

基于平稳小波和相空间重构的激光混沌预测*

相 征^{1,2} 张太镒¹ 孙建成¹

(1 西安交通大学电子与信息工程学院, 西安 710049)

(2 西安电子科技大学通信工程学院 104 信箱, 西安 710071)

摘 要 提出了一种激光混沌时间序列预测算法. 该算法通过平稳小波分解, 将原始数据序列分解为与原序列等长的尺度系数和小波系数, 利用坐标延迟理论, 重建各级尺度系数和各级小波系数的相空间, 再根据混沌吸引子的稳定性和分形性, 在相空间中对尺度系数和小波系数进行预测, 进而通过平稳小波重构算法, 实现了时间序列的非线性预测. 该算法对数据可以进行更平滑的处理, 比无小波算法预测的时间范围更长. 通过仿真试验说明, 原始时间数据序列被成功的重建, 说明算法能够有效的对非线性动态系统的时间序列进行建模和预测.

关键词 混沌动力学; 预测; 平稳小波; 相空间

中图分类号 TN24 **文献标识码** A

0 引言

近年来, 非线性激光系统的混沌动力学特性越来越引起人们的重视, 研究其混沌动力学特性在通讯领域的应用, 已成为热点^[1,2], 对于混沌信号的非线性动力学研究, 常用的方法包括关联维数、最大 Lyapunov 指数和 Poincaré 映射等.

小波变换在各领域获得了广泛的应用^[3]. 它既可以作为表示函数的一种基底, 也可以作为时频分析的一种技术. 混沌信号的小波变换的物理本质实质上是在重构的相空间中, 混沌吸引子向小波滤波器向量所张的空间中的投影, 混沌吸引子的各个不变量是一致的^[4]. 对混沌动力系统而言, 小尺度的小波变换模数的关联维数与系统本身是一致的^[5]. 所以应用小波变换对混沌数据序列进行研究是可行的. 同时由于小波变换可以提取原始信号中的趋势项、周期项和随机项, 能够对原始信号起到平滑作用. 这有利于建模和预测. 平稳小波分解的特点是不再对各级尺度系数和小波系数进行下抽取, 因此, 各级尺度系数、小波系数和原始数据序列是等长的, 这些性质对于混沌时间序列的建模和预测是十分有利的.

本文对于实测的激光混沌时间序列预测建模采用的策略是基于平稳小波分解和重构相空间, 根据混沌吸引子的稳定、分形等特性建立预测模型. 算法构建的物理基础是依据混沌数据的确定性因素, 而貌似随机的混沌现象具有可预测性.

1 平稳小波分解

平稳小波变换对低通和高通滤波器的输出系数不再进行 2 倍抽取操作, 而是在各级滤波器的值之间进行插值操作. 这样, 小波系数和尺度系数就与原始信号等长, 每种分辨率下的信号和原始信号一一对应, 这对时间序列预测是很重要的. 设正交小波高通和低通滤波器的滤波器系数分别为:

$H_i = [h_{i,1}, \dots, h_{i,j}, \dots, h_{i,J}]$, $G_i = [g_{i,1}, \dots, g_{i,j}, \dots, g_{i,J}]$, 其中下标 i, j 表示第 i 级滤波器的第 j 个系数, 令 $H_i = Z_i H_{i-1}$, $G_i = Z_i G_{i-1}$, Z_i 为插值补零算子, 则有 $h_{i,2^j} = h_{i-1,j}$, $h_{i,j} = 0$, $g_{i,2^j} = g_{i-1,j}$, $g_{i,j} = 0$ (j 不等于 2^i 的整数倍). 若 s 为原始信号序列, 令 $a_0 = s$, 则信号的平稳小波变换分解为

$$a_{i+1} = H_i a_i, b_{i+1} = G_i a_i \quad (i=0, \dots, M) \quad (1)$$

式中 a_i 和 b_i 分别为尺度系数和小波系数, M 为分解的最大级数.

2 相空间重构

在一些相空间 $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ 中, 系统的时间演化可以通过确定的动态系统来描述. 为简单起见, 通常假定相空间是确定维的矢量空间. 系统的动力学特性可以通过常规微分方程来描述

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (2)$$

在离散时间序列 $t = n\Delta t$ 的情况下可写为

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (3)$$

时间序列可以想象成通过观察执行度量函数而得到, 即 $\{s_n = h(x_n) | n=1, 2, \dots, N_T\}$, 这里 N_T 是数据点的数量, 然而序列 $\{s_n\}$ 本身不能描述动态系统的高维相空间信息. 为了能够从标量时间序列 $\{s_n\}$

* 国家自然科学基金资助项目(60102005)

