1985, **53**(6): 364 ~ 366
- 5 Wang Z, Zhang Z, Xu Z, et al. Space-time profiles of an ultrashort pulsed Gaussian beam. *IEEE J Quantum Electron*, 1997, **33**(4): 566 ~ 573
- 6 Porras M A. Nonsinusoidal few-cycle pulsed light beams in free space. *J Opt Soc Am(B)*, 1999, **16**(9): 1468 ~ 1474
- 7 Brabec T. Nonlinear optical pulse propagation in the single-cycle regime. *Phys Rev Lett*, 1997, **78**(17): 3282 ~ 3285
- 8 李淑青, 李录, 李仲豪, 等. 含自频移啁啾超短脉冲间相互作用的数值研究. *光子学报*, 2004, **33**(7): 862 ~ 866
Li S Q, Li L, Li Z H, et al. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**

- (7):862 ~ 866
- 9 郑一周,胡巍,陆大全,等. 小尺度自聚焦理论的非傍轴修正. 光子学报,2003,32(11):1329 ~ 1331
Zheng Y Z, Hu W, Lu D Q, et al. *Acta Photonica Sinica*, 2003,32(11):1329 ~ 1331
- 10 楚晓亮,张彬. 超短脉冲在放大介质中传输特性研究. 光子学报,2004,33(6):641 ~ 644
Chu X L, Zhang B. *Acta Photonica Sinica*, 2004, 33(6): 641 ~ 644
- 11 Lax M, Louisell W H, Mcknight W B. From maxwell to paraxial wave optics. *Phys Rev A*, 1975, 11(4): 1365 ~ 1370
- 12 Cao Q, Deng X. Corrections to the paraxial approximation of an arbitrary free-propagation beam. *J Opt Soc Am(A)*, 1998, 15(5): 1144 ~ 1148
- 13 Fu X, Guo H, Hu W. Spatial nonparaxial correction of the ultrashort pulsed beam propagation in free space. *Phys Rev E*, 2002, 65(5): 056611
- 14 Porras M A. Ultrashort pulsed gaussian light beams. *Phys Rev E*, 1998, 58(1): 1086 ~ 1093

The Analysis of the Non-paraxial Effects of the Ultrashort Pulsed Beam in Free Space

Lu Daquan, Hu Wei, Zheng Yizhou and Yang Zhenjun

Laboratory of Light Transmission Optics, South China Normal University, Guangzhou 510631

Received date:2003-12-22

Abstract Based on the spatial- and temporal-Fourier Transform, we developed a non-paraxial correction method to the ultrashort few-cycle pulsed beam, and it was illustrated with the family of pulsed Gaussian beam. The examples shows that, because of the exist of the spatiotemporal coupling, the temporal distribution of the pulse would influence the spatial distribution of the non-paraxial correction.

Keywords Pulsed beam; Non-paraxial



Lu Daquan was born in 1978, in Hunan Province of China. He received B. S. degree from the Physics Department of Xiangtan Normal University. He is now studying for the M. S. degree in the Laboratory of Light Transmission Optics of South Normal University. His main research is focused on the light transmission optics.