Tel: 029-88204226 Email: zhx@mail.xidian.edu.cn

收稿日期: 2005-06-28

来研究系统动力学特性,由 Takens 嵌入原理^[6],基于延迟嵌入坐标,可用系统输出的标量时间序列来重构相空间,称为嵌入相空间. 只要嵌入维数 m 满足 $m \geq 2D+1$ (其中 D 为系统相空间所占有的空间维数),则重建的嵌入相空间和系统的原相空间微分同胚,即拓扑等价. 这时重构嵌入相空间具有与实际的动力系统相同的几何性质和物理性质,而不依赖重构过程的具体细节,且有一个由式(4)描述的平滑映射 $f: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$

$$s_{(n+1)\tau_d} = f(s_{n-(m-1)\tau_d}, \dots, s_{n-\tau_d}, s_n) = f(s_n) \quad (4)$$

式中 s_n 是嵌入相空间的向量. m 称为嵌入维, τ_d 称为延迟时间. 因此重构问题转化为对嵌入相空间里的未知函数 f 的估计问题.

关联维和 Lyapunov 指数可以描述吸引子的全局特征,已经证明如果至少有一个 Lyapunov 指数是正的情况下,可以断言该系统是混沌的. 在动态系统的相空间中有很多 Lyapunov 指数,最大的 Lyapunov 指数描述了动态系统混沌的程度.

Lyapunov 指数可以通过文献[7]的方法来确定:给一个 n 维相空间,将系统的初始条件取为一个无穷小的 n 维球,由于演变过程中的自然变形,球将变为椭球,将椭球的所有主轴按其长度顺序排列,那末第 i 个 Lyapunov 指数根据第 i 个主轴的长度的增加速率定义为

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log_2 \frac{p_i(t)}{p_i(0)} \quad (5)$$

通常将全部的 Lyapunov 指数谱按大小排列为 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 其中 λ_i 按递减规律排列.

和随机过程的吸引子不同,奇怪吸引子在相空间中的点轨迹演变具有确定的结构,关联积分提供的测度公式为

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} \Theta(r - \|s(i) - s(j)\|) \quad (6)$$

凡是距离小于给定正数的矢量,称为有关联的矢量,式中 Θ 是 Heaviside 函数,对于奇怪吸引子来说,在极限情况下有 $C(r) \propto r^v$, v 称为关联维数. 适当的选取 r 可以使得 v 能够描述混沌吸引子的结构. 实际中可以画出 $\log C(r) - \log r$ 图来识别奇怪吸引子,其中最佳拟和直线的斜率就是 v .

3 算法构造

相空间的混沌吸引子具有总体稳定性,吸引性和内部分形性. 随着时间的推移,相空间中的运动状态具有向吸引子靠拢的趋势,反映出很强的稳定性. 由此可知,吸引子内外的任一状态点都有与其邻近状态点共同的运动趋势. 因此估计预测点的邻

近状态点和其后续状态点的函数关系,并用其代替预测点和其后续状态点的函数关系,即可实现时间序列的预测. 从以上描述可以看出,预测点的邻近状态点的选择及邻域的大小和度量对预测的准确性影响很大. 不同位置的状态点和预测点的相关性是不同的,本文对邻域状态点应用改进的加权一阶局域法,以平衡各点对于预测所提供的信息,设中心点 Y_k 的邻近点为 $Y_{k_i}, i=1, 2, \dots, q$, 并且到 Y_k 的距离为 d_i , 且 d_m 是 d_i 中的最小值. 定义点 Y_{k_i} 的权值为

$$P_i = \frac{\exp(-A(d_i - d_m))}{\sum_{i=1}^q \exp(-A(d_i - d_m))} \quad (7)$$

式中 q 为 Y_k 的最近邻点的个数, A 为参数,一般取 $A=1$, 则一阶线性局域拟合为

$$Y_{k_{i+1}} = ae + bY_{k_i} \quad (i=1, 2, \dots, q) \quad (8)$$

式中 $e = (1, 1, \dots, 1)^T$, 不失一般性,当 $m=1$ 时有

$$x_{k_{i+1}} = a + bx_{k_i} \quad (i=1, 2, \dots, q) \quad (9)$$

应用加权最小二乘法有

$$\sum_{i=1}^q P_i (x_{k_{i+1}} - a - bx_{k_i})^2 = \min \quad (10)$$

将式(9)看作关于 a, b 的二元函数,两边求偏导,得到关于 a, b 的方程组并解出 a, b ,代入式(9),得到预测公式,显然参考向量集为 $Y_{k_i}, i=1, 2, \dots, q$ 的一步预测为 $Y_{k_{i+1}}, i=1, 2, \dots, q$.

在算法中邻域点的选择需要确定合适的策略,文献[8]提出用基于广义自由度的方法确定最邻近点数,但该方法没有考虑邻近点权重对预测的影响. 文献[9]提出了加权动态确定最邻近点数的方法,但加大了算法的复杂度. 文献[10]提出在算法中考虑邻域点权值的同时,在邻域点数量上应考虑系统的相空间维数,对算法的简化有利. 本文在算法的复杂性和实时性之间取折中,算法修正为 q 的取值大致为相空间维数,这主要是根据混沌系统相关时间短的特性.

激光混沌时间序列预测算法按以下步骤进行:

- 1) 对原始实测激光混沌数据序列进行预处理得 $h_i, i=1, 2, \dots, N, N$ 是数据点的数量.
- 2) 对 h_i 进行多级平稳小波分解.
- 3) 选择最佳嵌入维数 m 和时间延迟 τ_d .
- 4) 根据延迟坐标理论,重构尺度系数和每一级小波系数的嵌入相空间

$\Gamma_i = \{Y_{i,k} = (\alpha_{i,k-(m-1)\tau_d}, \dots, \alpha_{i,k-\tau_d}, \alpha_{i,k}) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R} | k \in Q\}, Q \subseteq \{1, \dots, N\}, \alpha_{i,j}$ 为第 i 级尺度或小波系数.

- 5) 根据以上的讨论在重建的嵌入相空间中,确定 Y_k 的邻域. 由式(10), (9) 计算得到预测向量集 $Y_{k_{i+1}}, i=1, 2, \dots, q$.

6)对向量集 $Y_{k+1}, i=1, 2, \dots, q$ 中的向量按列求平均后得到预测值 Y_{k+1} , 取出最后一维数据得到尺度系数或小波系数的预测值 $\alpha_{i, k+1}$.

7)重复第 5)步和第 6)步, 可以实现多步预测, 获得尺度系数和各级小波系数预测值 $\hat{\alpha}_{i, j}, i=1, 2, \dots, P, j=1, 2, \dots, L$. 其中 P 为小波分解级数, L 为预测长度.

8)利用 $\hat{\alpha}_{i, j}$ 通过平稳小波重构可得原始激光混沌序列预测值 $\hat{h}_j, j=1, 2, \dots, L$.

4 仿真结果

仿真计算的实测数据来自文献[11]提供的由远红外激光器产生的混沌数据. 将数据集分为训练和测试两部分, 其中训练集合由 1500 点组成, 用来预测后 1000 点. 文献[12,13]讨论了 m 和的 τ 选择方法, 可得 $m=6, \tau=2$. 平稳小波分解采用 Haar 小波, 分解级数要适中, 大的分解级数虽然可以使信号划分得更细, 细节信号和逼近信号的平滑性和平稳性也更好, 但同时也造成了计算误差及误差积累, 使得预测性能降低. 通过在小波分解级数 2 到 8 之间进行性能对比实验, 选择小波分解级数为 3. 实验结果如图 1~图 4. 图 1 中(a)、(b)是第 3 级小波分解系数, (c)、(d)是第 2 级小波分解系数, (e)、(f)是第 1 级小波分解系数. 从图 1 中可以看出, 经过小波变换后, 原始序列内在的分形特性(比例自相似性)保持不变, 尺度系数变得平滑. 由于小波系数 1 和 2 的幅值较低, 所以对于预测的影响较小. 小波系数 3 具有一定的周期性, 有利于进行预测. 图 2 中(a)、(c)显示的是实际曲线和建模算法的运行结果比较. 可以看出, 在前 300 点的误差较小, 300 点以后误差逐渐加大. 分析原因主要是迭代误差加大所引起. 图 2 中(b)、(d)显示了时间序列的 Poincaré 图, 通过比较原始的吸引子和重建的吸引子, 发现两

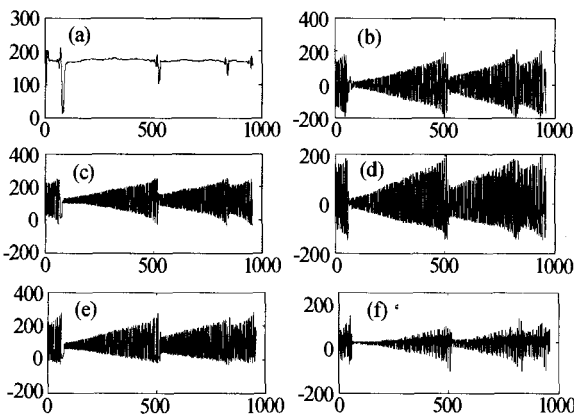


图 1 实测远红外激光混沌数据的平稳小波分解
Fig. 1 The stationary wavelet decomposition coefficient of Far-Infrared-Laser in a chaotic state

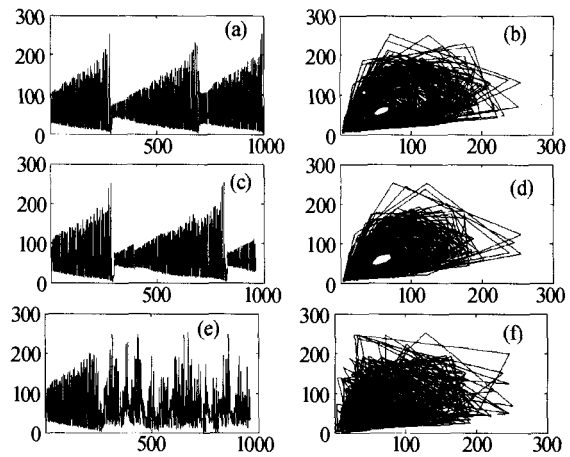


图 2 时间序列和 Poincaré
Fig. 2 Time series and Poincaré

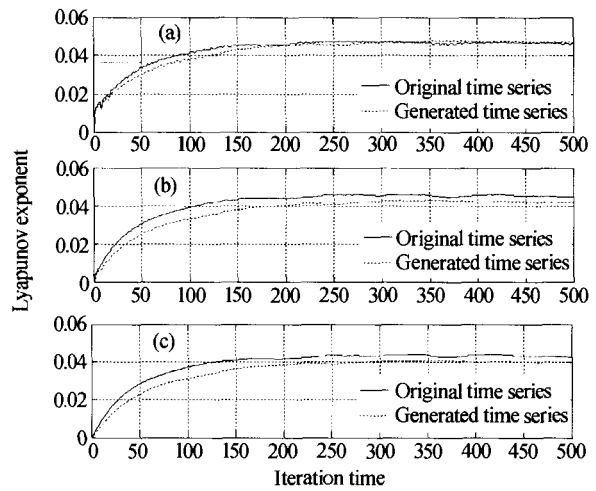


图 3 原始和重建时间序列的最大 Lyapunov 指数
Fig. 3 Estimation of largest Lyapunov exponent for original and generated time series

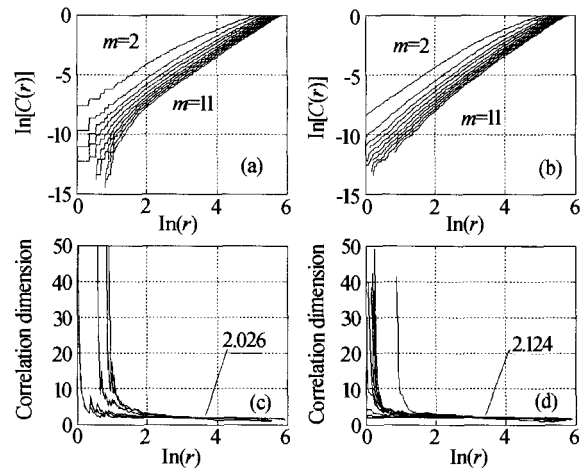


图 4 嵌入维为 2~11 的相关积分图和关联维
Fig. 4 Correlation integral and Correlation dimension estimates for embedding dimensions 2~11

者是非常相似的. 图 2 中(e)、(f)显示的是无小波算法的时序图和 Poincaré 图, 在 200 点后预测结果已经不能接受, 说明本文提出的算法比无小波算法具有明显的优势.

虽然从图中可以定性的看出动态系统已经成功

重建,还需要从数值计算来定量的分析原始和重建的动态系统的差别,因此有必要计算关联维和最大 Lyapunov 指数. 这里需要着重指出的是对于混沌时间序列的预测而言,在算法仿真中如果仅仅比较原始时间序列和预测后的时间序列的关联维和最大 Lyapunov 指数是不充分的,因为对于不同的混沌数据序列而言,其关联维和最大 Lyapunov 指数有可能极为相似. 因此图 2 的直观比较对于算法的有效性验证是必须的.

用 Grassberger 算法^[14]和 Wolf 算法^[7]可以分别计算关联维和最大 Lyapunov 指数,图 3 中(a)、(b)、(c)分别显示了在嵌入维数 $m=2,4,6$ 时重构系统和原始系统的最大 Lyapunov 指数,可以看出两者差值很小. 图 4 中(a)、(b)给出了原始和重建时间序列的关联积分图,(c)、(d)给出了原始和重建时间序列的关联维图,本例中,预测的时间序列关联维是 2.124,原始的是 2.026.

5 结论

通过对实际测试的激光混沌数据的仿真计算,证明用本文提出的平稳小波变换和重构相空间方法可以成功的对动态非线性系统预测建模. 该方法可以在激光混沌的通信研究中得到应用.

参考文献

- 张涛,路巍. 声光双稳态系统混沌的周期扰动控制. 光子学报,2004,**33**(4):456~459
Zhang T, Lu W. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(4): 456~459
- Claudio A S D, Colet R M P, Fernandez G. Encoded Gbit/s digital communications with synchronized chaotic semiconductor lasers. *Quantum Electron*, 1999, **35**(3): 292~297
- 赵健,齐华,田泽. 改进的小波域混沌数字水印算法实现. 光子学报,2004,**33**(10):1236~1238
Zhao J, Qi H, Tian Z. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(10):1236~1238
- 游荣义,陈忠,徐慎初. 基于小波变换的混沌信号相空间重构研究. 物理学报,2004,**53**(9):2882~2888
You R Y, Chen Z, X Shen C. *Acta Physica Sinica*, 2004, **53**(9):2882~2888
- 刘海峰,代正华,陈峰. 混沌动力系统小波变换模数的关联维数. 物理学报,2002,**51**(6):1186~1192
Liu H F, Dai Z H, Chen F. *Acta Physica Sinica*, 2002, **51**(6):1186~1192
- Takens F. Detecting strange attractors in fluid turbulence. In Rand D and Young L S, editors, *Dynamical systems and turbulence*. Berlin, Springer-Verlag, 1981. 366~381
- Wolf A, Swift J B, Swinney H L. Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica D*, 1985, **16**(3): 285~317
- Kurek J E, Zaremba M B. Iterative learning control synthesis based on 2D system theory. *IEEE Automatic Control*, 1993, **38**(1): 121~125
- 丁涛,周惠成. 混沌时间序列局域预测方法. 系统工程与电子技术,2004,**26**(3):338~341
Ding T, Zhou H C. *Engineering and Electronics*, 2004, **26**(3):338~341
- 甘建超,肖先赐. 混沌时间序列基于邻域点的非线性多步自适应预测. 物理学报,2003,**52**(12):2996~3001
Gan J C, Xiao X C. *Acta Physica Sinica*, 2003, **52**(12): 2996~3001
- Huebner U, Abraham N B, Weiss C O. Dimensions and entropies of chaotic intensity pulsations in a single-mode far-infrared NH₃ laser. *Physical Review Letters*, 1989, **40**: 6354~6359
- Cao L. Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series. *Physica D*, 1997, **110**: 43~50
- Fraser A M, Swinney H L. Independent coordinates for strange attractors from mutual information. *Physical Review Letters*, 1986, **33**(2):1134~1140
- Grassberger, Procaccia I. Characterization of strange attractors. *Physical Review Letters*, 1983, **50**(5):346~349

Prediction Algorithm for Laser Chaotic Based on Stationary Wavelet Transform and Reconstructed Phase Space

Xiang Zheng^{1,2}, Zhang Taiyi¹, Sun Jiancheng¹

¹ Dept. of Information and Communication Eng, Xi'an Jiaotong Univ., Xi'an 710049

² School of Telecommunication Engineering, Xidian Univ., Xi'an 710071

Received date: 2005-06-28

Abstract A new algorithms for laser chaotic time series prediction was presented. The origin time series was decomposed as the measurement coefficients and wavelet coefficients based on the discrete stationary wavelet transform algorithms. The phase space of these coefficients was reconstructed by the theory of time delays. Based on the stability and the fractal of the chaotic attractor, the coefficients were predicted in their phase space. Finally the prediction of the coefficients were acquired by the inverse discrete stationary wavelet transform. The proposed algorithm was a better candidate for long range prediction. The simulation results prove the similarity of dynamic invariants between the origin and generated time series. And it shows that the proposed method can capture the dynamics of the nonlinear systems series effectively.

Keywords Chaos dynamics; Prediction; Stationary wavelet; Phase space



Xiang Zheng was born in 1968, an associate professor, teaching in School of Telecommunication Engineering, Xidian Univ., Xi'an, China. He received the B. S. degree from Electronic Engineering Department of Engineering University of Air Force in 1990 and received M. S. degree from Electronic Engineering Department of Engineering University of Air Force in 1998. Currently, he is working toward the Ph. D degree in communication and information system at Jiaotong University, Xi'an, China. His current research interests include optical high speed communication, WDM.